

基础偏微分方程

Basic Partial Differential Equations

■ David Bleecker　George Csordas

■ 李俊杰 译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press



基础偏微分方程

Basic Partial Differential Equations

David Bleecker　George Csordas

李俊杰 译

高等教育出版社
Higher Education Press

本书是基于作者多年教学经验的积累而编写的一本起点不高的适用于多个专业大纲要求的偏微分方程（数学物理方程）教材。只要具有工科微积分、线性代数及常微分方程的初步知识就可以阅读本教材。本书取材丰富，包括了应用偏微分方程的基本内容：特征线法，分离变量法，Fourier级数，Sturm—Liouville理论、Duhamel原理、保角映射方法、Fourier变换、Green函数、特殊函数和Laplace级数等。此外，本书还比较有层次地讲述偏微分方程的一些基本理论问题：如解的唯一性、极值原理、一些特殊问题解的存在性及流形上的偏微分方程等，对偏微分方程数学模型在物理、力学问题中的应用也给予较大的关注。本书论证详细、易懂，教学层次分明，主讲教师可以根据教学对象的水平和大纲要求进行适当的选材，掌握所讲内容的深度，留给不同程度的学生进行自学和深入的空间。

本书可供高等学校理工科各专业的本科生、研究生和教师，以及相关领域的研究人员参考使用。


ISBN 7-04-019158-X

9 787040 191585 >

定价 69.00 元

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流．无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助．但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多．基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了．很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益．高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作．参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等等．我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识．海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢．

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005年1月

谨以此书献给 Marie 和 Beverly,

他们一直比我们更热切地期待着本书的完成.

原书前言

依赖于空间和时间变量的量，常由基于内在的物理原理的微分方程来支配. 偏微分方程 (偏微) 不仅精确地表示这些法则，而且有助于根据系统的初始状态和给定的外部影响来预测系统的行为. 因此偏微在各种形式的科学和工程技术中的作用，或者说，它对可度量的量合乎常规平滑的、可预测的变化方面所做的努力，是怎么评价都不为过的.

根据对本书内容 15 年的讲授以及从学生中来的大量反馈，我们认为本书对具有一年半微积分知识的大学生来说是一本在偏微方面很具可读性的入门书，它不需要用到更多的数学知识. 特别，学生可以没有学过线性代数课程，甚至没有学过常微分方程课程就能理解本书的内容. 就如本书书名所揭示的那样，我们的着重点只在我们认为这个学科最本质的方面，至于一些其他的重要主题，比如像偏微分方程组，只是提及一下. 然而即使是对一个特殊的班，本书的内容都无法在一个学期中讲完. 由于偏微学科的广泛关联性，我们觉察到确实有再加一个学期的要求，而这种要求大多是不能满足的，部分原因是由于缺少在时间和篇幅上适合大二学生使用的书. 粗略地看一下本书的目录或索引会发现，其中有些主题被认为是相当高深的 (如最大值原理、Fourier 变换、拟线性偏微、球面调和函数、流形上的偏微、复变量理论、Fourier 级数一致收敛条件）. 然而，尽管数学权威们 (也许不是有意的) 造成了一般的印象，但任何证实了的数学结果或概念，不管它有多“高深”，都能把它分解为几个初等的、简单的部分，这些部分

对想尝试的学生来说都是容易理解的. 对于本书的那些所谓的“高深”主题的处理, 我们认为已成功地达到连我们自己都感到惊讶的程度. 要使本书写成对那些才学过标准的大一/大二微积分课程的学生, 即使是那些已经对所学的微积分忘了差不多的学生, 完全是自封闭的, 对我们是一种不断的和值得的挑战. 我们已成功地教授了那些在学期初回忆不起来如何去求解 $y'(x)=y(x), y(0)=1$ 的学生, 其实据最初的测验, 有超过一半的学生情况就是这样. 然而, 到学期结束前, 同样是这些学生, 他们能够证明和理解热方程的最大值原理, 能够轻松推导求解关于初边值的连续依赖性问题. 实际上,“高深的论题” 本身很少是难的, 但如果 (为了追求优雅) 花很少的时间向学生去解释, 去诱导的话, 那么它们看上去是难的.

我们避免那种先证明兴趣索然的最一般形式的结果, 然后用它们去导出大量特例的意向. 总的来说, 我们从很多解答出来的例子中归纳出结果和方法. 等学生知道了足够多的例子之后, 对一般情况的论证就不仅是理解而且是常能预料到了. 特别, 对那些刚知道正弦和余弦的学生一开始就讲授 Sturm-Liouville 理论, 然后作为特例, 讲典型的边值问题, 我们觉得这样的做法是不明智的, 尽管 Sturm-Liouville 理论对边值问题提供了千篇一律的处理方法. 我们采取的是反过来的做法. 在讲授了各种简单的热方程的边界条件和 Fourier 级数之后, 学生们就可以把 Sturm-Liouville 理论作为学过的内容的自然延续, 然后来学习和欣赏它. 从例子到定理这样的过程自然会导致书的篇幅增加, 但学生用这种方式学得更快且更有效果. 简言之, 从地基往上建房比从屋顶往下建容易. 在这样的教学过程中也许会丧失某种程度的优美, 但不会牺牲严谨. 对书中每个基本结果, 我们几乎都会在某种时候给出严格的证明, 或至少给出参考文献 (如, 关于流形上特征函数展开收敛性证明的参考文献). 我们当然不建议在课堂上对什么都给出证明, 因为这将严重限制讲授的内容, 而是可以指导有兴趣的学生学习书中许多详细的、完全易消化的证明. 我们以严谨的方式论述了偏微的许多解是能用相应的边值问题或初值问题的 Green 函数的积分来表示. 在大多数的偏微教科书中, 这样的积分公式是在假设这些偏微的解实际上存在的条件下推导出来的 (如果真是推导的话). 说实在的, 这需要工具去验证用这个积分所定义的函数确实是所给问题的解. 这必然涉及在积分下求导的 Leibniz 法则, 尤其当被积函数是无界时. 本书的一个特点是给出了 Leibniz 法则的完全证明 (参看附录 3), 这在其他的入门性教科书中似乎没有. 在证明中我们根据来源于 [Lewin,1986,1987] 的想法, 用 Riemann 积分的控制收敛定理的一个初等形式来代替 Lebesgue 控制收敛定理. 这样就避免了 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的

概念.

解题是学习任一数学学科的主要方法. 本书包含了许多难度不一的习题, 从纯粹常规的到那些即使对最出色的学生也很有挑战性的习题. 有时人们发现虽然一些学生通过模仿步骤能得到问题的解, 但他们也许仍然不会解释或利用该解, 或者甚至仍然不理解为什么他们得到的表达式确实是所求问题的解. 我们通过加入许多需要学生去思考、去从中得出一些结论和解释所得结果的练习来避免这种悲剧发生, 而不是那种仅仅进行一些纯粹计算的练习. 因有些学生会设法先行查看书后的答案, 所以我们只列出部分解答. 然而, 解答手册 (除了部分很显然的习题, 都给出了完全的解答) 只对讲授教师提供. 我们亲自解答了全部的习题.

因为整本书的内容无法在一个学期内讲授完, 对于要求一个学期内讲授该课的教师就得决定哪些章节需要讲授. 假使有需要, 教师可考虑推行再一个学期的偏微教学. 下面, 我们概括了各章节的内容. 在此之后给出了一些建议, 对一个学期或二学季课程, 哪些章节是必须的, 哪些内容是机动的.

致谢 (略.)

David Bleecker, George Csordas
火奴鲁鲁, 1996

各章概要以及给教师的建议

第一章 (回顾与引言): 如学生学过常微课程, 那么第 1.1 节可略过不讲, 或安排为阅读. 第 1.2 和 1.3 节是一些有关偏微及其应用的必要概述, 还包括某些主题的介绍, 比如分离变量和叠加原理. 这些概念后面常会用到.

第二章 (一阶偏微): 对那些把一阶偏微看作没什么实用性的教师, 我们希望他们在决定整个略过第二章之前先读一下第二章的引言. 一阶偏微不仅在生灭过程 (即种群密度的演化)、连续介质力学以及交通流中激波的传播中有广泛应用, 而且让学生看到变量变换是怎样用来大大简化一个偏微. 顺便提一下, 仅由于在应用领域所产生的二阶偏微已经呈标准形, 我们就没有把 (常系数) 二阶线性偏微化为标准形 (如, 通过坐标旋转等方法) 选作例子和训练习题. 然而, 完整的分类定理叙述在第 1.2 节给出, 完全的证明在附录 1 中给出. 为了弥补有关二阶偏微变量变换训练少, 在第二章中有大量的有关一阶偏微的变量变换问题.

一阶偏微在应用中很少以参数化常微的标准形式出现. 虽然第三章至第八章独立于第二章, 教师应认真考虑至少讲授第 2.1 节, 该节中有当 a, b 和 c 都为常数时, $au_x + bu_y + cu = f(x, y)$ 的求解. 变系数情形在第 2.2 节. 拟线性情形在第 2.3 节. 完全非线性情形在选修的第 2.4 节.

第三章 (热方程): 第 3.1 节以热方程的推导入手. 在没有先引入 Fourier 级数的情况下解答了最简单初边值问题. 用分离变量找出热方程满足齐次边界条件 (B.C.) 的乘积解, 然后求满足初始条件的一个线性组合. 在第三章, 所选的初始温度是可由 (根据三角恒等式) 有限项适当形式的正弦和余弦的线性组合来表示. 然后学生自然会问, 如果初值不是这种情况怎么做? 换句话说, 学生自然被激发引入 Fourier 级数, 这是第四章的主题. 在第 3.2 节, 通过对第一类或第二类齐次边界条件得到温度平方的平均是非增的来证明热方程各种初边值问题的解的唯一性. 最大值原理提供了唯一性的另外一种证明方法. 先用很多例子来阐明最大值原理, 并指出用最大值原理容易得到解对初边值的连续 (一致) 依赖性. 最大值原理的证明放在第 3.2 节的最后. 第 3.3 节讨论了各种简单的与时间无关的边界条件, 但可能是非齐次的情形. 在第 3.4 节, 用 Duhamel 原理处理与时间有关的边界条件和有热源的情形. 如果时间有限, 第 3.4 节可略过或留到以后讲授, 第 3.3 节可以简单快速地讲授. 然而, 第 3.1 节无疑是任何一门初等偏微课程的内容, 我们还强烈建议第 3.2 节要相当详细地讲授.

第四章 (Fourier 级数和 Sturm-Liouville 理论): 学生在第三章注意到 Fourier 级数的需要. 在第 4.1 节, 引入函数正交的概念以及一个函数形式上展成 Fourier 级数的定义, 这个级数可能收敛也可能不收敛到该函数. 计算了许多例子, 引发出收敛性问题. 给出了对一个 C^2 函数一致逼近所需的项数估计 (证明则留到第 4.2 节给出). 通过对 Fourier 级数余项作积分估计提供了一个获得更精细估计的技巧. 第 4.2 节有 Fourier 级数在各种条件下收敛性证明的细节. 小心地指出逐点收敛与一致收敛之间的不同. 证明了分段 C^1 函数具有逐点收敛, 连续的分段 C^1 函数具有一致收敛. 如时间不充裕, 建议略过那些较冗长的证明或安排为课后阅读. 然而要有这样一个一般的认识: 在圆周上定义的函数越光滑, 它的 Fourier 级数收敛得就越迅速. 在第 4.3 节引入了 Fourier 正弦和 Fourier 余弦级数，它们是用来处理（至少是形式上）初始温度不是由有限项适当形式的正弦和余弦的线性组合情形（第三章留下的伏笔）. 强调了无限项 C^2 函数的和函数未必是 C^2 的, 因此所得的形式解未必是精确解. 然而, 通过在充分

大的项数截取级数后通常能在任意给定的确定误差之内满足初始条件, 这正是应用领域所需要的. 在某些假设下形式解的有效性放在第七章. Sturm-Liouville 理论是第 4.4 节内容. 现在学生已经可以领会这个主题了, 它把已知的事实推广到非齐次杆和第三类边界条件情形. 借助于 Sturm-Liouville 比较定理, 给出了 Sturm-Liouville 问题有无穷多个特征值的一个有说服力的证明梗概. 实际上, 本书的后面部分除了第八章 (第 8.5 节) Bessel 函数有无穷多个零点的叙述之外, 其他都与第 4.4 节无关. 因此, 考虑到时间的压力, 整个略去第 4.4 节也是可取的, 但至少得告诉学生那是关于什么内容的. 我们认为第 4.3 节能够且应该快速地讲授, 第 4.2 节应着重定理的叙述而不是它们的证明细节. 第 4.1 节因为后面常会用到应详细讲解.

第五章 (波方程): 在第 5.1 节, 由 Newton 方程导出作横向振动弦的波方程. 细致地解释了为什么横向振动的假设实际得到的是线性波方程而不是近似线性方程. 于是去掉了有疑问的"小" 振动假设. 求解了最简单的有限弦初边值问题. 在第 5.1 节利用能量积分法还给出了这些问题解的唯一性的证明. 第 5.2 节包括无限弦波问题的 D'Alembert 解法. 包括 D'Alembert 公式的一些推论, 如有限传播速度, 并解释了半无限弦的镜像法. 对有限弦, 镜像法提供了不同于 Fourier 级数法的又一方法. 有限弦解对初始条件的连续依赖性也是 D'Alembert 公式和镜像法的一个简单推论. 在第 5.3 节处理有限弦的各种边值问题. 除此之外, 用 Duhamel 原理和 Fourier 级数法来处理非齐次波方程 (即, 含有作用力的项). 第 5.1 节应该较详细讲授, 完整的推导可安排为课后阅读. 第 5.2 节同样也是关键性的, 如时间不够, 第 5.3 节可做简单概述, 以便学生知道其中论及什么内容以备今后之用.

第六章 (Laplace 方程): 在第 6.1 节, 引出 Laplace 方程并说明其解可视为稳态的温度分布. 引入 Dirichlet 问题和 Neumann 问题. 第 6.2 节是关于矩形上这些问题的求解. 由于学生熟悉分离变量和叠加, 这些内容可很快讲授. 激发和应用了唯一性和最大值原理, 它们的证明则留在第 6.4 节. 在第 6.3 节, 利用极坐标求解圆环上和圆盘上 Dirichlet 问题和 Neumann 问题. 详细地证明了中值定理和 Poisson 积分公式, 并证明了调和函数的正则性. 在第 6.4 节, 证明了有界区域上调和函数的最大值原理以及 Dirichlet 问题解对边值的连续依赖性. 这些结果的重要性在前面章节已对学生详细展示过. 第 6.5 节是有关复变量理论在 Laplace 方程上的应用. 假设没有学过复变量. 不涉及 Cauchy 定理、围线积

分和留数定理, 理由很简单, 这里不需要这些. 然而, 揭示和利用了复解析函数与调和函数之间的密切联系. 此外, 用来求解稳态温度问题、流体流问题和静电学问题的共形映射的概念和作用可得心应手地加以运用. 第六章的内容都是重要的, 若在前面章节的内容用时太多的话, 就可能无法上完第六章的所有内容. 如果一定要做个选择的话, 对一个大多数是工科学生的班级, 讲授第 6.5 节而不是第 6.4 节是明智的; 然而对数学专业的班, 相反的选择是合适的.

第七章 (Fourier 变换): 即使只讲前面章节最基本的内容, 在一个学期里要上到第七章都需要开一个额外的班. 然而, 若学生打算将来学正式的复变量课程, 第六章的许多概念在那课程里都会论述. 因而略过第六章的许多内容着手第七章就成为一种有吸引力的选择. 当然, 应该考虑再引入一个学期 (或一个学季) 的偏微课程的可能性. 这种需要是存在的. 第 7.1 节引入复变量 Fourier 级数和定义了 Fourier 变换. 计算了许多例子. 在第 7.2 节, 详述了 Fourier 变换的基本性质, 这些性质使 Fourier 变换在偏微求解过程中成为有用的工具 (即, 把求导转化为乘法算子, 变换的乘法对应于卷积). 揭示了函数的正则性提高该函数 Fourier 变换的衰减率 (反之也对) 这样一个概念. 虽然这通常被认为是高深的论题, 但我们用初等的方式来处理, 而且这个概念与圆周上函数的光滑性提高它的 Fourier 系数的衰减率 (第 4.2 节[①]所包含的) 的概念有着紧密联系. 第 7.3 节讲述了反演定理、Fourier 逆变换和 Parseval 等式. 反演定理的证明则留作附篇放在第七章的最后. 在第 7.4 节用 Fourier 变换来求解偏微. 第 7.1—7.3 节可快些讲授而集中讲授第 7.4 节. 在该节中解答了无限杆上热问题以及半平面上的 Dirichlet 问题. 我们认为着重强调以下的事实是一个好的主意: Fourier 变换法不仅假定问题的解存在, 而且假定解具有一定的衰减性质. 因此, 用这种方式获得的解的积分公式, 应该通过细致地应用积分号下求导的 Leibniz 法则来独立地验证. 对一个大多数是工科学生的班来说, 只消指出这点就可, 不必给出详细的验证. 虽然在第五章已经给出波方程的 D'Alember 公式的推导, 这里也证明怎样用 Fourier 变换的技巧来获得它, 还讨论了 Dirac delta 分布. 在第 7.5 节用镜像法来求解半无限和有限杆的热问题. 出现在第四章的无穷和的形式解的有效性现在就容易处理了. 另外, 引入和应用了 Fourier 正弦和 Fourier 余弦变换.

第八章 (高维情形的偏微): 第 8.1 节把第三章到第七章中的基本概念直接推广到多个笛卡儿空间坐标的情形. 求解矩形和立方体上的热问题, 且考虑了

[①]原文误为第 3.2 节. —— 译者

长方体上的 Laplace 方程. 二重 Fourier 变换和二重 Fourier 级数就轻松地被激发和引入. 在第 8.2 节, 明确了热问题、波问题和位势问题解的构造的基石是满足边界条件的 Laplace 算子的特征函数. 这个基本事实常被隐含在分离变量过程和繁多的产生于各种坐标系的特殊函数之中. 许多函数的级数展开都归入特征函数展开的范畴. 在第 8.2 节还证明了一个二重 Fourier 级数一致收敛定理, 也讨论了二重 Fourier 变换的简单性质. 第 8.3 节开始用球坐标来研究标准的偏微. 球面上 Laplace 算子的特征函数定义为球面调和函数. 它们成为空间上 Laplace 算子的特征函数的突出部分, 并能用相应的 Legendre 函数来表示. 利用球对称解答了许多热问题和波问题. 推导出三维的 D'Alember 公式, 并讨论了 Huygen 原理. 第 8.4 节覆盖了所有特征值和球面调和函数的确定, 特征空间的维数等内容. 给出了球面 C^2 函数的 Laplace 级数一致收敛的一个完全证明. 此外, 通过利用球面调和函数和球 Bessel 函数求解许多与角度有关的问题 (如, 球内热流). 在第 8.5 节, 考虑了用柱坐标表示的偏微以及更多的用球坐标表示的偏微, 但具非平凡位势, 比如 Schrödinger 方程. 讨论了求解过程中产生的特殊函数. 虽然球 Bessel 函数能用正弦和余弦来表示, 但 (整数阶) 柱 Bessel 函数则不能, 这就是为什么放在球坐标之后处理柱坐标的原因. 考虑了一些应用问题, 从振动的圆形膜, 到 (非相对论性的) 氢原子能量水平和波函数的确定以及作为周期表基础的能量水平衰期的确定. 第 8.6 节论述了 $\mathbb{R}^n$ 中带边的紧子流形上标准的热问题、波问题和位势问题. 用易于理解的方式定义了这些子流形上的 Laplace 算子. 虽然没有证明在这些一般结构下特征函数和特征值的存在理论, 但列举了一些更具可读性的参考文献. 诚然, 特征函数难于被具体计算或逼近, 但一旦特征函数给定, 求解流形上标准的热问题、波问题和位势问题的过程就跟散布在书中其余部分的许多特殊情形很类似. 最后的章节基本上把这些特殊的情况统一合并为一个框架. 再者, 对 Laplace 算子特征值的 Weyl 渐近公式进行了讨论, 还讨论了流形的几何信息, 这些信息能从可看作是振动的频率的特征值中“听”出来.

在计划一个学期或两学季的教学课程时, 我们建议选择下面列出的章节, 记住标明优先的章节. 另外, 如果学生常微不太强的话就应包括第 1.1 节. 标有*号的章节可以在两个课时内上完, 而大多数教师将用大约三个课时在其他节上. 留下用来测验和检查部分回家作业的时间. 第八章或许最好留作第二个学期的课程, 或对那些超前的、有天赋和很有兴趣的学生作为课外自修计划的材料.

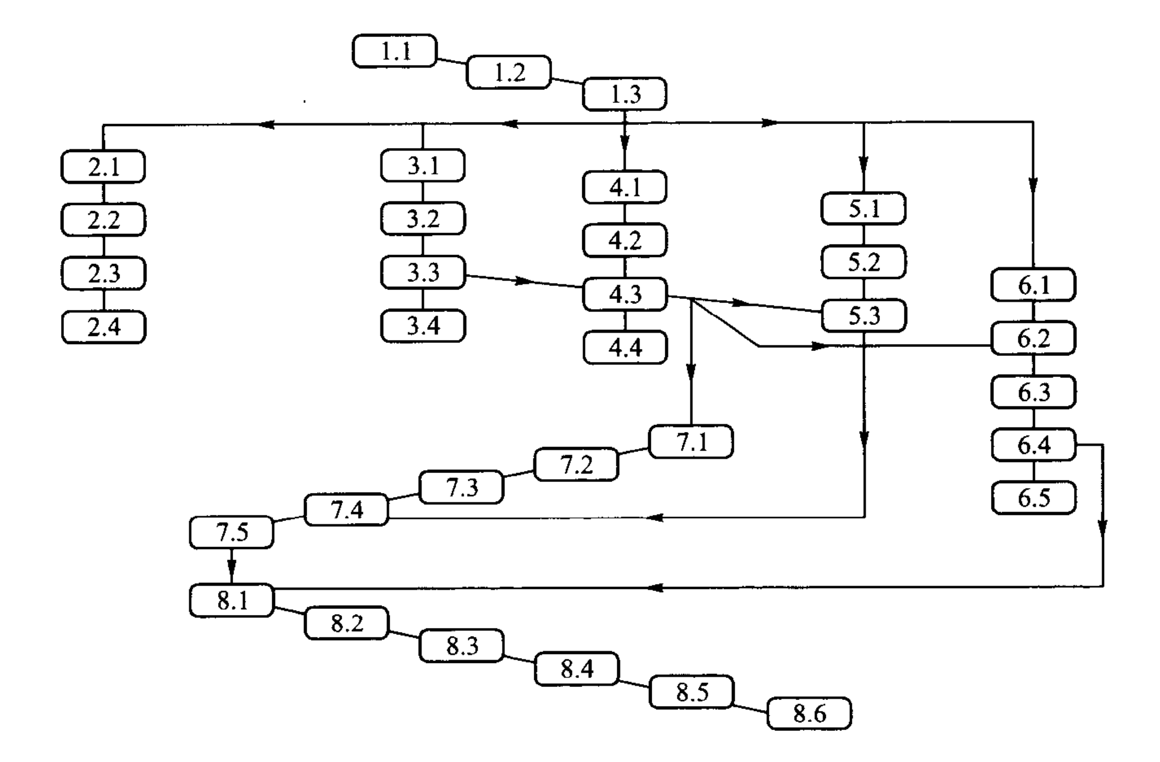
关键的章节 : 1.2, 1.3*, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3*, 5.1, 5.2, 6.1*, 6.2*, 6.3

较高要求的章节: 2.1, 3.3*, 5.3*, 6.4, 6.5, 7.1*, 7.2*, 7.3*, 7.4

超高要求的章节: 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, 4.4, 7.5

我们特别感谢偏微和几何专家、Field 奖获得者、同仁和编辑 S.T.Yau 以及合作编辑 Julie Lynch 对本书的极大信任. 我们做了一切努力来确保不辜负这种信任.

各节的关系



1.1
1.2
1.3
2.1
2.2
2.3
2.4
3.1
3.2
3.3
3.4
4.1
4.2
4.3
4.4
5.1
5.2
5.3
6.1
6.2
6.3
6.4
6.5
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
8.1
8.2
8.3
8.4
8.5
8.6

图字: 01–2006–2701
ORIGINAL ENGLISH LANGUAGE EDITION PUBLISHED BY
International Press Incorporated, Boston
P. O. Box 2872
Cambridge, MA 02238–2872

图书在版编目 (CIP) 数据
基础偏微分方程 / (美) 布利克 (Bleecker, D.), (美) 科达斯 (Csordas, G.); 李俊杰译. — 北京: 高等教育出版社, 2006.6
(数学翻译丛书 / 丘成桐主编)
书名原文: Basic Partial Differential Equations
ISBN 7–04–019158–X

I.基… II.①布…②科…③李… III.偏微分方程–高等学校–教学参考资料 IV.0175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 047208 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800–810–0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010–58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2006 年 6 月第 1 版
印　　张	43.25	印　　次	2006 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	760 000	定　　价	69.00 元

物 料 号　19158–00

目 录

第一章　回顾与引言

在本章我们回顾后面将会用到的常微分方程方面的内容，还对偏微分方程的应用作了概述，并向读者介绍了一些基本技巧，如分离变量．第 1.1 节中对常微分方程的回顾是自封闭的，因为经验表明对这些内容的补习是非常必要的．即使那些具有不错的常微分方程数学知识的人也会发现这些应用例子和问题（涉及生物学、流体流、电子学、机械振动和共振等）是很有趣味和吸引人的．第 1.2 节向读者介绍了偏微分方程在许多科学应用方面的前景，如万有引力、静电学、热力学、声学和极小皂膜曲面．有些内容（比如，运用 Green 函数和积分算子）经过一次阅读可能不会完全领会．确实，学生在他们学习的后期阶段将会发现对第 1.2 节的某些方面（如叠加原理）会更加明了．在第 1.3 节，关于通解典型形式上的区别，比照了常微分方程研究和偏微分方程研究．举例说明怎样用侧边条件由通解来确定特解．此外，这节还包括了分离变量法．

§1.1　常微分方程回顾

联系未知函数以及它的导数的方程称为微分方程．如果未知函数是多于一个变量的函数，那该微分方程称为**偏微分方程**（以后简称为偏微），这是因为未知函数的导数是偏导数．而在一个常微分方程（常微）中，未知函数是单变量函数．在研究偏微之前，回顾一些常微基础是值得的，因为偏微的解往往能通过求解相

关的常微得到. 下面对一阶常微 (可分离的和线性的) 以及二阶齐次常系数线性常微的回顾将满足我们的需要.

一阶常微

> 如果一阶常微能写成如下形式则称是可分离的
>
> $$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{1}$$
>
> 其中 y 是独立变量 x 的未知函数.

可通过两边关于 x 积分 (如可能的话) 求解这类方程. 积分左边得

$$\int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(y)dy = F(y) + C_1,$$

其中 $F(y)$ 是 $f(y)$ 的一个原函数 (即 $F'(y) = f(y)$), C_1 是任意常数. 同样, 积分 (1) 的右边, 并令 $G(x)$ 表示 $g(x)$ 的一个原函数, 则得

$$F(y) + C_1 = G(x) + C_2 \quad \text{或} \quad F(y) = G(x) + C, \tag{2}$$

其中我们已把任意常数 C_1和C_2 并为一个任意常数 $C = C_2 - C_1$. 实际上, 可通过先把 (1) 重写成如下的微分形式来得到 (2)

$$f(y)dy = g(x)dx. \tag{3}$$

则积分 (3) 式两边就得到 (2). 注意到 (3) 中变量 x和 y 分别在等式的两边, 因此有 "可分离方程" 之说. 如果可能, 由 (2) 解出用 x 来表示 y. 然而, 对给定的 x 和 C 可能会有不止一个 (或可能没有) y. 注意到对给定的 C, 方程 (2) 通常定义了 xy–平面上的一条曲线, 但这并不确保这条曲线是一个 x 函数的图像. 尽管这样, 通过允许 (2) 中 C 的变化得到的曲线族还是充分刻画了 (1) 或 (3) 的解的集合.

例 1 某种群在时刻 t 时物种数为 $P(t)$, 它的增长率与它的数量成正比 (即 $P'(t) = aP(t)$, $a > 0$ 为某常数). 求用初始物种数 $P(0)$和 a 来表示 $P(t)$.

解 方程 $P'(t) = aP(t)$ 是可分离的, 因它可写成

$$\frac{dP}{P} = adt.$$

积分得 (假设 $P>0$),$\ln(P)=at+C$或 $P(t)=\exp(at+C)=e^{C}e^{at}$. 因 $P(0)=e^{C}$, 则要求的解为

$$P(t)=P(0)e^{at}.$$

注意, 对给定的函数 $a(t)$ 和 $f(P)$, 这样的方法在更一般的情形 $P'(t)=a(t)f(P(t))$ 中仍能适用, 因这个方程也是可分离的. 然而, 该方法对 $P'(t)=t+P(t)$ 和许多其他非可分离方程不再有效. □

例 2 一粒子由 xy–平面上流体流携带运动. 假设该流体在任意点 (x,y) 的速度是 $2y\mathbf{i}+4x\mathbf{j}$ (即, 流体流速度的大小与方向随点而变化). 求粒子过点 $(1,3)$ 的轨迹.

解 粒子轨迹在点 (x,y) 的斜率为在点 (x,y) 处流体速度向量的分量之比 $4x/2y$(假设 $y\neq 0$). 假设轨线是 x 的函数 y 的图像, 则有常微 $y'(x)=4x/2y$, 它是可分离的 $(2ydy=4xdx)$. 经积分, 得流线族 (参看图 1)

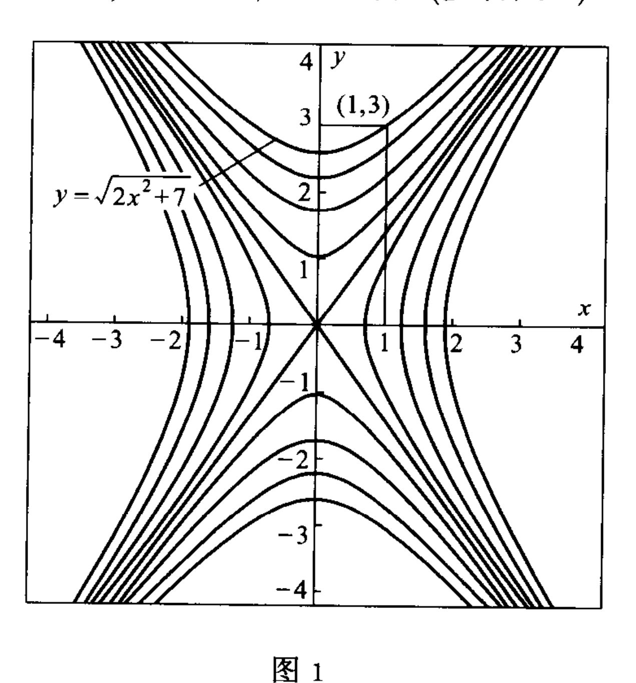


图 1

$$y^{2}=2x^{2}+C,\tag{4}$$

这是双曲线. 过 $(1,3)$ 的流线是 (4) 中 $C=3^{2}-2(1)^{2}=7$ 所确定的双曲线的上支, 即 $y(x)=\sqrt{2x^{2}+7}$. □

另一类一阶常微是一阶线性常微

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x),\tag{5}$$

其中 $a(x), b(x)$ 和 $c(x)$ 是给定的连续函数. 假设 $a(x) \neq 0$, 以 $a(x)$ 除 (5) 式, 得下面意义下标准形式的常微.

称如下一阶线性常微是**标准形式的**

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \tag{6}$$

若用 0 来取代 $q(x)$, 所得的方程

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{7}$$

称为与 (6)**相应的齐次方程**. 与 (6) 不同,(7) 总是可分离的:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \ (y \neq 0). \tag{8}$$

于是, 积分 (8), 得 (7) 的通解 $y_h(x)$ 如下:

$$y_h(x) = C\exp[-P(x)], \text{ 其中 } P(x) \equiv \int p(x)dx. \tag{9}$$

方程 (6) 的**积分因子**定义为

$$m(x) \equiv \exp[P(x)] = \exp(\int p(x)dx). \tag{10}$$

注意由 (9) 得 $m(x)y_h(x) = C$. 于是

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}(m(x)y_h(x)) = m(x)y_h'(x) + m'(x)y_h(x) \\ &= m(x)y_h'(x) + m(x)p(x)y_h(x) = m(x)(y_h'(x) + p(x)y_h(x)), \end{aligned} \tag{11}$$

其中用了 $m'(x) = \exp[P(x)]P'(x) = m(x)p(x)$ 这个事实. 对 $q(x) \not\equiv 0$ 时 (6) 的解 $y(x)$, $m(x)y(x) = C$ 不成立, 但由 (11) 中的计算可得

$$\frac{d}{dx}(m(x)y(x)) = m(x)(y'(x) + p(x)y(x)) = m(x)q(x). \tag{12}$$

积分 (12) 得, $m(x)y(x) = \int m(x)q(x)dx + C$ 或

$$y(x) = \frac{1}{m(x)}(\int m(x)q(x)dx + C). \tag{13}$$

注意到当 $q(x) \equiv 0$ 时 (13) 式就化为 (9) 式. 虽然简单地利用公式 (13) 就能写出 (6) 的解, 但记住求解的步骤是更可取的.(这些步骤将在本节的末尾概述.)

例 3 求解 $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2$.

解 首先, 把方程化成标准形式 (6), 即

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{3x^2}{1+x^2}. \tag{14}$$

方程 (14) 的积分因子 (参看 (10)) 为

$$m(x) = \exp(\int \frac{2x}{1+x^2}dx) = \exp[\ln(1+x^2)] = 1+x^2.$$

方程 (12) 表明如用 $m(x)$ 乘 (14) 的两边, 则得

$$\frac{d}{dx}(m(x)y(x)) = m(x)q(x) = 3x^2. \tag{15}$$

积分 (15) 两边, 得 $m(x)y(x) = x^3 + C$ 或 $y(x) = \dfrac{x^3+C}{1+x^2}$. □

例 4 考虑两个完全相同的罐头 A 和 B. 由于泄漏, 假设果汁以与果汁在罐头中的容积成比例的速率从每个罐头流出, 比方说 $V'(t) = -kV(t)$, 其中 $k > 0$. 假设在罐头 A 内果汁的初始容积为 $V_A(0)$, 而罐头 B 内开始是空的. 如在 $t = 0$ 时罐头 A 开始泄漏到罐头 B, 求在任意时刻 $t > 0$ 时罐头 B 内果汁的容积 $V_B(t)$.

解 $V_B(t)$ 的变化率为

$$V'_B(t) = -kV_B(t) - V'_A(t). \tag{16}$$

因 $V'_A(t) = -kV_A(t)$, 如同例 1, 可得 $V_A(t) = V_A(0)e^{-kt}$. 于是, 由 (16)

$$V'_B(t) + kV_B(t) = kV_A(0)e^{-kt}.$$

乘积分因子 e^{kt}, 得 (根据 (12))

$$\frac{d}{dx}(e^{kt}V_B(t)) = kV_A(0) \quad 或 \quad V_B(t) = e^{-kt}(ktV_A(0)+C).$$

由 $V_B(0) = 0$, 得 $C = 0$. 于是,$V_B(t) = ktV_A(0)e^{-kt}$. □

例 5 假设容器 A 盛有每 100 加仑含有 4 磅盐的盐水. 容器 B 开始有 100 加仑的水. 在 1 小时时间内, 容器 B 中的水以 3 加仑每分钟的速率排出. 同时, 容器 A 中的盐水以 5 加仑每分钟的速率流入容器 B. 到 1 小时末有多少盐被溶解在容器 B 里? 假设容器 B 始终融合得很好而且不会溢出.

解　令 $S(t)$ 表示在时刻 t 时容器 B 内盐的磅数. 在时刻 t, 容器 B(经抽排) 以 3 加仑每分钟乘容器 B 中每加仑含盐的数量的速率, 即 $\frac{3S(t)}{100+(5-3)t}$ lbs/min 失去盐. 容器 B 从容器 A 处获得盐的速率为 5 乘 $\frac{4}{100}$ lbs/min. 于是, 容器 B 盐的净增加率为 $S'(t) = \frac{-3S(t)}{100+2t} + \frac{1}{5}$. 因此,

$$S'(t) + \frac{3S(t)}{100+2t} = \frac{1}{5}. \tag{17}$$

积分因子为 $m(t) = \exp[\frac{3}{2}\ln(100+2t)] = (100+2t)^{\frac{3}{2}}$.(17) 两边乘该积分因子, 得

$$\frac{d}{dx}(m(t)S(t)) = \frac{1}{5}(100+2t)^{\frac{3}{2}} \text{ 和 } S(t) = (100+2t)^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{25}(100+2t)^{\frac{5}{2}} + C).$$

由 $S(0) = 0$, 得 $C = -\frac{1}{25}\cdot 10^5$ 和 $S(t) = \frac{1}{25}(100+2t)^{-\frac{3}{2}}((100+2t)^{\frac{5}{2}} - 10^5)$. 最后, $S(60) \approx 7.574$ lbs. □

二阶常系数线性常微

需要充分理解二阶齐次线性方程

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{18}$$

其中系数 a, b 和 c 是实常数. 如 $a = 0$, 则 (18) 式或是一阶线性常微, 或是 (如还有 $b = 0$) 平凡的. 于是, 假设 $a \neq 0$. 求解 (18) 的通常方法是先假设具有 $y(x) = e^{rx}$ 形式的解, r 为某个常数. 将这样的 $y(x)$ 代入 (18), 得

$$ae^{rx}r^2 + be^{rx}r + ce^{rx} = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

因此, r 必满足二次方程 $ar^2+br+c=0$, 称其为 (18) 的**辅助方程**. 令 $d = b^2-4ac$. 有三种情形:$d>0, d=0$ 和$d<0$.

如 $d > 0$, 则有两不同实根, 即

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \text{ 和 } r_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}.$$

这时,(18) 的通解为如下的叠加 (或线性组合)

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}, \tag{19}$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数. 回忆一下齐次线性方程两个解的叠加仍然是解 (参看习题 8 [①]). 再者, 如方程是二阶的且两个特解之比不为常数 (即, 这两个解是线性无关的), 则任意解是这两个解的叠加 (参看习题 20).

如 $d=0$, 则 $ar^2+br+c=0$ 只有一个解, 即 $r=-\frac{b}{2a}$, 为二重根. 然而, 回想一下, 除了 e^{rx},(18) 必还有另一个线性无关的解. 经试求 $f(x)e^{rx}$ 形式的解, 得 $f''(x)=0$(参看习题 9). 于是取 $f(x)=x$, 得另一线性无关的解 xe^{rx}. 这样, 当 $d=0$ 时,(18) 的通解为

$$y(x)=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}, \tag{20}$$

其中 $r=-\frac{b}{2a}$.

如 $d<0$, 则 $ar^2+br+c=0$ 的根为复数, 即

$$r_1=\frac{-b+i\sqrt{|d|}}{2a} \text{ 和 } r_2=\frac{-b-i\sqrt{|d|}}{2a}, \tag{21}$$

其中 i 具有性质 $i^2=-1$.(因此, i 不可能为实数.) 现记

$$r_1=\alpha+i\beta \text{ 和 } r_2=\alpha-i\beta, \tag{22}$$

其中 α 和 β 为实数. 则可证

$$y(x)=c_3e^{(\alpha+i\beta)x}+c_4e^{(\alpha-i\beta)x}, \tag{23}$$

满足 (18), 其中 c_3 和 c_4 为任意常数. 为了构造解 (23) 的更有用的形式 (细节可参看习题 11) 要用到 **Euler公式**

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \tag{24}$$

[Leonhard Euler(1707—1783), 生于瑞士的数学家和物理学家, 在数学和天体力学的很多领域作出了重要贡献. 数 e 就是以他命名的.]Euler 公式可通过在复指数 e^z 的幂级数展开中取 $z=iy$ 获得:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots. \tag{25}$$

[①] 原文误为习题 7.——译者

现利用关系式 $e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}$ 和 Euler 公式, 可把 (23) 展成下面形式

$$y(x)=e^{\alpha x}[c_3(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_4(\cos\beta x-i\sin\beta x)]. \tag{26}$$

置 $c_1=c_3+c_4$ 和 $c_2=i(c_3-c_4)$, (26) 变为

$$y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x). \tag{27}$$

最后, 当 $d<0$ 时, 用 (22) 和 (21) 的记号, 由 (27) 得到 (18) 的通解如下:

$$y(x)=e^{-\frac{b}{2a}x}(c_1\cos(\frac{\sqrt{|d|}}{2a}x)+c_2\sin(\frac{\sqrt{|d|}}{2a}x)). \tag{28}$$

上述结果可概括如下:

考虑常微

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0, \tag{29}$$

其中 a,b 和 c 为实常数且 $a\neq 0$. 令 r_1 和 r_2 是相应的辅助方程 $ar^2+br+c=0$ 的根.记 $d=b^2-4ac$, 并令 c_1,c_2 表示任意常数.

1. 若 r_1 和 r_2 是实数且不相同(即 $d>0$), 则 (29) 的通解为

$$y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}. \tag{30}$$

2. 若 $r_1=r_2=r$(即 $d=0$), 则 (29) 的通解为

$$y(x)=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}. \tag{31}$$

3. 若 $r_1=\alpha+i\beta$ 和 $r_2=\alpha-i\beta$ (即 $d<0$), 则 (29) 的通解为

$$y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x). \tag{32}$$

例 6　一个质量为 m 的物体连接在位于 x–轴的一弹簧上, 如图 2 所示. 根据 **Hooke定律**, 当此物体移动到位置 x 时, 弹簧就向物体施与力 $-kx$ (指向原点, 因常数 k 是正的). 令 $x(t)$ 表示物体在时刻 t 时的位置. 物体还受到一种力, 比方说空气阻力, 为 $-bx'(t)$, $b>0$ 为常数. 如物体在时刻 $t=0$ 时在位

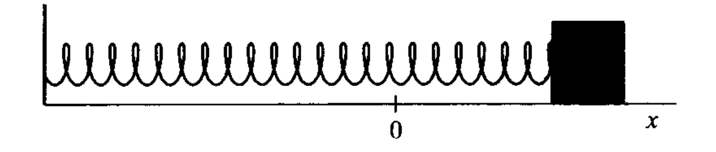


图 2

置 x_0 处被释放, 利用 **Newton 运动第二定律** $mx''(t) = F(t)$ 求物体在任意时刻 $t > 0$ 的位置, 其中 $F(t)$ 是在时刻 t 物体所受的合力.[英国科学家 Robert Hooke(1635—1703) 和数学家、物理学家 Issac Newton(1642—1727) 经常意见不和, 尤其是在万有引力平方反比律的荣誉分享问题上.]

解 因为施与物体上的合力为 $F(t) = -kx(t) - bx'(t)$, 由 Newton 第二定律得常微

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0, \tag{33}$$

其中 $d = b^2 - 4mk$. 所有三种情形 $d > 0$, $d = 0$ 和 $d < 0$ 都有可能. 它们分别称为**强阻尼的、临界阻尼的和弱阻尼的 (或振荡的)**. 这三种情形的解分别为

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}(c_1 e^{\frac{\sqrt{d}}{2m}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{d}}{2m}t}) \qquad (d > 0), \tag{34}$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}(c_1 + c_2 t) \qquad (d = 0), \tag{35}$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{|d|}}{2m}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{|d|}}{2m}t)) \quad (d < 0). \tag{36}$$

其中常数 c_1 和 c_2 由给定的初始条件 $x(0) = x_0$ 和 $x'(0) = 0$ 求得. 在 (34) 情形中, 由

$$x(0) = c_1 + c_2 = x_0 \quad 和 \quad x'(0) = \frac{1}{2m}((\sqrt{d} - b)c_1 - (\sqrt{d} + b)c_2) = 0$$

得到 $c_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{b}{\sqrt{d}})x_0$ 和 $c_2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{b}{\sqrt{d}})x_0$. 于是, (34) 成为

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\Big(\frac{1}{2}(e^{\frac{\sqrt{d}}{2m}t} + e^{-\frac{\sqrt{d}}{2m}t}) + \frac{b}{\sqrt{d}}\frac{1}{2}(e^{\frac{\sqrt{d}}{2m}t} - e^{-\frac{\sqrt{d}}{2m}t})\Big) \\ &= x_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\Big(\cosh(\frac{\sqrt{d}}{2m}t) + \frac{b}{\sqrt{d}}\sinh(\frac{\sqrt{d}}{2m}t)\Big). \end{aligned} \tag{37}$$

当赋予初始条件时, 常容易出现双曲正弦和双曲余弦. 它们定义为 $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 和 $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. 对不熟悉这些函数以及它们跟通常的

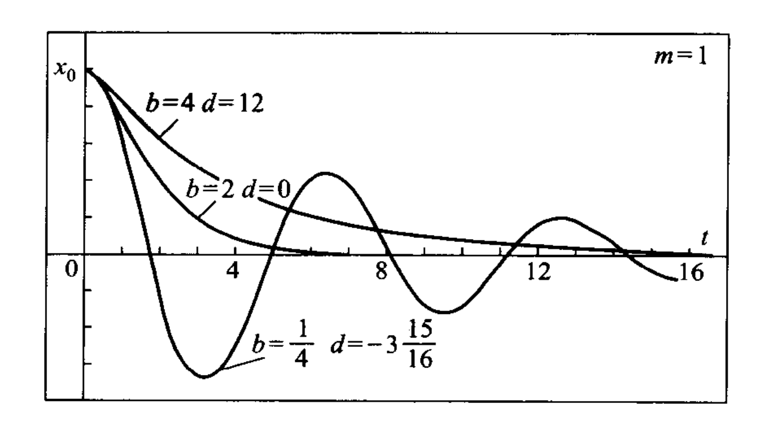


图 3

正弦和余弦关系的读者, 如有兴趣可参看习题 18. 对 b, m 和 k 确定的值, 这些解由图 3 中的曲线图表示. □

例 7 方程 (18) 也出现在电路理论中. 假设一电动势为 V 的电池, 一电阻为 R 的电阻器, 一感应系数为 L 的感应线圈和一电容为 C 的电容器按图 4 串联. 欲求在这个电路中作为时间函数的电流强度 $i(t)$ 最一般的表达式.[电路中的电流强度服从 Gustav Kirchhoff(1824—1887, 德国物理学家) 第二定律, 他因在电子学和光谱学方面的贡献而著名.]

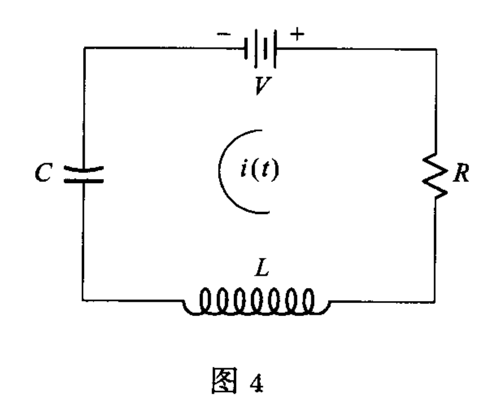


图 4

解 **Kirchhoff 第二定律**表明在任一闭合电路中各元器件上的电位差之和必为零. 在时刻 t, 电阻器上的电位差等于 R 乘电流强度 $i(t)$. 感应线圈上的电位差为 $Li'(t)$.(这个电位差是因为线圈中的电流强度增加产生了变化的电磁场, 由此导致相反的电场并在线圈中产生电位差.) 电容器上的电位差为 $1/C$ 乘聚集在一个板上的总电量 $\int i(t)dt$. 由 Kirchhoff 第二定律,

$$Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt - V = 0, \tag{38}$$

经微分, 得

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0. \tag{39}$$

这里, 电流强度的行为就像例 6 中连接在弹簧上的物体的迁移, 且 $m = L$, $b = R$ 以及 $k = 1/C$. 特别, 用这些新的数值, 公式 (34), (35) 和 (36) 就给出了三种情形 $i(t)$ 的通解. □

我们将不论及非齐次方程的一般情形

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t). \tag{40}$$

在例 6 中当有外部作用力 $f(t)$ 时, 或在例 7 中当电动势源是可变时 $[f(t) = V'(t)]$ 就会出现这种情形. 我们可通过特解加上用 0 替换 $f(t)$ 所得的相应的齐次方程的通解来解 (40). 对于特解可用在多数常微书中能找到的参数变易法求得. 然而, 作为共振及使用复数方法的举例, 下面将求 (40) 中当 $f(t)$ 具有形式 $A\cos(\omega t)$ 或 $A\sin(\omega t)$, 有常振幅 A 和角频率 ω, 这种重要情形时的特解.

例 8 当 $f(t) = A\cos(\omega t)$ 或 $f(t) = A\sin(\omega t)$, ω 为一实常数且 $abc \neq 0$ 时, 用下述方法求 (40) 的特解. 确定复常数 C, 使得 $y(t) = Ce^{i\omega t}$ 满足 $f(t) = Ae^{i\omega t}$ 的 (40). 然后证明 $y(t)$ 的实部和虚部就是所要求的特解.

解 把试验解 $y(t) = Ce^{i\omega t}$ 代入 $f(t) = Ae^{i\omega t}$ 的 (40), 得

$$Ce^{i\omega t}[a(i\omega)^2 + bi\omega + c] = Ae^{i\omega t} \quad \text{或} \quad C[(c - a\omega^2) + ib\omega] = A. \tag{41}$$

利用恒等式 $(r + is)(r - is) = r^2 + s^2$, 可得

$$(r + is)^{-1} = \frac{r - is}{r^2 + s^2}. \tag{42}$$

于是, 用 $[(c - a\omega^2) + ib\omega]^{-1}$ 乘 (41), 得

$$C = \frac{A[(c - a\omega^2) - ib\omega]}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \tag{43}$$

和

$$\begin{aligned}
y(t) &= Ce^{i\omega t} = C(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \\
&= \frac{A[(c - a\omega^2)\cos(\omega t) + b\omega\sin(\omega t)]}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} + i\frac{A[(c - a\omega^2)\sin(\omega t) - b\omega\cos(\omega t)]}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \\
&= y_R(t) + iy_I(t),
\end{aligned}$$

最后的等式定义了 $f(t) = Ae^{i\omega t} = A\cos(\omega t) + iA\sin(\omega t)$ 的 (40) 的解 $y(t)$ 的实部和虚部. 因

$$ay'' + by' + cy = (ay_R'' + by_R' + cy_R) + i(ay_I'' + by_I' + cy_I), \tag{44}$$

可得 $y_R(t)$ 是 $f(t) = A\cos(\omega t)$ 的 (40) 的解, 而 $y_I(t)$ 是 $f(t) = A\sin(\omega t)$ 的 (40) 的解. 如频率 ω 允许变化, 则取 ω 使得 $h(\omega) = (c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2$ 为极小时, y_R 和 y_I 的振幅, 即 $A[(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}}$ 为最大 (参看图 5).

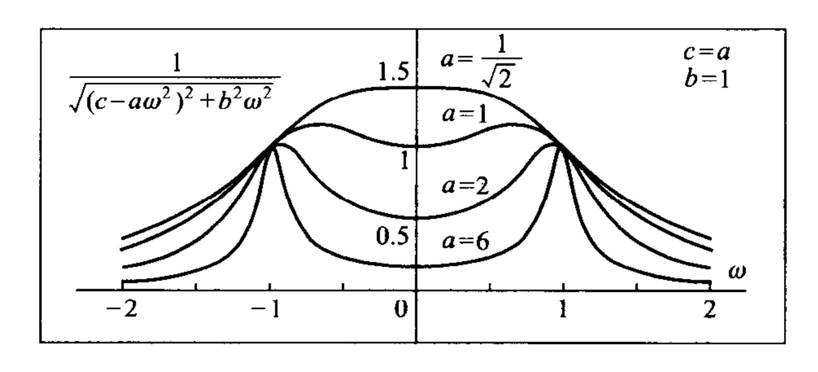


图 5

令 $h'(\omega) = 0$, 求得共振频率 ω_R 为

$$\omega_R = \pm\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{1}{2}(\frac{b}{a})^2}, \tag{45}$$

只有当 $2ac - b^2 < 0$ 时, 才会在 $\omega_R = 0$ 产生最大振幅. 注意到如 $b^2 - 4ac < 0$, 则 $|\omega_R|$ 小于出现在 (32) 中的自然频率 $\nu = |\frac{\sqrt{|d|}}{2a}| = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{1}{4}(\frac{b}{a})^2}$. 又

$$(\frac{\omega_R}{\nu})^2 = \frac{1 - \frac{b^2}{2ac}}{1 - \frac{b^2}{4ac}},$$

这表明当 $(b^2/ac) \to 0$ 时 $|\omega_R|/\nu \to 1$. 在上述论证中, 我们假设 A 不依赖于 ω. 在电子学的应用方面, A 通常与 ω 成比例, 这时 (45) 就不适用. 作为例子可见习题 13. □

特殊的常微方程组

有时会遇到如下形式的线性常微方程组

$$x'(t) = ax(t) + by(t) \tag{46a}$$

$$y'(t) = cx(t) + dy(t), \tag{46b}$$

其中 a,b,c 和 d 为给定的实常数而 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为未知函数. 对给定的初始条件 $x(0)$ 和 $y(0)$, 要求满足方程组 (46a) (46b) 的 $x(t)$ 和 $y(t)$. 若 $b=0$, 从一阶常微 (46a) 可解得 $x(t)$. 然后把该解 $x(t)$ 代入 (46b), 并从所得的一阶常微解得 $y(t)$. 若 $b \neq 0$, 对 (46a) 两边求导并利用 (46b) 如下:

$$\begin{aligned} x''(t) &= ax'(t) + by'(t) = ax'(t) + b(cx(t) + dy(t)) \\ &= ax'(t) + bcx(t) + d(x'(t) - ax(t)), \end{aligned}$$

在最后的等式中利用了 (46a). 因此, $x(t)$ 必满足

$$x''(t) - (a+d)x'(t) + (ad-bc)x(t) = 0. \tag{47}$$

利用初值 $x(0)$ 和 $x'(0) = ax(0) + by(0)$, 从这个熟悉的二阶常微可解得 $x(t)$. 不必再从 (46b) 去解 $y(t)$, 因由 (46a)

$$y(t) = \frac{1}{b}(x'(t) - ax(t)). \tag{48}$$

上述思想足够用来求解后面将出现的某种其他类型的常微方程组, 而且不需要用到微分算子和矩阵方法.

例 9 例 2 中, 给定 $x(0)=1$ 和 $y(0)=3$, 计算在任意时刻 t 时粒子的位置 $(x(t), y(t))$.

解 在时刻 t 时速度向量为 $x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$. 于是, 有方程组

$$x'(t) = 2y(t), \tag{49a}$$

$$y'(t) = 4x(t). \tag{49b}$$

如上, 对 (49a) 求导然后利用 (49b), 得

$$x''(t) = 2y'(t) = 8x(t) \quad 或 \quad x''(t) - 8x(t) = 0.$$

由 $r^2 - 8 = 0$, 得 $r = \pm 2\sqrt{2}$, 以及通解

$$x(t) = c_1 e^{2\sqrt{2}t} + c_2 e^{-2\sqrt{2}t}.$$

由初始条件 $x(0)=1$ 和 $x'(0) = 2y(0) = 6$, 得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2\sqrt{2}c_1 - 2\sqrt{2}c_2 = 6 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\sqrt{2} \\ c_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}. \end{cases}$$

利用 (49a),

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) = \sqrt{2}(c_1 e^{2\sqrt{2}t} - c - 2e^{-2\sqrt{2}}).$$

随着 t 的变化, 点 $(x(t), y(t))$ 就描绘出双曲线 $y^2 - 2x^2 = 7$ 的一支 (参看例 2 中 $C = 7$ 的 (4)), 因可以验证 $[y(t)]^2 - 2[x(t)]^2 = 7$. 曲线的参数表示 $(x(t), y(t))$ 比 $y^2 - 2x^2 = 7$ 提供了更多的信息, 这是因为 $(x(t), y(t))$ 给出了粒子在时刻 t 时的位置. □

例 10 某种动物的体重 $w(t)$ 以变化率 $w'(t) = Cs(t) - K$ 增加, 其中 $s(t)$ 是动物食物供应的数量而 K, C 为常数. 假设 $s(0)$ 和 $w(0)$ 为正. 如 $s(t)$ 变为 0, 则以后就一直为 0. 如 $w(t)$ 降为 0, 则动物就得饿死. 动物越重就吃得越多, 食物供应的变化率除去动物本身的因素通常跟 $s(t)$ 成正比. 于是, 当食物供应持续时, $s'(t) = As(t) - Bw(t)$, A, $B > 0$ 为常数. 证明若 $A^2 < 4BC$, 则动物最终将饿死 (在经过了一些限食 - 暴饮循环之后), 除非 $w(0) = \frac{AK}{BC}$ 和 $s(0) = \frac{K}{C}$, 在这种情形下 $w(t)$ 和 $s(t)$ 为常值. ($A^2 > 4BC$ 的情形在习题 19 中讨论.)

解 有方程组

$$s'(t) = As(t) - Bw(t), \tag{50a}$$

$$w'(t) = Cs(t) - K. \tag{50b}$$

对第一式求导然后利用第二式, 得

$$s''(t) - As'(t) + BCs(t) = BK. \tag{51}$$

(51) 的通解是常数特解 $\frac{K}{C}$ 加下面相应的齐次方程的通解

$$s''(t) - As'(t) + BCs(t) = 0. \tag{52}$$

方程 (52) 具有 (18) 形式, 这时 $a = 1$, $b = -A$ 和 $c = BC$. 因此, $d = b^2 - 4ac = A^2 - 4BC$. 若 $A^2 < 4BC$, 则 $d < 0$ 且 (51) 的通解为

$$s(t) = \frac{K}{C} + e^{\frac{1}{2}At}(c_1\cos(\frac{1}{2}\sqrt{|d|}t) + c_2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{|d|}t)). \tag{53}$$

括号内的函数可写成 $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{|d|}t + \theta)$, θ 为某常数 (参看习题 10). 于

是, 如 c_1 和 c_2 不全为零, 伴随着动物限食和放任狂吃, 解将以变化的振幅 $\sqrt{c_1^2+c_2^2}e^{\frac{1}{2}At}$ 在 $\frac{K}{C}$ 附近振荡. 最终振幅将大于 $\frac{F}{C}$(只要 $w(t)$ 保持为正的), 并在下一个循环过程中 $s(t)$ 必在某时刻, 比方说 t_0降为 0. 于是, 如动物在时刻 t_0 时仍然活着, 则在 t_0 之后, $w'(t)=-K$, 且 $w(t)$ 稳定地下降到零. 如 c_1 和 c_2 全为零, 则 $s(t)=\frac{K}{C}$, 并由 (50a) 得 $w(t)=\frac{AK}{BC}$. 图 6 表明尽管 $s(t)$ 是正的但 $w(t)$ 仍可能降为零. □

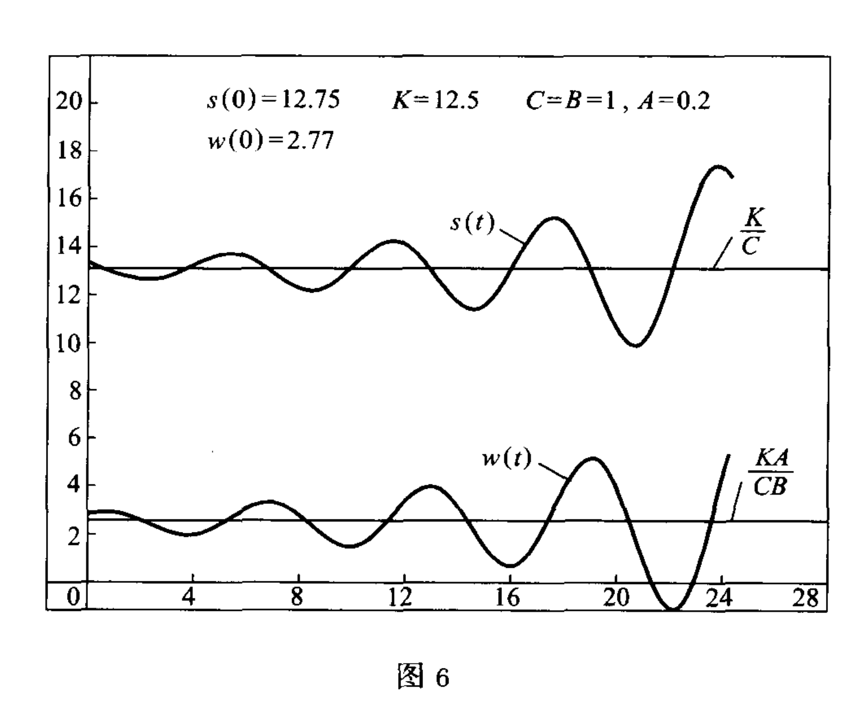


图 6

概要 1.1

1. 一阶可分离常微. 为了解一阶可分离常微 $f(y)\frac{dy}{dx}=g(x)$, 把它写成 $f(y)dy=g(x)dx$ 形式, 然后积分:

$$\int f(y)dy=\int g(x)dx+C.$$

2. 一阶线性常微. 标准形的一阶线性常微

$$y'(x)+p(x)y(x)=q(x) \tag{S1}$$

的通解可由如下方法求得:

(a) 用积分因子 $m(x) = \exp(\int p(x)dx)$ 乘 S1 两边然后验证

$$\frac{d}{dx}(m(x)y(x)) = m(x)q(x). \tag{S2}$$

(b) 积分 (S2) 两边得 $m(x)y(x) = \int m(x)q(x)dx + C$, 其中 C 为任意常数.

(c) 则 (S1) 的通解是

$$y(x) = \frac{1}{m(x)}(\int m(x)q(x)dx + C).$$

3. 二阶齐次线性常微. 为了确定二阶齐次线性常微的通解

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{S3}$$

其中 a, b 和 c 为实常数且 $a \neq 0$, 先求相应的辅助方程 $ar^2 + br + c = 0$ 的根 r_1 和 r_2. 令 c_1 和 c_2 表示任意常数, $y(x)$ 表示 (S3) 的通解.

(i) 若 r_1 和 r_2 为实数且不相同, 则 $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$.

(ii) 若 $r_1 = r_2 = r$, 则 $y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$.

(iii) 若 $r_1 = \alpha + i\beta$ 和 $r_2 = \alpha - i\beta$, 则 $y(x) = e^{\alpha x}[c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)]$.

4. 线性方程组. 对给定的初值 $x(0)$ 和 $y(0)$, 为了解线性常微方程组

$$x'(t) = ax'(t) + by(t) \tag{S4}$$

$$y'(t) = cx(t) + dy(t), \tag{S5}$$

其中 a, b, c 和 d 为实常数, 初值为 $x(0)$ 和 $y(0)$, 考虑如下情形:

情形 1. 若 $b = 0$, 由 (S4) 解得 $x(t)$ 再把该解代入 (S5). 然后由所得的常微解出 $y(t)$.

情形 2. 若 $b \neq 0$, (S4) 两边关于 t 求导, 然后利用 (S5), 得

$$x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

利用初值 $x(0)$ 和 $x'(0) = ax(0) + by(0)$, 先由上面的二阶常微解得 $x(t)$, 然后利用 (S4) 置 $y(t) = \frac{1}{b}(x'(t) - ax(t))$.

练习 1.1

1. 求下面可分离方程的通解:

(a) $\frac{dy}{dx} = xy$, (b) $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$,

(c) $\frac{dy}{dx} = x^2y^2 + x^2 - y^2 - 1$, (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$,

(e) $\frac{dx}{dt} + x^2 \sin t = 0$, (f) $\frac{dy}{dx} - \frac{x+e^{-x}}{y+e^y} = 0$,

(g) $\frac{dx}{dt} = te^{x+t}$, (h) $x\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$,

(i) $T'(t) + 3T(t) = 0$.

2. 一放射性物质以与该物质现存的量成比例的衰减率衰减. 若 10 年之后物质还残留 64%, 问 15 年之后还剩百分之几?

3. **Torricelli 定律**表明 (在理想情况下) 流体以跟液面高度的平方根成正比的速度从容器底部的孔流出. 假设一圆柱形容器最初灌有一英尺深的流体. 若四分之三的流体流出需要一分钟, 那全部流光需要多少时间?[意大利人 Evangelista Torricelli (1608—1647) 继 Galileo 之后任 Florentine 研究院数学教授, 他遵循 Galileo 的一个建议发明了水银温度计.]

4. 求解下面满足给定条件的一阶线性方程:

(a) $y'(x) + 2y(x) = e^x,\ y(0) = 1$;

(b) $x'(t) - \frac{2}{t}x(t) = 1,\ x(1) = 0$;

(c) $\sin(x)y'(x) - \cos(x)y(x) = \sin(2x),\ y(\frac{\pi}{2}) = 0$;

(d) $x'(t) + \frac{x(t)}{t} = t^2,\ x(0) = 0$;

(e) $3\frac{dy}{dx} + 6xy = 6e^{-x^2},\ y(0) = 1$;

(f) $\frac{dy}{dx} = 3y + e^{2x},\ y(0) = 0$;

(g) $x'(t) + x(t)\cos t = 0,\ x(\pi) = 100$;

(h) $\frac{dy}{dx} + (1 + 2x + 3x^2)y = e^{-x-x^2-x^3},\ y(0) = 3$;

(i) $\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{2t+100} = 0,\ x(-49.5) = 1$.

5. 细菌的总数 P 以跟它的数量成正比的速度 (比方说 $b \cdot P,\ b > 0$)增加, 但又以持续增加的速度 (比如 $c \cdot t,\ c > 0$) 被一些霉菌所杀, 这些霉菌在 $t = 0$ 时开始生长. 在什么情况下霉菌将彻底吞噬细菌?

提示 用 b, c, $P(0)$ 和 t 来表示 $P'(t) = bP(t) - ct$ 的解. 在什么条件下 (关于 $P(0)$, b 和 c) $P(t)$ 将在某个时刻 $t > 0$ 降为零?

6. 求下面二阶齐次线性常微的通解 $y(x)$.

(a) $y''=0$,　(b) $y''-3y=0$,　(c) $y''+3y=0$,
(d) $y''+y'=0$,　(e) $y''-3y'=0$,　(f) $4y''+3y'+5y=0$,
(g) $2y''+5y'+2y=0$,　(h) $y''-6y'+13y=0$,　(i) $y''-4y'+4y=0$,
(j) $y''+10y'+25y=0$.

7. 求下面满足给定初始条件的二阶齐次线性常微的特解 $y(x)$.

(a) $y''-5y'+6y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=2;$
(b) $y''-4y'+4y=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=1;$
(c) $y''+y=0;\ y(0)=a,\ y'(0)=b;$
(d) $y''-y=0;\ y(0)=a,\ y'(0)=b;$
(e) $5y''+8y'+5y=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=1;$
(f) $5y''+8y'+5y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

8. (a) 证明如 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次线性常微 $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$ 的解, 则叠加 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 也是解.

(b) 如 $a(x)$, $b(x)$ 和 $c(x)$ 是连续的且 $a(x)$ 不为零, 则对给定的 $y(x_0)$ 和 $y'(x_0)$ 的值 (a) 中的常微具有唯一解（参看 [Simmons, 第 57 节]）. 在此假设下, 证明上述常微没有这样的解, 它的曲线图在某点与 $x-$ 轴相切, 除非该解恒为零.

9. (a) 如 $ar^2+br+c=0$ 只有一个根 (重数为 2) $r=-\frac{b}{2a}$, 证明 $f(x)e^{rx}$ 是 $ay''+by'+cy=0$ 的解的充要条件为 $f''(x)=0$.

(b) 对不同的数 r_1 和 r_2 注意到

$$\lim_{r_2\to r_1}\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1}=xe^{r_1x}.$$

这个结果跟 (a) 的结果有怎样的联系?

10. (a) 证明任意复数 $z=x+iy$ 都能写成“极形式” $re^{i\theta}$, 其中 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 θ 是笛卡儿平面上的点 (x,y) 的极坐标.

(b) 对于实数 x, y 和 ω, 注意到 $x\cos(\omega t)+y\sin(\omega t)$ 是乘积 $(x+iy)(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t))=re^{i\theta}e^{-i\omega t}$ 的实部. 由此证明

$$x\cos(\omega t)+y\sin(\omega t)=r\cos(\omega t-\theta)=r\sin(\omega t-\theta+\pi/2).$$

11. (a) 通过在公式 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $z=x+iy$ 中取 $x=0$, 并利用 $\cos y$ 和 $\sin y$ 级数展开式, 验证 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$.

(b) 如 $r_1=\alpha+i\beta$ 和 $r_2=\alpha-i\beta$, 验证

$$\frac{1}{2}(e^{r_1x}+e^{r_2x})=e^{\alpha x}\cos\beta x\ 和\ -\frac{1}{2}i(e^{r_1x}-e^{r_2x})=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

(c) 利用定义 $\frac{d}{dx}(f(x)+ig(x))=f'(x)+ig'(x)$ 以及公式

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))$$

证明 $\frac{d}{dx}e^{rx}=re^{rx}$, 其中 $r=\alpha+i\beta$.

(d) 利用 (c) 来验证 (23)(也可见 (21) 和 (22)) 定义的函数 $y(x)$ 满足微分方程 (18).

12. 求 (35) 和 (36) 中的常数 c_1 和 c_2 使得 $x(0)=x_0$ 和 $x'(0)=0$.

13. 假设在例 7 中 ($LRC\neq 0$) 电动势源是可变的, 比方说 $V(t)=\sin(\omega t)$. 对大的 t, ω 取何值时 $i(t)$ 的振幅最大?

提示 当 $V(t)$ 可变时,(39) 的右边用 $V'(t)$ 代替. 证明相应的齐次方程的任意解当 $\to\infty$ 时都趋于 0(这样的解称为**易逝的**). 应用例 8 求出一个非易逝的特解, 这时 $f(t)=V'(t)=\omega\cos(\omega t)$, 并注意 A 为 ω.

注记 如有复常数 V_0 和 I_0, $V(t)=V_0e^{i\omega t}$ 和 $I(t)=I_0e^{i\omega t}$, 则复数 I_0/V_0 称为**流导**且常记作 $Y(\omega)$, 因它依赖于 ω, 而 $Z(\omega)=[Y(\omega)]^{-1}$ 称为**电阻抗**. 这个问题是确定 "低电阻抗共振"ω_0 使得 $|Z(\omega)|$ 为最小. □

14. 对方程组 (46), 已证 $x(t)$ 必满足 $x''-(a+d)x'+(ad-bc)x=0$. 证明 $y(t)$ 也必满足 $y''-(a+d)y'+(ad-bc)y=0$.

15. 解下面满足给定初值的方程组

$$x'(t)=x(t)+y(t),\qquad x(0)=1,$$
$$y'(t)=-x(t)+y(t),\qquad y(0)=0.$$

在 xy–平面上画出解曲线 $(x(t),y(t))$ 当 t 变化时的草图.

16. 考虑方程组 (46). 如 $(a-d)^2+4bc\neq 0$, 则证明方程组任意复解 $(x(t),y(t))$ 必具形式

$$x(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}\quad \text{和}\ y(t)=d_1e^{r_1t}+d_2e^{r_2t},$$

其中 c_1, c_2, d_1 和 d_2 为复常数, r_1 和 r_2 为 $r^2-(a+d)r+(ad-bc)=0$ 的根 (可能不是实数). 如 $(a-d)^2+4bc=0$ 将会怎样?

提示 参见问题 14.

17. 求解满足下面给定初值的方程组

(a) $x'(t)=3x(t)-4y(t),\quad x(0)=1;$
$\quad y'(t)=x(t)-y(t),\quad y(0)=1.$

(b) $x'(t)=x(t)-4y(t),\quad x(0)=1;$
$\quad y'(t)=x(t)+y(t),\quad y(0)=1.$

(c) $x'(t)=x(t)+2y(t),\quad x(0)=0;$
$\quad y'(t)=3x(t)+4y(t),\quad y(0)=1.$

18. 对任意复数 z, 定义双曲正弦和双曲余弦为

$$\sinh z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})\ \text{和}\ \cosh z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}).$$

(a) 验证 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

(b) 对实变数 x, 证明 $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$ 和 $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$.

(c) 对实变数 y, 验证 $\sinh(iy) = i\sin y$ 和 $\cosh(iy) = \cos y$.

(d) 通过允许 (c) 中的 y 为复数, 对任意复数 z 由此定义 $\sin z$ 和 $\cos z$. 验证 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

19. 有关例 10, 在下面各部分中假设 $A^2 > 4BC$.

(a) 如动物先没饿死, 证明除非动物维持不变体重 $\frac{AK}{BC}$, 动物的体重最终将以指数增长.

(b) 凭直觉解释为什么选择正的初始值 $w(0)$ 和 $s(0)$ 以至动物饿死是可能的.

(c) 给出具体例子来证明 (b) 的断言.

20. 通过完成下列步骤, 证明二阶齐次线性方程 $ay'' + by' + cy = 0$ [其中 a, b 和 c 为常数 $(a \neq 0)$; 可参见步骤 (f) 后的最后的注记] 的通解具有 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 形式, 其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是任意两个线性无关的解 (即, 任一个函数都不是另一个函数乘上一个常数). 这里假设所考虑的函数处处具连续的二阶导数.

(a) 证明两函数 $f(x)$ 和 $g(x)(f(x)/g(x)$ 或 $g(x)/f(x)$ 是可微的) 在某个开区间 I 上线性相关的充要条件为它们的 Wronski 函数 $W[f,g](x)$, 定义为 $f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$, 对所有的 $x \in I$ 为零. [Jozef M. Hoene-Wronski(1778—1853) 生于波兰, 是利己主义数学家和玄学人士. Wronski 后来成为法国公民. 他以如下行列式而著名

$$\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g = W[f,g],$$

他在他的数学 "最高法则" 中用了这个行列式.

(b) 证明如 $y(x)$ 和 $z(x)$ 是 $ay'' + by' + cy = 0$ 任意解, 则 $W[y,z](x)$ 是 $aW'(x) + bW(x) = 0$ 的解. 于是存在依赖于 y 和 z 的常数 C, 有 $W[y,z](x) = C\exp(-bx/a)$.(这称为 **Abel公式**.)

(c) 由 (b) 断言若 $W[y,z](x) = 0$ 在某点成立, 则对所有的 x 有 $W[y,z](x) = 0$.

(d) 在 (b) 和 (c) 中, 令 $z(x) = d_1y_1(x) + d_2y_2(x)$,$d_1$ 和 d_2 为常数. 由问题 8(a) 注意到 $z(x)$ 是 $ay'' + by' + cy = 0$ 的解. 证明

$$W[y, d_1y_1 + d_2y_2](x) = d_1W[y,y_1](x) + d_2W[y,y_2](x).$$

解释为什么必存在常数 d_1 和 d_2(不全为零), 使得对某个 x

$$d_1W[y,y_1](x) + d_2W[y,y_2](x) = 0.$$

(e) 由 (c) 和 (d) 推断存在常数 d_1 和 d_2(不全为零) 使得对所有的 x, $W[y,\ d_1y_1 + d_2y_2](x) = 0$.

(f) 从 (a) 和 (e) 推断在任意 $y(x)$ 不为 0 的区间上, 存在常数 c', c_1 和 c_2, 使得

$$y(x) = c'[d_1y_1(x) = d_2y_2(x)] = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

(我们略去了如下事实的证明：如 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 在一个区间上成立，则处处成立.)

注记 当 a, b 和 c 用连续函数 $a(x), b(x)$ 和 $c(x)$ 来替换时, 若假设 $a(x)$ 不为零, 相同的证明仍可行. 则

$$W[y,z](x)=C\exp(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx).$$

§1.2 偏微概述

令 $u(x,y,z,\cdots)$ 为多个自由实变量 $x,y,z,\cdots$ 的函数.(在下面的注记中, 我们考虑 $(x,y,z,\cdots)$ 限于在某个区域的情形.) 回忆一下 u 关于变量 x 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, 就是把其余变量看作常数, u 关于 x 的通常的导数. 使用下面便利的记号:

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial u}{\partial y},\ u_z=\frac{\partial u}{\partial z},\cdots,$$
$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{yx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\cdots.$$

一个偏导数的阶就与下标的数量相同. 函数 u 称为在点 $p=(x_0,y_0,z_0,\cdots)$**连续的**, 若通过允许变量 $x,y,z,\cdots$ 分别只在 $x_0,y_0,z_0,\cdots$ 的充分小的开区间内 (同时地) 变化, 可使函数值任意地接近 $u(p)$. 如函数 u 在所有的点 p 连续, 则称该函数为**连续的**.

> 对非负整数 k, 函数 u 称为是 C^k **函数**, 若 u 的每个 k 阶偏导数存在且连续.

一个函数称为是一个 C^0 函数当且仅当它是连续的. 记号 "$u\in C^k$" 表示 u 是由 C^k 函数组成的集合中的元素. 对 $k>0$, 一个平常的事实是 $u\in C^k$ 隐含 $u\in C^{k-1}$. 对 C^2 函数 u, 回忆起 $u_{xy}=u_{yx}$. 更一般地, 一个 C^k 函数的 k 阶或少于 k 阶的偏导数的次序是无关紧要的.

注记 上述我们假设函数 u 对自变量所有的值有定义. 函数可能只定义在 $(x,y,z,\cdots)$ 的某个区域上. 遇到的区域将是相当简单的 (比如, 矩形、带形、圆盘). 如这样的区域包括它边界上的某点 p, 则严格来说 u 在 p 的偏导数是没有定义的, 除非想论及单边导数. 当区域 D 包含有边界点时, 称函数 u 在 D 上是 C^k 的, 如存在定义在一更大的不包含自身边界点的区域 (即, 开区域) 上的 C^k 函数 v 使得在 D 中所有的点有 $u=v$.

定义 1 $k(>0)$ **阶偏微分方程** (**偏微**)是一个含有未知函数 u 的方程, 且 k 是方程中出现的 u 的偏导数的最高阶数.

定义 2 对事先指定的区域 D, **一个** k**阶偏微的解**是定义在 D 上的 C^k 函数, 使得对 D 中所有的内点满足该偏微. 如事先未指定区域, 则一个 k 阶偏微的解是一个至少定义在一非空开区域上的 C^k 函数, 且在该非空开区域上满足该偏微.

在应用中有许多"多变量函数". 在时刻 t及点 (x,y,z), $u(x,y,z,t)$ 可以是下面诸量中的任一个: 温度、静电位能、万有引力位能、压力、质量密度、能量密度、某种化学物的浓度等. 科学法则常由有关这些函数作为未知函数的偏微来描述. 对给定的有关 u 在 $t=0$ 时的信息 (即,**初始条件**, 简记为 I.C.), 常面临确定在任何时刻 t 函数 $u(x,y,z,t)$ 的问题. 这类问题称为**初值问题**. 在**稳态问题**中, 函数 u 跟 t 无关. 在这种情形, 通常对某确定的空间区域 D 求解一偏微的解 $u(x,y,z)$ 感兴趣, 其中关于 u 在 D 的边界上的行为的信息给定 (即, **边界条件**, 简记为 B.C. 给定). 这类问题称为**边值问题**. 更一般地, 常会寻求某个偏微对 D 中点 (x,y,z) 在任意时刻 $t>0$ 的解 $u(x,y,z,t)$, 且满足 $t=0$ 的初始条件, 在任意 $t>0$ 处还满足指定的边值条件. 这样的问题往往称作**初边值问题**. 选择初始条件和边界条件使得偏微满足这些条件有唯一解是重要的. 不然, 就不能达到预测由 u 代表的相应的物理量的主要目的. 数学家往往对初边值问题精确解的存在性、唯一性以及解的定性行为更感兴趣, 而那些应用这些理论的人实际上关心的是求满足偏微和初边值条件的函数, 至少在实验误差之内. 本书努力采取一种中间立场, 相信每个阵营的人都能从对方的考虑中受益. 在继续一般的讨论之前, 先给出几个具体的例子. 例 1 虽长, 但它值得好好理解.

例 1 (球对称万有引力位势) 在 Newton(先于 Einstein) 万有引力理论中, 在固定时间, 万有引力加速度向量场 (单位质量的力) 为 $-\nabla u$, 其中 $\nabla u \equiv u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k}$ 是函数 $u(x,y,z)$ 的梯度, 称为**万有引力位势**. 函数 u 服从二阶偏微

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=4\pi G\rho, \tag{1}$$

其中 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为物体在 (x,y,z) 处的密度 (单位体积的质量), G 是万有引力常数, $G\approx 6.668\times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}\mathrm{kg}^{-1}$. u 也可有其他的解释, 比如, (i) 视为在一个内部有与 ρ 成正比的热源密度的实体内稳态的温度分布, 或 (ii) 看作静电位势,

它的负梯度是由密度跟 ρ 成正比的电荷产生的电场. 无论哪种情形, 方程 (1) 都称为 **Poisson 方程**. 在 $\rho=0$ 的特殊情形, (1) 称为 **Laplace方程**更恰当. 假设寻求 Laplace 方程一个球对称的解 $u(x,y,z)$, 即 $u(x,y,z)$ 只依赖于到原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 换句话说, 对某个单变量 $r>0$ 的函数 f, $u(x,y,z)=f(r)$. 由链规则, 得

$$u_x=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)r_x,\ \text{其中}\ r_x=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}r^{-1}2x=xr^{-1}.$$

则

$$\begin{aligned}u_{xx}&=f''(r)(r_x)^2+f'(r)r_{xx}\\&=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)(r^{-1}+x(-r^{-2}r_x))\\&=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)(r^{-1}-\frac{x^2}{r^3}).\end{aligned}$$

类似地可得到 u_{yy} 和 u_{zz} 的表示式. 将这些结果相加, 得

$$\begin{aligned}u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}&=f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+f'(r)\big(3r^{-1}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\big)\\&=f''(r)+2r^{-1}f'(r)=0.\end{aligned}\tag{2}$$

记 $g(r)=f'(r)$, 方程 (2) 成为可分离常微 $g'(r)+2r^{-1}g(r)=0$, 它的解为 $g(r)=Cr^{-2}$. 因此, $f(r)=-Cr^{-1}+K$, 其中 C 和 K 为任意常数. 于是 Laplace 方程一般的球对称的解为

$$u(x,y,z)=-\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+K=-\frac{C}{r}+K.\tag{3}$$

如 $C\neq0$, 则这个解在 $(0,0,0)$ 无定义. 因此, 唯一处处有定义的球对称的解是常值解 $u=K$, 它们产生零万有引力 (或电力) 场 $(-\nabla K=0)$. 当然, 当密度 ρ 处处为 0 时, 不能指望会发现任何引力 (或静电场). 当 $C\neq0$ 时, 得到定义在不包含 $(0,0,0)$ 的任意区域 D 上的解. 在万有引力领域里, 取 D 为某个外部孤立的行星, $r>r_0$. 假设万有引力加速度的大小 $|\nabla u|=f'(r)=Cr^{-2}$ 等于行星表面的 g (例如, 对地球 $g\approx9.8\mathrm{m/sec^2}\approx32\mathrm{ft/sec^2}$). 则有边界条件 $Cr_0^2=g$ 或 $C=gr_0^2$. 于是,

$$u=-gr_0^2r^{-1}+K\ \text{和}\ -\nabla u=-g(r_0/r)^2\boldsymbol{e}_r,\quad r\geqslant r_0,\tag{4}$$

其中 e_r 是由 $(0,0,0)$ 指向外部的单位向量场. 当 $r < r_0$ 时, 这些公式不可用, 因为在行星内部 $\rho > 0$. (在这种情形需要对 $r < r_0$ 求解 Poisson 方程 (1).) 因在 (4) 中 $\|\nabla u\|$ 跟 r^{-2} 成正比, 所以从 Laplace 方程推得了万有引力平方反比律. □

注记1(逃逸速度) 位势差 $u(\infty) - u(r_0) = gr_0$ 是将一物体 (单位质量) 从行星表面移动到空间任意远所需的能量. 因此, 不计空气阻力, 单位质量的动能, 即 $\frac{1}{2}v^2$ (v = 速度), 作为发射物完全脱离行星所需的动能为 gr_0. 换句话说, 逃逸速度的大小为 $\sqrt{2gr_0}$. 对地球而言这个速度大约为 11.2km/sec ≈ 7miles/scc. □

注记2(n 维球对称解) 在 n 维空间, Laplace 方程 $(u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0)$ 球对称解可用与例 1 相同的方法求得 (参看习题 6), 其解具有形式

$$u(x_1, \cdots, x_n) = f(r) = \begin{cases} -Cr^{2-n} + K, & n > 2, \quad (5a) \\ C\ln r + K, & n = 2, \quad (5b) \end{cases} \tag{5}$$

其中 $r = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$. 不管什么维数, Laplace 方程的解都称为**调和函数**. 维数为 n 的公式 (5a) 和 (5b) 表明, 相应于一个球对称调和位势, (单位质量) 力 $-\nabla u$ 的大小跟 r^{1-n} 成正比. 在习题 19 中, 证明当 $n \geqslant 4$ 时, 服从这种力的行星除了完整的圆外不可能有其他的闭轨, 并且这种圆闭轨的可能性很不稳定.(当然, 当 $n = 3$ 时可能会有多种椭圆闭轨.) 因此, 对我们居住的空间不会超过 3 维或许不会感到惊讶. □

注记3 (Laplace 方程的其他解) 应该指出,对 $n > 1$, Laplace 方程实际上有无穷多独立的解 (不是仅依赖于 r). 例如, 考虑 $u = x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^3 - 3xy^2, e^x \sin y, \cdots$. 第六章主要研究维数为 2 的 Laplace 方程:$u_{xx} + u_{yy} = 0$. 在那里, 将考虑确定平面区域 D 上 Laplace 方程的解 u 的边值问题 (以及其他问题), 其中 u 在 D 的边界上的值给定. 这种问题已经应用到跟空间变量 z 无关的稳定流体流, 静电学和稳态热理论. Laplace 方程在那么多内容中出现的原因之一是它是齐次线性 (参看下面的定义 3) 偏微中唯一只涉及 0—4 阶偏导数, 并且在坐标平移和旋转下形式不变的方程. □

例 2 (热问题) 假设 $u(x, y, z, t)$ 是一无热源的齐次热传导实体在时刻 t 点 (x, y, z) 处的温度. 在自然假设下, 可以证明 u 满足下面称为**热方程**的二阶偏微:

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{6}$$

其中 $k > 0$ 是度量实体内物质热传导性能的常数. 注意到在稳态温度分布情形,

u 不依赖于 t, (6) 左边的 u_t 消失, 因此稳态温度分布 $u(x,y,z)$ 满足 Laplace 方程. 在第三章将推导和研究更简单的一维情形的热方程, 其中 u 依赖于 x 和 t. 将考虑的初边值问题的一个例子为[①]

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).\end{aligned}\tag{7}$$

这里 $u(x,t)$ 是一延展在 $x=0$ 和 $x=1$ 之间的实体杆在距离 x 处截面的 (均匀) 温度. 假设除了在杆的两端截面, 这根杆被热绝缘所覆盖. B.C. $u(0,t)=0$ 和 $u(1,t)=0$ 表明杆的两端温度保持在 0 度 (比如, 杆放在冰水里). I.C. $u(x,0)=f(x)$ 表明在 $t=0$, 杆具有给定的温度分布 $f(x)$. 例如, 假设 $f(x)=\sin\pi x$. 容易验证

$$u(x,t)=e^{-\pi^2kt}\sin\pi x \tag{8}$$

不仅满足边界条件, 还满足偏微 (7) 和初始条件 $u(x,0)=\sin(\pi x)$. 预测杆的温度将趋于它冰冷的环境温度 (零度). 确实, (8) 中的因子 $e^{-\pi^2kt}$ 表明, 当 $t\to\infty$, 杆的温度趋于 0, 而且热传导系数 k 越大杆的温度趋向 0 就越迅速. 更一般地, 对任意的正整数 n, 取 $f(x)=\sin(n\pi x)$, 得解 $u(x,t)=\exp[-n^2\pi^2kt]\sin(n\pi x)$. 注意到当 $t\to\infty$ 解趋于 0 的速率随着 n 的变大而增加. 按自然法则情况就是这样, 因为从热区域到冷区域的热传输的速率会因这些区域被更小的距离分开而变得更大, 这时 n 就变大. 相应于热方程, 还有很多其他的边界和初始条件, 这些将在第三章来探讨和解答. □

例 3 (波问题) 如果 $u(x,y,z,t)$ 是在时刻 t 点 (x,y,z) 处的大气压的偏差 (偏离它的正常值), 则 (在一个合适的近似内) u 满足**波方程**

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \tag{9}$$

其中 a 为声速. 假设高度在海平面附近, 这样 a 可取作常数 1087 ft/sec. 作为 (9) 的另一种解释, 真空中可能与时间有关的电磁场的数量位势 (也可是向

[①] (7)中的 D.E., B.C. 和 I.C. 分别是微分方程, 边界条件和初始条件的简记. 在第 3.1 节的 (8) 式后面有它们较详细的说明.——译者

量位势的分量) 也满足波方程, 这时 a 是真空中的光速 ($\approx$ 186 000mi/sec $\approx$ 2.998×10^8m/sec). 注意当 u 跟时间无关时 (例如, 当 u 是静电位势时), 因 $u_t = 0$, 故 (9) 成为 Laplace 方程. 回到 u 度量大气压偏差的情形, 假设想在一个封闭的盒子里发现可能的声音 (气压的变差). 在盒子的内部走近盒壁时, 会发现气压沿着盒壁法线 (跟盒壁垂直) 方向的导数趋于 0. 这是因为风是沿着负气压梯度,$-\nabla u = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$, 方向吹的. 因在盒壁没有风速的法向分量, 因此气压梯度就没有法向分量. 于是, 对盒子 $0 \leqslant x \leqslant A$, $0 \leqslant y \leqslant B$, $0 \leqslant z \leqslant C$, 有下面的 B.C.:

$$\begin{aligned} &u_x(0,y,z) = 0, \quad u_y(x,0,z) = 0, \quad u_z(x,y,0) = 0, \\ &u_x(A,y,z) = 0, \quad u_y(x,B,z) = 0, \quad u_z(x,y,C) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

(9) 有大量的解族满足 (10) 中的 B.C.. 对任意三元整数组 (m,n,p), 令 $\nu(m,n,p) = \frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{m}{A})^2 + (\frac{n}{B})^2 + (\frac{p}{C})^2}$. 则

$$u(x,y,z,t) = \sin(2\pi\nu(m,n,p)t)\cos\frac{m\pi x}{A}\cos\frac{n\pi y}{B}\cos\frac{p\pi z}{C} \tag{11}$$

满足偏微 (9) 和边界条件 (10) (参看习题 9). 再者, 若 (11) 中的主因子用 $\cos(2\pi\nu(m,n,p)t)$ 来替换, 则又得一解. 注意, 在盒子内的点, 气压 (11) 在单位时间内以 $\nu(m,n,p)$ 为周期振荡. 因此, $\nu(m,n,p)$ 称为解 (11) 的**频率**. 若 $A \leqslant B \leqslant C$, 则尽可能低的非零频率 (称为**基本音**) 为 $\nu(0,0,1) = \frac{1}{2}a/C$. 取盒子为封闭的高度为 7ft(以及较小尺寸底座) 的淋浴间, 得 $\frac{1}{2}a/C = 1087/14 \approx 78$ 周期每秒 (或 78Hertz), 这是相当低音的音调. □

注记 在第五章, 集中考虑服从一维波方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{12}$$

的函数 $u(x,t)$. 在一固定的时间 t, $u(x,t)$ 可看作振动的弦在位置 x 处的横向位移, 该弦在静止时伸展在 x-轴上. 其中 a^2 是 T/D, T 是静止时的张力而 D 是弦的单位长度的质量. 在第五章, 应用 Newton 第二定律给出了 (12) 的推导, 并解答了许多振动的弦的初边值问题. 跟热方程比较, 为了确定 (12) 解的唯一性, 不仅需要知道弦的初始位移 $u(x,0)$, 还要知道初始变化速度 $u_t(x,0)$. 有关弦的

初边值问题一个简单例子是

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t \geqslant 0; \\
&\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0; \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).
\end{aligned} \tag{13}
$$

(13) 的 B.C. 表明弦的两端是被固定在 x–轴的 0 和 1 上. 凭直觉, 如果初始横向位移 $f(x)$ 和初始横向速度 $g(x)$ 给定, 则弦的运动可唯一确定. 例如, 若 $f(x) = \sin(\pi x)$ 以及 $g(x) = \sin(3\pi x)$, 则由第三章的理论得解为

$$
u(x,t) = \cos(\pi a t)\sin(\pi x) + \frac{1}{3\pi a}\sin(3\pi a t)\sin(3\pi x). \quad \square \tag{14}
$$

线性偏微, 分类和叠加原理

上述例子的偏微都是线性的. 偏微的线性概念跟常微的线性概念非常类似. 回顾一下一般的 n 阶线性常微是能以如下形式表示的常微

$$
a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{15}
$$

其中 $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 和 $f(x)$ 是给定的独立变量 x 的函数 (可能是常数). 特别, 牵涉到 y^2 或 y 的高次幂 (或是 y 和它的导数更复杂的函数) 的项, 它们又是不能消除的, 就将使方程成为非线性的. 例如, 方程 $y' + y^2 = 0$, $(y'')^{-1} - x\log y = x$ 和 $yy' = 1$ 都是非线性的. 称 (15) 的左边为 $y, y', y'', \cdots$ 具有系数 $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \cdots$ 的**线性组合**, 这些系数是给定的独立变量 x 的函数.

定义 3 一偏微称为是 n **阶线性偏微**, 如果它能写成如下形式: 方程的左边是未知函数 u 和它 (直到 n 阶) 的偏导数的线性组合, 线性组合的系数是给定的独立变量的函数. 方程的右边必为某个给定的独立变量的函数 f. 若 f 恒等于零, 则此线性偏微称为**齐次**偏微.

例 4 未知函数 $u(x,t)$ 一般的二阶线性偏微是

$$
q(x,t)u_{xx} + r(x,t)u_{xt} + s(x,t)u_{tt} + a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t), \tag{16}
$$

其中 q, r, s, a, b, c 和 f 都是给定的 x 和 t 的函数 (可能为常数), 并且 q, r 和 s 不全为零. 如 $f \equiv 0$, 则 (16) 是一般的二阶齐次线性偏微. □

例 5 一维热方程 $u_t = ku_{xx}$ 能写成 (16) 形式, 其中 $q = -k$ 和 $b = 1$, 其他的系数和 f 都为零. 于是, 该热方程是一齐次线性偏微. 当有热源或散热装置存在的情形, 它们在非齐次热方程中常以项 cu 和 $h(x,t)$ 来表示

$$\boxed{-ku_{xx} + u_t + cu = h(x,t), \quad k > 0,} \tag{17}$$

这又是 (16) 的特殊情形. (17) 称为**广义的热方程**. □

例 6 作为 (16) 的又一个例子, 由一振动的弦, 其上作用一与 $-cu(x,t) + F(x,t)$ 成比例的横向力密度, 可得一维非齐次 **Klein-Gordon方程**

$$\boxed{-a^2u_{xx} + u_{tt} + cu = F(x,t), \quad a > 0.} \tag{18}$$

如 $F \equiv 0$ 和 $c = 0$, (18) 就化为 (齐次) 波方程 $-a^2u_{xx} + u_{tt} = 0$ 即 (12). 称 (18) 为**广义的波方程**. □

例 7 通常不会在 Poisson 方程里用 t 作为独立变量 (参看 (1)), 因为 t 通常意味时间, 而且 Poisson 方程是用在稳态的情况下. 然而, 如破常规地用 t, 得二维的 Poisson 方程 $u_{xx} + u_{tt} = g(x,t)$. 更一般地 (但仍是 (16) 的特殊情形), 得方程

$$\boxed{a^2u_{xx} + u_{tt} + cu = g(x,t), \quad a > 0.} \tag{19}$$

若用 y 来替代 t(这样就不会有将 t 误为时间的混乱), 则称方程 (19) 为二维的**非齐次Helmholtz 方程**. 此外, 它被用来分析鼓面的振动模式. 粗略说来, 如鼓的一个方向的张力大于另一个方向的张力, 常数 a 就不等于 1. (19) 称为**广义的 Poisson/Laplace方程**. □

看起来如果只集中研究 "具体" 方程 (17),(18) 和 (19) 的话, 则似乎将无法对更一般的方程 (16) 的研究作出很多进展. 然而, 当 (16) 中的系数都为常数的

情形有如下的结果, 证明在附录 1 中给出.

分类定理 考虑二阶线性偏微

$$aU_{\xi\xi}+bU_{\xi\tau}+cU_{\tau\tau}+dU_{\xi}+eU_{\tau}+kU=F(\xi,\tau), \tag{20}$$

$(a^2+b^2+c^2\neq 0)$, 其中未知函数 $U=U(\xi,\tau)$ 是 C^2 的, a,b,c,d,e 和 k 是给定的实常数, 且 $F(\xi,\tau)$ 是给定的连续函数. 则存在如下形式的变量替换

$$x=\alpha\xi+\beta\tau, t=-\beta\xi+\alpha\tau$$
$$u(x,t)=\frac{1}{\rho}\exp(\gamma\xi+\delta\tau)U(\xi,\tau), \tag{21}$$

其中 α, β, γ, δ 和ρ($\rho\neq 0$) 是常数且$\alpha^2+\beta^2=1$, 使得 (20) 正好被转化成下列形式之一:

1. 广义波方程 (18) 形式, 若$b^2-4ac>0$, 此时称 (20) 为**双曲的**;

2. 广义Poisson/Laplace方程 (19) 形式, 若 $b^2-4ac<0$, 此时称 (20) 为**椭圆的**;

3. 广义热方程 (17) 形式, 若 $b^2-4ac=0$, 且 $2cd\neq be$ 或 $2ae\neq bd$, 此时称 (20) 为**抛物的**;

4. 方程 $u_{xx}+cu=g(x,t)$, 若 $b^2-4ac=0$, $2cd=be$ 以及 $2ae=bd$, 此时称 (20) 为**退化的**.

换言之, 除了退化情形, 常系数方程 (20) 只是广义波方程, 广义 Poisson/Laplace 方程或广义热方程的演变形式, 这分别取决于 (20) ①是双曲的, 椭圆的还是抛物的. 虽然知道分类定理是有益的, 但或许没有必要把它视作在施行所要求的变量替换中的法宝, 因为当偏微是在自然坐标下由具体考虑推导出来的话, 它们几乎总是已经以简单的标准形式出现. 如果变量替换确实需要, 那它的方法能从附录 1 中分类定理的证明中获取. 或许, 揭示出来最有意义的事实是:

(i) 当用适当的变量重新写出来时, (20) 的每个形式都有它的具体解释.

(ii) 在对 (20) 的一般研究中, 把注意力集中在 (17), (18), (19) 和第 1.3 节提到的退化情形将不失一般性.

①原文误为 (16).——译者

叠加原理

有关线性方程一个很重要的事实是现在要来叙述的叠加原理. 据定义, 一个线性偏微能写成 $L[u] = f$ 形式, 其中 $L[u]$ 表示 u 和它的一些偏导数的线性组合, 系数是给定的独立变量的函数. 因为 $L[u]$ 具有这种形式, 若用 $u_1 + u_2$ 来代替 u, 结果, 即 $L[u_1 + u_2]$, 将等于 $L[u_1] + L[u_2]$. 其中的根本依据是这样的事实: 两个函数之和的偏导数等于它们的偏导数之和. 更一般地, 对任意常数 c_1 和 c_2,

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2]. \tag{22}$$

作为 (22) 的一个直接推论, 有

叠加原理 (或性质) 令 u_1 是线性偏微 $L[u] = f_1$ 的解, u_2 是线性偏微$L[u] = f_2$ 的解. 则对任意常数 c_1 和 c_2, $c_1u_1 + c_2u_2$ 是 $L[u] = c_1f_1 + c_2f_2$ 的解. 换言之,

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1f_1 + c_2f_2. \tag{23}$$

特别, 当 $f_1 = 0$ 和 $f_2 = 0$ 时, (23) 隐含了若 u_1 和u_2 都是齐次线性偏微 $L[u] = 0$ 的解, 则 $c_1u_1 + c_2u_2$ 也是 $L[u] = 0$ 的解.

证明 由 (22), 得 $L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2] = c_1f_1 + c_2f_2$. □

例 8 注意到 $u_1(x,y) = x^3$ 是线性偏微 $u_{xx} - u_y = 6x$ 的一个解, $u_2(x,y) = y^2$ 是 $u_{xx} - u_y = -2y$ 的一个解. 求 $u_{xx} - u_y = 18x + 8y$ 的一个解.

解 这里 $L[u] = u_{xx} - u_y$, $f_1(x,y) = 6x$ 以及 $f_2(x,y) = -2y$. 注意 $18x + 8y = 3f_1(x,y) - 4f_2(x,y)$, 因此 $c_1 = 3$ 和 $c_2 = -4$. 由叠加原理得 $3u_1(x,y) - 4u_2(x,y)$(或 $3x^3 - 4y^2$) 将是 $u_{xx} - u_y = 18x + 8y$ 的一个解. 这容易直接验证. □

例 9 注意到 $u_1(x,t) = \sin t \cos x$ 和 $u_2(x,t) = \cos(3t)\sin(3x)$ 都是波方程 $u_{tt} = u_{xx}$ 的解. 利用叠加原理, 求出无穷多个解, 这些解中没有一个解是其他解的常数倍.

解 注意到 $u_{tt} = u_{xx}$ 能写成齐次线性偏微 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 的形式. 根据叠加原理, 对任意常数 c_1 和 c_2,

$$c_1 \sin t \cos x + c_2 \cos(3t)\sin(3x)$$

是解. 对 c_1 和 c_2 的每一个选择, 得到不同的解 (参看习题 14). 取定 $c_1=1$ 并让 c_2 变化, 得到一无穷的解族, 其中没有一个解是其他解的常数倍. □

研究非线性方程中的一个主要困难是叠加原理对有的方程失效. 这种失效使得由最初的一对解来构成新的解族出现困难, 如下面例子所说明的.

例 10 考虑非线性一阶偏微 $u_xu_y-u(u_x+u_y)+u^2=0$ 或等价地 $(u_x-u)(u_y-u)=0$. 注意到可得两个解, 即 e^x 和 e^y. 然而, 证明 $c_1e^x+c_2e^y$ 将不是解, 除非 $c_1=0$ 或 $c_2=0$.

解 定义 $N[u]=(u_x-u)(u_y-u)$, 注意到对任意 C^1 函数 v 和 w

$$\begin{aligned}N(v+w)&=(v_x+w_x-v-w)(v_y+w_y-v-w)\\&=N(v)+N(w)+(v_y-v)(w_x-w)+(v_x-v)(w_y-w).\end{aligned}$$

这个计算表明, 由于该偏微的非线性性, 一般 $N[v+w]\neq N[v]+N[w]$. 取 $v=c_1e^x$ 和 $w=c_2e^y$, 得 $N[c_1e^x+c_2e^y]=N[c_1e^x]+N[c_2e^y]+(-c_1e^x)(-c_2e^y)=c_1c_2e^{x+y}$. 于是, $N[c_1e^x+c_2e^y]=0$ 仅当 $c_1=0$ 或 $c_2=0$ 时成立. □

虽然到目前为止所讨论的具体有关的偏微都是线性的, 但还有许多在物理学里很重要的非线性偏微的例子. 例如, Einstein 相对论描述了用时—空几何曲率来反映的万有引力. Einstein 场方程形成了一个非线性偏微组. 由于非线性性, 这些场方程组的解就难以求得, 除了假设了一些对称性的情形. 在流体力学、光学理论和弹性理论中的偏微也可发现非线性性. 非线性方程常由有希望求得解的线性方程来逼近, 这些线性方程的解接近相应的非线性方程的解. 然而, 原方程许多有意义的特征会在这个过程中失去, 而且会产生明显的误差. 在下个例子, 用非线性极小曲面方程来举例说明这些问题, 极小曲面方程的解反映了肥皂薄膜曲面.

例 11 想象一下一环状 (或许非平面) 金属丝浸泡在肥皂溶液之后肥皂薄膜所保持的曲面. 由于薄膜的曲面张力, 将形成一张成该金属丝的最小面积的曲面 (即, 极小曲面). 若该曲面是定义在一有界区域 D 上某个函数 u 的图像 $z=u(x,y)$, 则它的面积为 $\iint_D\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}dxdy$. 在 1760 年 Joseph Louis Lagrange 证明了, 若 $u(x,y)$ 是所有在 D 的边界上具相同边值的函数中使这个积分取到最小的函数, 则 u 必满足 (非线性) **极小曲面方程**

$$(1+u_y^2)u_{xx}+(1+u_x^2)u_{yy}-2u_xu_yu_{xy}=0. \tag{24}$$

若假设曲面 $z = u(x, y)$ 几乎是水平的, 则 u_x 和 u_y 都是微小的 (比如与 1 相比较), 这样 u_x^2, u_y^2 和 $u_x u_y$ 就都非常小. 在这种情形, 方程 (24) 似乎可合理地由 Laplace 方程来逼近

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{25}$$

确实, 如金属丝几乎是平坦, 并且几乎是水平置放着的话, 则形成的极小曲面将接近 (以一种相当困难来明确的意义下) 相应的 Laplace 方程的解. 当假设 $u_x^2 + u_y^2 \ll 1$ 不再正确时麻烦就出现了. 作为一个例子, 假设 u 具有形式 $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的情形来比较 (24) 和 (25) 的解. 通过如例 1 所做的计算, 可见 (24) 和 (25) 分别成为

$$rf''(r) + f'(r)(1 + [f'(r)]^2) = 0 \tag{26}$$

和

$$rf''(r) + f'(r) = 0. \tag{27}$$

如设 $g = f'$, 则 (26) 和 (27) 都是可分离的一阶常微.(26) 和 (27) 相应的通解分别为

$$\bar{f}(r) = C \ln\left(\frac{1}{2}[r + \sqrt{r^2 - C^2}\,]\right) + K$$

和

$$f(r) = C \ln r + K.$$

对大的 r 这些解吻合得很好, 这时 $\bar{f}'(r) \approx f'(r) \approx 0$(即, $u_x^2 + u_y^2 \ll 1$). 然而, 当 $r \downarrow C$ 时 $\bar{f}(r)$ 和 $f(r)$ 的行为就不同, 并且 $\bar{f}(r)$ 对于 $0 \leqslant r \leqslant C$ 无定义, 而 $f(r)$ 对所有的 $r > 0$ 有定义. 在下面的图 1 中, 已取 $C > 0$ 和 $K = -C\ln(C/2)$ 使得 $\bar{f}(C) = 0$. $u(x, y) = \bar{f}(\sqrt{x^2 + y^2})$ 的图像是通过绕 z–轴旋转曲线图 $z = \bar{f}(r)$ 而获得的极小曲面. 通过 $z = -\bar{f}(r)$ 来连接曲线 $z = \bar{f}(r)$, 然后旋转, 得到从 $z = -\infty$ 到 $z = +\infty$ 的完整的极小曲面. 曲面在两个圆周 $z = a$ 和 $z = b$ 的部分就是把这些圆 (比方说金属丝) 浸入肥皂液而获得的肥皂薄膜, 只要 $|b - a|$ 不是太大 (参看习题 20). 曲线 $z = \pm\bar{f}(r)$ 与曲线 $r = C \cdot \cosh(z/C)$ 相同, 而完整的极小曲面旋转称为**悬链面**. 用这种方式获得的悬链面大小各异但形状相同. 薄膜到 z– 轴的最短距离为 C. 如果认为 Laplace 逼近是有效的话, 那就会错误地得出薄膜将如 $z = f(r)$ 那样不断地接近 z–轴. 这种逼近失效的原因在于当 $r \downarrow C$ 时 $f'(r) = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ 不再保持是小量, 而是趋于无穷. □

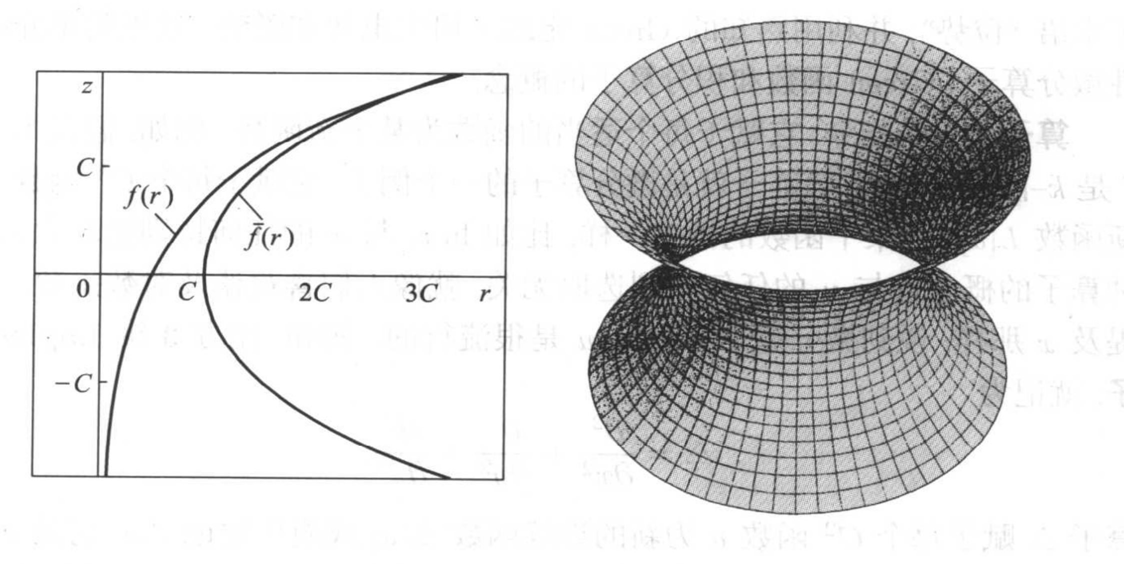


图 1

注记 (黑洞) 当用非线性 Einstein 场方程来计算一质量为 M 半径是 r_0 的球的万有引力场的球面对称几何时, 会发生一个很类似的现象. 在例 1 里, 已求得球面对称 Newton 万有引力位势为 $C/r+K$, 并且这是从 (线性)Laplace 方程推导来的. 这个位势公式不管球或密度多小, 只要 $r>r_0$ 都是有效的. 然而, 已经发现用变量 r 和 "时间"t, 对时—空几何的 Einstein 非线性描述在 r 达到 r_0 前会失效. 确实, 如果质量为 M 的球的半径小于所谓的 **Schwarzchild 半径** $r_M=2GM/c^2$ 时 (其中 c 是光速, $G=6.668\times10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}\mathrm{kg}^{-1}$ 是引力常数), 则场方程解的表达式当 $r\downarrow r_M$ 时无定义. 则这个球用实际上称作**黑洞**的来代替. 就像肥皂薄膜那样, 若把坐标 r 和 t 变成可用双曲函数把它们跟 r 和 t 联系起来的新的变量, Einstein 场方程的解可用数学化延拓. 这种时—空延拓进入黑洞的狭窄通道然后进入 "另一个宇宙", 然而, 这个宇宙以任何常规的方法都是无法进入的. 的确, 进入无旋黑洞并以不超过光速运行的任何物体将会碰到时—空的奇异边界, 决不会抵达其他宇宙也不会返回我们自己的宇宙. 这些有意义的 Einstein 理论特征在线性 Newton 理论中是无法得到的, 线性 Newton 理论是在不怎么极端的情形近似了 Einstein 理论. □

算子和 Green 函数

求解偏微或常微线性初边值问题的一个有用方法是基于所谓的 Green 函数的构造. 这个概念首先由英国数学家 George Green(1793—1841) 在发表于 1828 年的论文集《关于数学分析在电磁学理论中的应用的论述》中提出. Green 提出

了术语“位势”, 并利用熟知的 Green 定理来研究电势和磁势. 这里简单介绍线性微分算子、Green 函数和积分算子的概念.

算子是一种指令, 它赋予每个适当的函数为某个新函数. 例如, 假设 $\mathbf{L}[u]=f$ 是 k–阶线性偏微. 该算子就是微分算子的一个例子, 它赋予每个 C^k 函数 u 为新函数 $L[u]$. 与某个函数的概念一样, 比如 $\ln x$, 与 x 的任何特别选取无关, 这种算子的概念也与 u 的任何特别选取无关. 就像人们喜欢谈及对数函数, 而不提及 x 那样, 说到微分算子不提及 u 是很流行的. 例如, 比方 3 维 **Laplace算子**, 就记为

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{28}$$

算子 $\triangle$ 赋予每个 C^2 函数 u 为新的连续函数 $\triangle[u]$ 或简单地记 $\triangle u$, 它是 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$. 从而, Poisson 方程就是 $\triangle u=f$, 其中 $f=f(x,y,z)$ 是给定的函数. 为了解 $\ln x=C$, $x>0$ 这样的方程, 回忆一下只需简单地在两边施行反函数 exp, 得 $x=\exp[\ln x]=\exp(C)$. 为了解 Poisson 方程, 人们也许尝试去找 Laplace 算子的逆算子 $\triangle^{-1}$. 这样就可以简单地在 $\triangle u=f$ 两边作用 $\triangle^{-1}$, 得解 $u=\triangle^{-1}[f]$. 这表明 Laplace 算子 (作用在一确定函数类上) 的逆算子是作用在 f 上生成由下面定义的新函数 $\triangle^{-1}[f]$

$$\triangle^{-1}[f](x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,z;\bar{x},\bar{y},\bar{z})d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}, \tag{29}$$

其中

$$G(x,y,z;\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{-1}{4\pi\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2}}. \tag{30}$$

注意到对 $\bar{x}$,$\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 积分, 剩下的是 x,y 和 z 的函数, 由定义此函数就是 $\triangle^{-1}[f]$. 如函数 f 是 C^1 的并且在某个球之外为零, 则在具备了适当的工具之后就能证明 $\triangle^{-1}[f]$ 是 $\triangle[u]=f$ 的一个解. 算子 $\triangle^{-1}$ 是**积分算子**的一个例子, 即一个算子 B 具有形式

$$B[f](p)=\int g(p,q)f(q)dq. \tag{31}$$

这里 p 和 q 可取值于多维区域. 当一个偏微 (或常微) 的初边值问题的解用一个积分算子来表示时 (比如像 (29) 那样), 函数 $g(p,q)$ 称为该边值问题的 **Green函数**. 对 Poisson 方程情形 (粗略地说, 具有解在无穷远处趋于零的边界条件), Green 函数就是 (30) 中的 $G(x,y,z;\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 一旦求得正确的 Green 函数, 问题就化为对任意的 p 计算积分 (31). 这样的计算会是相当困难的, 也许需要用数

值方法. 当然, 如有可能, 对一个特殊的初边值问题的解, 更喜欢一个解的代数公式. 在很大程度上，这是我们在本书里争取的. 然而, 在一般情况, Green 函数和它们相应的积分算子提供了表示解的一个简洁方式, 我们偶尔利用这种表达方式. 应该指出积分算子 (31) 是线性的, 即 $B[c_1f_1+c_2f_2]=c_1B[f_1]+c_2B[f_2]$, 因此它们只能是线性算子的逆算子. 特别, Green 函数和它们的积分算子不能用来表示非线性偏微的解!

概要 1.2

1. C^k 函数: 对非负整数 k, 函数 u 称为是 C^k 函数, 如果 u 的每个 k 阶偏导数存在且连续.

2. 线性偏微: n 阶线性偏微是具 $L[u]=f$ 形式的偏微, 其中 $L[u]$ 是未知函数 u 和它的偏导数 (直到 n 阶) 的线性组合, 线性组合中的系数以及 f 是给定的独立变量的函数. 若 $f\equiv 0$, 该偏微称为齐次的.

3. 分类定理: 分类定理表明任一二阶常系数线性偏微 (参看 (20)), 其中未知函数具有两个独立变量, 可 (经变量替换) 转化为正好下列形式之一 (其中 $u=u(x,y)$):

(i) 广义波方程形式

$$-a^2u_{xx}+u_{tt}+cu=F(x,t),\ a>0\quad (\text{双曲情形});$$

(ii) 广义 Poisson/Laplace 方程形式

$$a^2u_{xx}+u_{tt}+cu=g(x,t),\ a>0\quad (\text{椭圆情形});$$

(iii) 广义热方程形式

$$-ku_{xx}+u_t+cu=h(x,t),\ k>0\quad (\text{抛物情形});$$

(iv) 形式

$$u_{xx}+cu=g(x,t),\ (\text{退化情形}).$$

4. 叠加原理: 叠加原理 (或性质) 表明如 u_1 和 u_2 分别为线性偏微 $L[u]=f_1$ 和 $L[u]=f_2$ 的解, 则对任意常数 c_1 和 c_2, $c_1u_1+c_2u_2$ 是 $L[u]=c_1f_1+c_2f_2$ 的解. 换言之, $L[c_1u_1+c_2u_2]=c_1L[u_1]+c_2L[u_2]$.

5. Green 函数: Green 函数以及它们相应的积分算子用来表示线性偏微(或常微) 初边值问题的解.

练习 1.2

1. 证明给定的函数满足伴随的偏微.

(a) $u(x,y)=x+y;\ u_{xx}+u_{yy}=0$.

(b) $u(x,y)=f(x)+g(y);\ u_{xy}=0$, 其中假设函数 f 和 g 是 C^2 的.

(c) $u(x,y)=f(x+y)+g(x-y);\ u_{xx}-u_{yy}=0$, 其中 $f,g\in C^2$.

(d) $u(x,y)=x^2+2t;\ u_{xx}=u_t$.

(e) $u(x,y)=\sin x\cosh y;\ u_{xx}+u_{yy}=0$.

(f) $u(x,y)=\sin(x-ct);\ u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, 其中 c 为实常数.

2. 验证下面函数是 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的解.

(a) $u(x,y)=e^y\cos x$ (b)$u(x,y)=3x^2y-y^3$

(c) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2),\ x^2+y^2\neq 0$

(d) $u(x,y)=e^y\cos x+3x^2y-y^3+\ln(x^2+y^2),\ x^2+y^2\neq 0$.

3. 证明下面的函数满足热方程 $u_t-ku_{xx}=0$.

(a) $u(x,t)=e^{-kt}\sin(x)$

(b) $u(x,t)=e^{-a^2kt}\cos ax$, a 为任意实常数

(c) $u(x,t)=e^{kt}\cosh x$

(d) $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{kt}}\exp(\frac{-x^2}{4kt})$.

4. 证明: 对某个 c, 下面函数是波方程 $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ 的解.

(a) $u(x,t)=x^2+t^2$ (b) $u(x,t)=\cos ax\sin bt$, 对任意常数 a,b

(c) $u(x,t)=\ln(x+t)+(x-t)^2$ (d) $u(x,t)=f(x+2t)+g(x-2t),\ f,g\in C^2$.

5. 给出下列偏微的阶数, 然后以线性的和非线性的把它们分类. 如果偏微是线性的, 指明是齐次的还是非齐次的.

(a) $x^2u_{xxy}+y^2u_{yy}-\ln(1+y^2)u=0$, (b) $u_x+u^3=1$, (c) $u_{xxyy}+e^xu_x=y$,

(d) $uu_{xx}+u_{yy}-u=0$, (e) $u_{xx}+u_t=3u$.

6. 推导第 34 页 n 维 Laplace 方程最一般球对称解的公式 (5a) 和 (5b).

7. (a) 求 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 具形式 $u(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ 的一个解, 并对圆周 $x^2+y^2=1$ 上所有的点 $(\cos\theta,\sin\theta)$, 满足边界条件 $u(\cos\theta,\sin\theta)=\cos(2\theta)+\sin(2\theta)$.

(b) 证明 Laplace 方程具形式如 (a) 的任意解 $u(x,y)$ 的图像与 xy–平面交于过 $(0,0)$ 点的一对垂直直线.

8. (a) 证明 $u(x,y) = \exp[-n^2\pi^2 kt]\sin(n\pi x)$ 满足 I.C. $f(x) = \sin n\pi x$ 的由方程式 (7) 给定的初边值问题的充要条件为 n 是整数.

(b) $\sin n\pi x$ 的图像交于 x–轴上 0 与 1 之间多少个点?

(c) 给出一个具体理由为什么 n 越大温度趋于 0 就越快.

9. 令 $u(x,y,z,t)$ 是例 3 关于波问题的解 (11).

(a) 证明 $u_{tt} = -[2\pi\nu(m,n,p)]^2 u$, $u_{xx} = -(m\pi/A)^2 u, \cdots$. 利用这些事实来推导 $u(x,y,z,t)$ 满足波方程 (9).

(b) 验证 $u(x,y,z,t)$ 满足 B.C.(10).

(c) 盒子内所有使 $u(x,y,z,t)$ 为零的点 (x,y,z) 的集合是若干个相交的矩形曲面的并, 这些矩形曲面把盒子的内点剖分成若干个内室. 共有多少内室?

(d) 在盒子内的哪点气压经受最大变化?

10. 参考例 3, 假设盒子是 $A = B = C = 1$ 的方体且 $a = 2$.

(a) 通过给出例子, 证明具有相同的频率, 两个独立的形式如 (11) 的解 $u(x,y,z,t)$ 是可能的.

(b) 列出这个盒子 10 个最低的正的不同的频率.

11. (a) 证明若 $f(x) = \sin(\pi x)$ 和 $g(x) = \sin(3\pi x)$, 则 (14) 中的 $u(x,t)$ 满足初边值问题 (13).

(b) 找出 (13) 中的 D.E. 和 B.C. 的两个解 $u(x,t)$, 使得这两个解有相同的初始形状 $u(x,0)$, 但有不同的初始速度分布 $u_t(x,0)$.

12. 对什么样的正常数 m 和 n, 二阶偏微 $u_{xx} + u_{yy} + mu_{xy} + u_x + nu_y = 0$ 将会是 (a) 双曲的, (b) 椭圆的,(c) 抛物的和 (d) 退化的?

13. 注意到 $u_1(x,y) = x^2$ 满足 $u_{xx} + u_{yy} = 2$ 和 $u_2(x,y) = cx^3 + dy^3$ 满足 $u_{xx} + u_{yy} = 6cx + 6dy$, c 和 d 是实常数.

(a) 对任给的实常数 A, B 和 C, 求 $u_{xx} + u_{yy} = Ax + By + C$ 的解.

(b) 怎样才能生成问题 (a) 的更多的解?

14. 关于例 9, 证明若对所有的 (x,t), $c_1 \sin t \cos x + c_2 \cos(3t)\sin(3x) = d_1 \sin t \cos x + d_2 \cos(3t)\sin(3x)$, 则 $c_1 = d_1$ 和 $c_2 = d_2$.

15. 用直接计算, 验证把曲线 $y = \cosh x$ 绕 x–轴旋转, 得区域 $|y| < \cosh x$ 上极小曲面方程 (24) 的一个解 $u(x,y) = \sqrt{\cosh^2 x - y^2}$. 根据例 11 中求得的解 $\bar{f}(r)$, 给出一个纯几何的理由说明为什么 $u(x,y)$ 一定是一个解.

16. 假设 $u(x,y)$ 是极小曲面方程 (24) 的任一个解, 其中 (x,y) 落在平面中的某个开区域 D.

(a) 证明对所有的实数 c, $cu(x,y)$ 不会总是解.

(b) 证明若 $c \neq 0$, 则 $cu(\frac{x}{c}, \frac{y}{c})$ 是在由 $(\frac{x}{c}, \frac{y}{c})$ 属于 D 的这样的点 (x,y) 组成的新区域

上的解.

(c) 以曲面形状之间的相似性, 几何上来解释 (a) 和 (b) 的结果.

17. 设 $u(x)$ 是定义在 $x \geqslant 0$ 上任一 C^1 函数, 且 $u(0)=0$. 考虑常微分算子 d/dx, 它赋予每个这样的函数 u 以新连续函数 $u'(x)$. 证明逆算子, 记为 B, 赋予定义在 $x \geqslant 0$ 上的连续函数 $f(x)$ 以函数

$$B[f](x) \equiv \int_0^\infty g(x,z)f(z)dz, \text{ 其中 } g(x,z)=\begin{cases}1,\ 0\leqslant z\leqslant x,\\ 0,\ z>x.\end{cases}$$

因此, 问题 $u'(x)=f(x)$, $(x \geqslant 0)$, 边界条件 $u(0)=0$ 的解用以 $g(x,z)$ 作为 Green 函数的积分算子 B 给出.

18. 设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 为给定的连续函数. 证明线性常微 $u'(x)+p(x)u(x)=q(x)$ $(x \geqslant 0)$, B.C. $u(0)=0$ 的解由下面给出

$$\mathbf{A}[g](x)=\int_0^\infty G(x,z)q(z)dz \ (x \geqslant 0),$$

其中 Green 函数为 $G(x,z)=\exp[P(z)-P(x)]g(x,z)$, $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数, $g(x,z)$ 在习题 17 中定义. $\mathbf{A}$ 的逆算子是什么? **提示**　利用附录 3 中的 Leibniz 法则.

19. 这里证明在假设是一球对称调和位势下, 维数大于 3 的行星轨道是不稳定的. 在例 1 后面的注记 2(或习题 6) 中, 已证明在维数 $n>2$ 时这种位势本质上具有形式 $-Cr^{2-n}$ (其中 $C>0$, 因为假设作用力是吸引力). 一质量为 m 的行星以极坐标系在 $(r(t),\theta(t))$ 处的角动量为 $mr^2\dot\theta$(其中 $\dot\theta=\frac{d\theta}{dt}$), 它为某个常数, 记为 A, 作为中心力. 因此, $\dot\theta=\frac{A}{mr^2}$. 则行星的动能为

$$\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{A^2}{2mr^2},$$

其中 $\dot r\equiv\frac{dr}{dt}$. 总能量 (动能 + 势能) 是个常数

$$E=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{A^2}{2mr^2}-Cmr^{2-n}=\frac{1}{2}m\dot r^2+f(t), \qquad (*)$$

其中

$$f(t)=\frac{A^2}{2mr^2}-Cmr^{2-n}.$$

假设行星轨道对 r 至少有的两个相邻局部极值, 设其为 r_1 和 $r_2(r_1<r_2)$. 当然, 当 $n=3$ 时这个假设是可能的, 因这时有椭圆轨道. 现来证明, 对 $n>3$ 情形这个假设将导出矛盾. 在轨道这样的极值点处, 有 $\dot r=0$, 因此由 $(*)$ 得 $f(r_1)=f(r_2)=E$. 由于当行星在这两个相邻的极值点之间运行时, $\frac{1}{2}m\dot r^2>0$, 所以必有 $f(r)<E$, $r_1<r<r_2$. 于是 $f(r)$ 必在 r_1 与 r_2 之间的某点 r_0 有严格小于 E 的局部极小.

(a) 当 $n=4$ 时, 证明不存在 r_0 使得 $f'(r_0)=0$, 除非 $f(t)\equiv E=0$, 而这样 $f(r_0)$ 就不是严格小于 E.

(b) 当 $n > 4$ 时, 证明存在唯一的正数 r_0 使得 $f'(r_0) = 0$, 而且该值是局部最大而非局部最小, 因这可由事实 $\lim_{r\to 0} f(r) = -\infty$ 和 $\lim_{r\to+\infty} f(r) = 0$ 得到.

(c) 证明当 $n = 3$ 时没有这样的矛盾, 因为当 $n = 3$ 时 $\lim_{r\to 0} f(r) = \infty$ 和 $\lim_{r\to\infty} f(r) = 0$.

(d) 对 $n \geqslant 4$, 圆形轨道是有可能的, 但这样的轨道不稳定, 因为非常轻微的碰撞就会把行星撞出运行轨道. 假设轨道不是完美的圆.

(i) 若 $n = 4$, 证明或是当 $t \to \infty$ 时 $r(t) \to \infty$ 或是当 t 趋于某个有限值时 $r(t) \to 0$.

(ii) 若 $n \geqslant 5$, 证明除了 (i) 中的两种可能, 也会罕有地发生轨道将螺旋成一圆轨. 证明这只能在 $f(r)$ 的最大值为 E 时才能发生. 为什么这是一个罕有事件?

20. 下面来推导两个半径为 R 的同轴圆圈相距超过 $1.3255 \cdot R$ 不能形成极小肥皂薄膜.

(a) 对 $C > 0$, 在 zr-平面上考虑曲线 $r = C\cosh(z/C)$. 证明曲线上点 (z_0, r_0) 的切线经过原点仅当 $\cosh(z_0/C)/\sinh(z_0/C) = z_0/C$(即 $\coth(z_0/C) = z_0/C$).

(b) 证明 $\coth x = x$ 有唯一的正解, 大约 $\alpha \approx 1.200$.

提示 令 $g(x) = \coth x - x$. 证明对小的 $x > 0$, 有 $g(x) > 0$, 而对大的 $x > 0$ 有 $g(x) < 0$. 由计算 $g'(x)$ 来证明当 $x > 0$ 时 $g(x)$ 是严格减的.

(c) 证明 (a) 中的切线必有形式 $r = \pm\sinh(\alpha)z$, 其中 α 由 (b) 中定义. 因此, 不论 C 为何值, 这些线都跟每个曲线 $r = C\cosh(z/C)$ 相切.

(d) 由 (c) 和曲线 $r = C\cosh(z/C)$ $(C > 0)$ 的凸性, 推断所有这样的曲线包含在楔形 $r \geqslant \sinh(\alpha)|z|$ 中.

(e) 推断没有连接两个半径为 R 的同轴圆圈的极小曲面, 如果这两个圆圈相距超过

$$\frac{2R}{\sinh\alpha} < 1.3255 \cdot R$$

的话.

注记 如果相距小于 $\frac{2R}{\sinh\alpha}$ 的话, 则实际上有具形式 $r = C\cosh(z/C)$ 的两张曲面连接这两个圆圈. 具较大 C 值的曲面实际上就是具有极小面积的曲面 (也就是自然地生成的曲面). □

§1.3 通解和基本技巧

从理想上来说, 每个人想有可用来求任意偏微所有的解或至少满足确定的初边值问题相关的解的一般技巧. 即使是一类一阶常微这样的一般技巧都是不存在的. 回忆一下对这样的方程, 有许多技巧它们只对特殊形式的一阶常微适用 (如, 可分离的, 齐次的, 恰当的, 线性的, 等等.) 然而, 容易找到不具备这些形式的一阶常微. 偏微的情况类似. 容易找出这样的偏微, 对它们没有已知的方法

能求得一个解. 幸运地是, 源于实际的偏微不是完全任意的. 确实, 常见的出现在应用中的偏微或偏微方程组只有少数不同的形式. 虽然有些过程适用于不止一个相关的方程, 但最好不要偏离特殊的偏微去过度发展这些过程来用于另一些偏微. 相反, 我们宁愿分别处理每个相关方程. 当一个技巧的模式出现, 我们将会注意它和欣赏它, 但试图把求解过程纳入一种预先模式, 而这模式只能由大量的事后的认识诱发出来, 这种做法看不出有什么益处. 再者, 与常微理论不同, 求解偏微的方法往往比方程本身更甚地依赖于所赋予的边界条件的形式. 这就使得要发展一个统一的理论大厦变得更为困难, 如果那是目标的话. 不过, 在这节要讨论一些基本技巧. 一个称为 "分离变量" 的技巧, 是求解多种偏微问题的预备性步骤. 不过, 我们先举例说明偏微与常微之间的差别. 还将探讨一些确定一个偏微的通解以及求满足所给侧边条件的特解的难点.

偏微的通解和特解

回忆一下一个 n 阶线性常微的通解含有 n 个任意常数. 当解要求满足 n 个初始条件时这些常数就能确定. 例如, 二阶常微

$$y'' + y = 0 \tag{1}$$

的通解为

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \tag{2}$$

其中 c_1 和 c_2 为任意常数. 如还特别给出初始条件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 1$, 则 (1) 满足这些初始条件的唯一解是 $y(t) = \sin t$. 回忆一下 (参看第 1.2 节的定义 2)n 阶偏微的解要求是定义在 (可能是事先指定的) 开集上的 C^n 函数.

一偏微的**通解**是该偏微所有解的集合.

如同常微, 要列出所有的解通常是不可能的, 除了像 (2) 中那样通解有相当特殊的形式. 然而一个 n 阶偏微的通解形式典型地含有 n 个任意函数而不是任意常数. 下面的例子说明了这点.

例 1 求一阶线性偏微

$$u_x(x, y) = 2xy, \text{ 对所有的 } (x, y), \tag{3}$$

的通解 $u = u(x, y)$.

解 固定 y 并对 x 积分, 得

$$u(x,y) = x^2y + f(y). \tag{4}$$

注意积分常数可以与 y 有关, 且形式 (4) 的任意函数确实满足 (3). 回忆第 1.2 节的定义 2, 作为一个技术上的要点, (4) 中的函数 $f(y)$ 要求是 C^1 的 (即f 具连续的一阶导数). 若用 $u_x(x,y,z) = 2xy$ 代替 (3), 则通解的形式将为 $u(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$, g 为任意 C^1 函数. □

当对一个变量积分时, 记住加上一个其他变量的任意函数.

例 2 求三阶偏微的通解:

$$u_{xyy} = 2\sin x,\ u = u(x,y,z),\ \text{对所有的}(x,y,z). \tag{5}$$

解 (5) 对 y 积分一次, 得 $u_{xy}(x,y,z) = 2y\sin x + f(x,z)$. 再关于 y 积分, 得 $u_x(x,y,z) = y^2\sin x + yf(x,z) + g(x,z)$. 最后, 关于 x 积分, 得通解

$$u(x,y,z) = -y^2\cos x + yF(x,z) + G(x,z) + h(y,z), \tag{6}$$

其中 $F(x,z)$ 和 $G(x,z)$ 分别是 $f(x,z)$ 和 $g(x,z)$(关于 x) 的原函数. 因为要求解是 C^3 的, 所以要求 F, G 和 h 是 C^3 函数, 除了这个要求外, 这些函数是任意的. □

当然, 就像常微那样, 仅仅通过几次积分来求得偏微的通解并不总是可能的. 不过, 上述例子意味着一个 n 阶偏微的通解, 作为 m 个独立变量的未知函数 u, 典型地含有 n 个 $m-1$ 个变量的任意函数. 然而, 容易找出不符合这个规则的例子. 例如, 考虑下面例子.

例 3 求

$$(u_{xx})^2 + (u_{yy})^2 = 0,\ u = u(x,y),\ \text{对所有的}\ (x,y) \tag{7}$$

的通解.

解 一个 C^2 函数 $u(x,y)$ 满足该方程充要条件是 $u_{xx} = 0$ 和 $u_{yy} = 0$. 因 $u_{xx} = 0$, u 必有形式 $u(x,y) = f(y)x + g(y)$. 然而, 因 $u_{yy} = 0$, u 也必有形式 $u(x,y) = h(x)y + k(x)$. 具有这两种形式的唯一函数具有形式

$$u(x,y) = axy + bx + cy + d, \tag{8}$$

其中 a, b, c 和 d 为任意常数. 这样, (7) 的通解含有 4 个任意常数而不是两个单变量函数. 还注意到两个具形式 (8) 的解的叠加仍然是解. 因此, (7) 也给出了解满足叠加原理的非线性偏微的一个例子. □

在第 2.2 节例 3, 将证明一阶齐次线性方程 $xu_x - yu_y + yu = 0$ 具有依赖于两个任意函数而不是一个任意函数的通解. 因此, 有关 (甚至线性)偏微的通解形式实在没有严格的规定. 然而, 引入下面偏微的 "一般" 解的概念将是方便的. 这样的解具有通解期望的形式, 是一种也许不会认为是针对某些就像我们刚才看见过的偏微的形式.

定义 1 一个 m 个独立变量未知函数的 n 阶偏微的一个解称为是**一般解**, 如果它含有 n 个任意的 $m-1$ 个变量的 C^n 函数. 而且, 这些任意函数没有一个可去掉或被组合, 不然就会失去解.

注记 最后的要求确保不能简单地通过用两个新的任意函数的和来替代某个任意函数, 或通过某种类似技巧来增加任意函数的数目. 例如, (6) 是一般解, 但 $-y^2\cos x + y[k(x,z) - j(x,z)] + g(x,z)$ 就不是一般解 (即使这里有三个任意函数), 因为 $k(x,z) - j(x,z)$ 可以用 $f(x,z)$ 来替代. □

根据定义 1, 例 1 和例 2 偏微的通解 (4) 和 (6) 都是一般的, 偏微 (7) 的通解 (8) 就不是一般的. 是一般的解但不是通解也是可能的, 如下面例子所说明.

例 4 求非线性一阶偏微的一般解:

$$u_x(x,y) = [u(x,y)]^2. \tag{9}$$

解 固定 y, 可把 (9) 视为一阶可分离常微, 即 $u^{-2}du = dx$, 假设 $u \neq 0$. 积分, 得解 $-u^{-1} = x + g(y)$, 或

$$u(x,y) = \frac{-1}{x+g(y)}, \tag{10}$$

其中 g 是 C^1 函数, $u(x,y)$ 定义在除去曲线 $x = -g(y)$ 上的点之外所有的点. 解 (10) 是一般的. 然而, (10) 不是通解, 因为 (9) 还有不是形式 (10) 的解. 的确, $u(x,y) \equiv 0$ 就是这样的解. 通过把两个解 "粘合" 在一起 (见习题 11) 可得到另外的解. 现假定一开区域 D 预先给定, 还假设只有定义在整个 D 上的解是允许的, 则函数 $g(y)$ 必满足条件: 曲线 $x = -g(y)$ 与 D 不交. 因为这里没有这样被指定的区域, 所以可把所有形式 (10) 的函数看作解. 若要求解处处有定义, 则唯一的解只有 $u(x,y) \equiv 0$. □

例 5 考虑一阶线性偏微

$$xu_x - 2xu_y = u. \tag{11}$$

证明

$$u(x,y) = xf(2x+y) \tag{12}$$

是 (11) 的一般解, 其中 f 是任意 C^1 函数.

解 首先注意到虽然在 $f(2x+y)$ 中含有 x 和 y, 但函数 f 仍然真正地是一个变量的函数, 因为 f 只有一个 "位置", 不同于比如 $g(x,y)$. 因此, 由定义, (12) 中的 $u(x,y)$ 将定义了一个一般解, 如果它满足 (11) 的话. 由乘法法则和链法则得, $u_x = f(2x+y) + xf'(2x+y)\cdot 2$ 和 $u_y = xf'(2x+y)$. 于是, $xu_x - 2xu_y = xf(2x+y) + 2x^2f'(2x+y) - 2x^2f'(2x+y) = xf(2x+y) = u$. 这样, (12) 定义了一个一般解. 利用第二章的理论, 可以证明 (11) 的通解具有形式 (12). □

通常想求一偏微满足侧边条件的特解. 下面两个例子说明这样的解是如何从一般解中获取的.

例 6 求 (11) 满足条件 $u(1,y) = y^2$, 对所有的 y 成立的解.

解 条件 $u(1,y) = y^2$ 指定了解 $u(x,y)$ 对点 (x,y) 在平行于 y-轴的直线 $x=1$ 上的值. 因为 (12) 是一个一般解, 所以只需求函数 f 使得 $u(1,y) = 1\cdot f(2+y) = y^2$ 或 $f(2+y) = y^2$. 为了求这样的函数, 令 $r = 2+y$. 因 $y = r-2$, 有 $f(r) = (r-2)^2$. 因而, f 是这样的函数: 取一数, 减去 2, 然后平方. 特别, $f(2x+y) = (2x+y-2)^2$. 于是, $u(x,y) = x(2x+y-2)^2$. 读者应该直接验证这个 u 满足偏微 (11) 和条件 $u(1,y) = y^2$. □

注记 一阶偏微在广泛的应用中起了很重要的作用. 在第二章, 考虑涉及人口密度、连续介质力学和交通流问题的应用.

例 7 证明波方程 $u_{tt} = c^2u_{xx}$ 具有如下形式的一般解:

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \tag{13}$$

其中 f 和 g 是任意 C^2 函数. 求满足初始条件

$$\text{I.C.}\quad u(x,0) = h(x) \text{ 和 } u_t(x,0) = 0, \tag{14}$$

的特解, 其中 $h(x)$ 是给定的 C^2 函数.

解 如同第 1.2 节习题 4(d), 可直接验证 (13) 是 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 的解. 因为波方程是二阶的而且 (13) 中有两个任意函数, 要不损失解没有一个可除去 (参看习题 12), 由此得出 (13) 是一般解. (13) 中令 $t = 0$ 并利用 $u(x,0) = h(x)$, 得 $f(x) + g(x) = h(x)$. (13) 关于 t 求导, 得 $u_t(x,t) = f'(x+ct)c + g'(x-ct)(-c)$, 由 $u_t(x,0) = 0$ 得 $f'(x) - g'(x) = 0$. 于是, (14) 给出关于未知函数 f 和 g 的两个条件, 即

$$f(x) + g(x) = h(x) \text{ 和 } f(x) - g(x) = K. \tag{15}$$

(15) 两边对应相加, 得 $f(x) = \frac{1}{2}[h(x) + K]$. 类似地有 $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - K]$. 由这些恒等式可用给定函数 h 来确定函数 f 和 g. 于是, 得 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 满足初始条件 (14) 的解:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[h(x+ct) + K + h(x-ct) - K] = \frac{1}{2}[h(x+ct) + h(x-ct)]. \tag{16}$$

在习题 12, 要求读者直接验证 (16) 的有效性. □

基本技巧

在例 1 和例 2 已经看到, 简单地置未知函数的偏导数等于给定函数这类的偏微可以通过直接积分来求解. 例 4 中的偏微 $u_x = u^2$ 就不能通过两边关于 x 积分来求解, 因为右端含有未知函数 $u(x,y)$. 然而, 利用常微的技巧, 能解答这个方程.

> 若一个偏微只涉及一个独立变量的偏导数, 则这样的方程可视为单变量未知函数的常微, 其中其他的变量保持固定. 在解的表达式中, 任意常数由这些剩下变量的任意函数来代替.

这里通过举例来解答出现在第 1.2 节分类定理中的退化方程 $u_{xx} + cu = g(x,t)$ 的齐次形式.

例 8 求三种情形 $c > 0$, $c = 0$ 和 $c < 0$ 偏微

$$u_{xx} + cu = 0, \quad u = u(x,t) \tag{17}$$

的通解.

解 对固定的 t, (17) 关于 u 看作 x 函数, 是二阶常系数线性常微 (在第 1.1 节讨论过). 如 $c > 0$, 则对每个固定的 t, 解具有形式 $c_1 \sin\sqrt{c}x + c_2 \cos\sqrt{c}x$. 然

而, 当 t 变化时, c_1 和 c_2 的选择也会变化 (即, 它们可以是 t 的函数). 因此, (17) 的通解是

$$u(x,t) = f_1(t)\sin\sqrt{c}x + f_2(t)\cos\sqrt{c}x,$$

其中 f_1 和 f_2 是任意 C^2 函数. $c=0$ 和 $c<0$ 情形的通解分别为

$$u(x,t) = f_1(t)x + f_2(t) \text{ 和 } u(x,t) = f_1(t)e^{\sqrt{|c|}x} + f_2(t)e^{-\sqrt{|c|}x}. \qquad \square$$

例 9 求

$$u_{yy} + u_y = x \tag{18}$$

的通解 $u = u(x,y)$.

解 通过固定 x, 可把 (18) 看作以 y 作为自变量的二阶非齐次线性常微. 一特解为 $u(x,y) = xy$. 相应的齐次方程的辅助方程是 $r^2 + r = 0$, 具有根 0 和 -1.相应的齐次方程的通解加上特解, 记住任意常数可以依赖于 x, 得 (18) 的通解

$$u(x,y) = xy + f(x) + g(x)e^{-y}, \tag{19}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是任意 C^2 函数. 也可先关于 y 积分来解 (18), 得一阶线性常微 (其中 x 固定)

$$u_y + u = xy + h(x). \tag{20}$$

(20) 两边乘积分因子 e^y, 得

$$\frac{\partial}{\partial y}[e^y u] = xye^y + e^y h(x) \text{ 或 } e^y u = x(ye^y - e^y) + e^y h(x) + k(x).$$

于是, (18) 通解的又一形式为

$$u(x,y) = xy - x + h(x) + k(x)e^{-y},\ h,k \in C^2. \tag{21}$$

(19) 和 (21) 看起来不同, 但它们其实是等价的. 确实, 把函数 $-x$ 加到任意函数 $h(x)$ 简单地就得到另一个任意函数, 它可跟 (19) 式中的 f 等同. 不同的方法常导出通解表现形式的不同, 但在下述意义下它们实际上是等价的, 即当任意函数变化时它们生成相同的解族. $\square$

分离变量

> **分离变量**法是用来求偏微的函数乘积形式的解 (如果有的话), 每个函数只依赖于一个独立变量. 这样的解称为**乘积解**.

下面举例说明分离变量法.

例 10 利用分离变量, 求带有与温度有关的散热装置的热方程, 即

$$u_t - u_{xx} = -u, \ u = u(x,t). \tag{22}$$

的乘积解.

解 把乘积形式解 $u(x,t) = f(x)g(t)$ 代入 (22), 得

$$f(x)g'(t) - f''(x)g(t) = -f(x)g(t). \tag{23}$$

然后分离变量, 使得变量 x 的函数只出现在一边, 而变量 t 的函数只出现在另一边. 如这是可能的, 通常可先除 $f(x)g(t)$ 然后再重新整理得:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} + 1 = \frac{f''(x)}{f(x)}. \tag{24}$$

一个 x 的函数跟一个 t 的函数相等, 唯一的情形是这两个函数等于相同的常数, 记作 λ. 于是,(24) 分解成两个常微, 即

$$\frac{(g'(t)}{g(t)} + 1 = \lambda \text{ 或 } g'(t) + (1-\lambda)g(t) = 0 \tag{25}$$

和

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda \text{ 或 } f''(x) - \lambda f(x) = 0. \tag{26}$$

(25) 的通解是 $g(t) = C\exp\big((\lambda-1)t\big)$. (26) 的通解形式依赖于 $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ 或 $\lambda = 0$. 如 $\lambda < 0$, 则 $f(x) = c_1 \sin\sqrt{|\lambda|}x + c_2\cos\sqrt{|\lambda|}x$, 这时乘积解 $f(x)g(t)$ 为

$$u(x,t) = (c_1\sin(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2\cos(\sqrt{|\lambda|}x))\exp\big((\lambda-1)t\big). \tag{27}$$

注意, 不失一般性, 任意常数 C 已经吸收到 c_1 和 c_2 中.(对于情形 $\lambda > 0$ 和 $\lambda = 0$, 见习题 5.) □

注记1 注意 (27) 不是一般解, 因为其中不含有任意函数. 因此, 由分离变量得到的解通常远不是通解. 然而, 如偏微是线性和齐次的, 则根据第 1.2 节的叠加原理, 乘积解的线性组合 (对不同的 λ) 仍将是解. 用这种方法得到的解对应用来说常常是足够一般了, 就如后面第三章中反复见到的那样. □

注记2 一位经验丰富的分离变量擅长者, 比方说某某 (女) 博士, 事先意识到令人讨厌的平方根和绝对值符号会出现在 (27) 的解中. 为了避免它, 这位博士把这个负的分离常数 λ 写成 $-\lambda^2$ 形式, $\lambda > 0$, 则这位博士不仅得到与 (27) 等价的更漂亮的解

$$u(x,t) = \big(c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)\big) \exp\big(-(\lambda^2+1)t\big),$$

而且也令无经验的学生对她的才华称奇. 但愿这个注记能消除读者的迷惑. □

例 11 求下面横向振动薄膜在点 (x,y) 时刻 t 处振幅 $u(x,y,t)$ 的波方程某些非零的乘积解:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}. \tag{28}$$

解 对函数 X, Y 和 T, 令 $u(x,y,t)$ 具有形式 $X(x)Y(y)T(t)$. 函数的这个记号有助于循着函数所对应的变量. 把 u 带入 (28), 得

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

一个 t 的函数等于一个 x 和 y 函数, 只有当这些函数都是常数时才可能. 因此,

$$\frac{T''}{T} = \lambda \text{ 或 } T'' - \lambda T = 0 \tag{29}$$

和

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda \text{ 或 } \frac{X''}{X} = \lambda - \frac{Y''}{Y}. \tag{30}$$

(30) 中后面方程的两边必为一常数, 记作 μ(为什么?). 则得

$$\begin{aligned} &T'' - \lambda T = 0, \\ &X'' - \mu X = 0, \\ \text{和}& \\ &Y'' + (\mu - \lambda)Y = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

有多种可能性, 它们取决于 λ, μ 和 $\mu - \lambda$ 的符号. 因为我们的目的不是得出每个可能的乘积解, 所以将做一些选择以便得出一个普通的解族. 对常数 a, b 和

c, 令 $\lambda = -a^2 - b^2$, $\mu = -a^2$, $\mu - \lambda = b^2$. 然后选 (31) 的某些特解, 得一非零的乘积解解族

$$\cos(\sqrt{a^2 + b^2}t)\sin(ax)\sin(by). \tag{32}$$

当然, 在 (32) 中可用正弦替换余弦以及每个正弦用余弦来替换; 有八种可能性. 通过对这八种可能性组成一个线性组合, 根据叠加原理, 就得到一个更大的解族. 甚至可用双曲正弦和双曲余弦来替换 (32) 中所有的正弦和余弦, 仍然得到有效的乘积解解族. 事实上, 这样的解族可由置 $\lambda = a^2 + b^2$, $\mu = a^2$ 和 $\mu - \lambda = -b^2$ 得到 (见第 1.1 节习题 18). □

概要 1.3

1. 通解: 一偏微的通解是该偏微所有解的集合.

2. 一般解: 一个 m 个独立变量未知函数的 n 阶偏微的一个解称为是一般解, 如果解中含有 n 个 $m-1$ 个变量的任意 C^n 函数. 例 3 和例 4 表明通解未必是一般解, 而且一般解不必是通解.

3. 常微技巧: 如果一个偏微只涉及一个独立变量的偏导数, 则这样的方程可看作单变量未知函数的常微, 其中其他的变量视为固定. 在解的表达式中, 任意常数用这些剩余变量的任意函数来代替.

4. 分离变量: 分离变量法是用来求形式 $f(x)g(y)$ 的解 $u(x,y)$(如果有的话). 这样的解称为乘积解. 把乘积解的形式代入偏微, 可尝试得到有关 x 的在方程的一边而有关 y 的在方程的另一边的表达式 (即, 尝试进行分离变量). 如果这是可能的, 则方程两边可令为常数, 并得到关于 $f(x)$ 的常微和关于 $g(y)$ 的常微. 对于三个或更多变量的未知函数, 要施行多步分离变量步骤. 用这种方式获得的解通常远不是偏微的通解.

练习 1.3

1. 用直接积分法求下列偏微的通解.

(a) $u_x = 3x^2 + y^2,\ u = u(x,y)$, (b) $u_{xy} = x^2 y,\ u = u(x,y)$,

(c) $u_{xyz} = 0,\ u = u(x,y,z)$, (d) $u_{xtt} = \exp[2x+3t], u = u(x,t)$.

2. 利用常微技巧求下列偏微的通解.

(a) $u_x - 2u = 0$, (b) $yu_y + u = x$,

(c) $u_x + 2xu = 4xy$, (d) $yu_{xy} + 2u_x = x$ (**提示** 先对 x 积分),

(e) $u_{yy} - x^2u = 0$.

3. 求习题 2 中 (a)~(e) 的偏微分别满足下面的侧边条件的特解.

(a) $u(0, y) = y$,

(b) $u(x, 1) = \sin x$,

(c) $u(x, x) = 0$(即, 在直线 $y = x$ 上 $u = 0$),

(d) $u(x, 1) = 0$ 和 $u(0, y) = 0$,

(e) $u(x, 0) = 1$ 和 $u_y(x, 0) = 0$.

4. 用分离变量法求下列偏微的一个非零解族. 不必求这个过程的最一般的解.

(a) $u_t = 2u_{xx},\ u = u(x, t)$, (b) $u_x = 4u_y,\ u = u(x, y)$,

(c) $u_{tt} = 16u_{xx},\ u = u(x, t)$, (d) $u_t = u_{xx} + u_{yy},\ u = u(x, y, t)$,

(e) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,\ u = u(x, y, z)$.

5. 求例 10 中偏微在分离常数 (即 λ) 是正数或等于零的情形时的乘积解. 当分离常数是正数时, 求一等价的乘积解 (如注记 2), 它不含有平方根.

6. 第 1.2 节用了形式为 e^{rx} 的试验解求得了某些常微的特解. 高维类似的替代 (比如, $u(x, y) = \exp(rx + sy)$, 其中 r 和 s 为常数) 称为**指数替代**. 利用指数替代求下列偏微的一个非零解族.

(a) $2u_x + 3u_y - 2u = 0,\ u = u(x, y)$,

(b) $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0,\ u = u(x, y)$,

(c) $u_{xyz} - u = 0,\ u = u(x, y, z)$,

(d) $u_{xx} + u_{yy} = 14\exp(2x + y),\ u = u(x, y)$,

(e) $u_{xx} + u_{yy} = u,\ u = u(x, y)$.

7. 考虑问题 $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$, 令 $u = u(x, y) = f(x)g(y)$, 并尝试用分离变量法, 得 $f''(x)g(y) + f'(x)g'(y) + f(x)g''(y) = 0$.

(a) 如 $f(x)g(y) \neq 0$, 验证 $-\dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(y)}{g(y)}\dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{g''(y)}{g(y)}$.

(b) 由 (a) 推断, 若 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 不是常数, 则 $\dfrac{g'(y)}{g(y)}$ 是常数, 记作 s.

(c) 由 (b) 推得 $g(y) = ce^{sy}$ 和 $\dfrac{g''(y)}{g(y)} = s^2$.

(d) 证明 $f''(x) + sf'(x) + s^2f(x) = 0$. 解这个关于 $f(x)$ 的常微, 得解

$$u(x, y) = (c_1\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}sx) + c_2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}sx))\exp(s(y - \frac{1}{2}x)).$$

8. 对下面偏微, 求出某些常数 a 和 b (不全为零), 使得 $u(x, y) = f(ax + by)$ 是一般解, 其中 f 是任意 C^1 函数.

(a) $u_x + 2u_y = 0$,　　　　(b) $5u_x + 6u_y = 0$,

(c) $cu_x + du_y = 0$, 对任意常数 c 和 d.

9. 利用习题 8 的技巧, 求下面偏微满足给定侧边条件的解. 解释为何不能用分离变量来求解.

(a) $u_x + 2u_y = 0,\ u(x,0) = x$,

(b) $u_x + 3u_y = 0,\ u(x, 2x+1) = x^2$,

(c) $3u_x - 4u_y = 0,\ u(x,x) = x^2 - x$,

(d) $u_x + 2u_y = 2x + 4y,\ u(0,y) = y^2 + 1$.

提示　对于 (d), 先求出形如 $ax^2 + by^2$ 的特解 $u_p(x,y)$.

10. 对给定的常数 A, B 和 C, 考虑二阶偏微 $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy} = 0$. 证明若 $B^2-4AC > 0$ (即, 该偏微是双曲的), 则该偏微有形如 $u(x,y) = f(ax+by) + g(cx+dy)$ 的一般解, 其中 a, b, c 和 d 是实常数, f 和 g 是 C^2 函数.

提示　假设 $u(x,y) = h(rx+sy)$, 得 $Ar^2 + Brs + Cs^2 = 0$, 固定 r 解 s.

11. 参看例 4, 考虑偏微 $u_x = u^2$, 定义

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x+g(y)}, & y > 0 \text{ 和 } x \neq g(y), \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

(a) 证明若 $g(y) = y^{-2}$, 则 $u(x,y)$, $u_x(x,y)$ 和 $u_y(x,y)$ 在 x–轴上的点连续. 推断, 除了曲线 $x = -y^{-2}$, $y > 0$ 上的点, u 是 C^1 的 (且是 $u_x = u^2$ 的解).

(b) 令 $g(y) = y^{-1}$. 证明 $u_y(x,y)$ 在 x–轴上不连续, 因为这时当 y 穿过 0 时 $u_y(x,y)$ 有跳跃. 为什么这隐含着 $u(x,y)$ 不是偏微 $u_x = u^2$ 在整个平面上去掉曲线 $x = -y^{-1}$, $y > 0$ 上的点所组成的区域上的解?

12. 下面部分关注波方程 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 的解 $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, 其中 f 和 g 是 C^2 函数.

(a) 令 $u(x,t) = f(x+ct)$. 假设对每个固定的时间 t 画出 u 作为 x 函数的曲线图. 证明当 t 推进时, 曲线图以速度 c 往左运动. $u(x,t) = g(x-ct)$ 怎样?

(b) 证明若对所有的 x 和 t 有 $f(x+ct) = g(x-ct)$, 则 f 和 g 必为常数.

(c) 由 (b) 推出不论是 $f(x+ct)$ 还是 $g(x-ct)$ 都不能从解 $u(x,t) = f(x+ct)+g(x-ct)$ 中除去, 不然在此过程中会损失解.

(d) 直接验证

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[h(x+ct) + h(x-ct)]$$

满足偏微 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 及 I.C.

$$u(x,0) = h(x) \text{ 和 } u_t(x,0) = 0.$$

第二章　一阶偏微

在大多数偏微教程中, 一阶偏微通常受到简单的处理. 原因之一是具有很明显应用意义的偏微即, 热方程, 波方程和 Laplace 方程, 都是标准的二阶偏微. 再者, 一阶偏微的理论局部上可转化为一阶常微方程组的研究, 这大概是另一课程的主题. 这里将发现一阶偏微有多种应用. 还有, 在一阶偏微的研究中某些整体拓扑上的考虑使得这一理论不仅仅只是对常微方程组的研究.

第 2.1 节, 通过引入变量的线性变换求解常系数一阶线性偏微, 该变换将偏微转化成一组依赖参数的常微. 这个理论应用于种群分析和存货量分析. 第 2.2 节, 讨论变系数一阶线性偏微. 这是通过作变量的非线性变换来进行的, 使得当除了一个新的变量其余的新变量都保持固定时, 得到一特征曲线, 偏微沿着该特征曲线成为这新变量的常微. 通过把这些曲线上常微的解拼合起来, 来说明某些整体考虑是怎样产生的. 给出了在空气流和微分几何上的应用. 第 2.3 节, 展示特征方法是如何推广到三维一阶偏微, 其中特征方法是用来求解相关的二维一阶拟线性偏微. 在很多可能的应用中, 展示了拟线性偏微在交通流和非线性连续介质力学的研究, 特别有关激波现象的研究中是怎样产生的. 在选修的第 2.4 节, 引入更多有关任意非线性一阶偏微的理论, 且包含有具可变的波传播速度非齐次介质波面运动的研究方面的应用. 此外, 在这个应用中可见到 Hamilton-Jacobi 波/粒子二重性理论, 该理论预示了存在于量子力学基础中类似的二重性.

§2.1 一阶线性偏微 (常系数)

也许偏微最平凡的类型是一阶线性偏微

$$au_x + bu_y + cu = f(x,y), \quad u = u(x,y), \quad a^2 + b^2 > 0, \tag{1}$$

其中 a, b 和 c 是给定的常数, $f(x,y)$ 是给定的连续函数. 我们第一个主要目标是求出 (1) 的通解. 当 $b=0$ 的容易的情形时, (1) 是

$$au_x(x,y) + cu(x,y) = f(x,y), \tag{2}$$

此为 (对固定的 y) 作为 x 的函数 $u(x,y)$ 的一阶线性常微. 遵循第 1.1 节概要中的过程, 通过先除 a ($a \neq 0$) 然后乘积分因子 $e^{cx/a}$, 可求解 (2). 于是

$$e^{cx/a}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + e^{cx/a}\frac{c}{a}u(x,y) = \frac{1}{a}f(x,y)e^{cx/a}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{cx/a}u(x,y)\right) = \frac{1}{a}f(x,y)e^{cx/a}.$$

两边关于 x 积分然后乘 $e^{-cx/a}$, 得 (2) 的通解, 即

$$u(x,y) = e^{-cx/a}\left(\frac{1}{a}\int f(x,y)e^{cx/a}dx + C(y)\right), \tag{3}$$

其中 $C(y)$ 是任意 y 的 C^1 函数. 这种方法的成功主要依靠了 (2) 中不出现 u_y 这样的事实. 正是这个事实才能把 (2) 看作常微.

为了处理更一般的 $b \neq 0$ 的情形, 先注意到 $au_x + bu_y$ 是向量 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ 与梯度 $\nabla u = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j}$ 的点积, 因此 $au_x + bu_y$ 本质上是 u 在向量 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ 方向的导数. 对 xy-平面引入新坐标系, 使得新坐标轴之一指向 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ 方向, 则 $au_x + bu_y$ 将与 u 关于新坐标那个轴的变量标记的偏导成比例, 且把 (1) 式转化成在新坐标下 (2) 的形式. 为了求相应的变量变换, 先注意形如 $bx - ay = d$ (其中 d 是任意常数) 的直线族都具有斜率 b/a, 因此这些直线平行于方向 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. 选新坐标为 (w,z), 使得这些直线族成为新坐标线族, 比如 $w = d$. 具有这个效用的一个简单的变量 (或坐标) 变换为

$$w = bx - ay, \quad z = y, \tag{4}$$

于是新坐标线族 $w = d$ 就与直线族 $bx - ay = d$ 重合. 直线 $z =$ 常数与直线 $y =$ 常数 相同, 它们跟 x-轴平行. 这里假设 $b \neq 0$, 这样变换 (4) 是可逆的:

$$x = \frac{1}{b}(w + az), \quad y = z.$$

由下式定义新函数 v

$$v(w, z) \equiv u(x, y) = u\left(\frac{1}{b}(w + az), z\right).$$

注意到 $v(w, z)$ 就是以新坐标 (w, z) 来表示的 $u(x, y)$. 由上面的注解, 可认为 $au_x + bu_y$ 跟 v_z 成比例, 因 $au_x + bu_y$ 是 u 沿直线 $w =$ 常数 的导数. 的确,

$$au_x + bu_y = a(v_w w_x + v_z z_x) + b(v_w w_y + v_z z_y) = (ab - ba)v_w + bv_z = bv_z.$$

于是, 在变量 (w, z) 下方程 (1) 可重写成

$$bv_z + cv = f\left(\frac{1}{b}(w + az, z\right). \tag{5}$$

这个方程具有简单形式 (2), 即是一个依赖于参数 w 的常微. 我们知道如何解 (5) 中的 v, 于是, 利用 $u(x, y) = v(w, z)$ 和 (4), 问题 (1) 的解就由 $u(x, y) = v(bx - ay, y)$ 给出. 通过做变量变换已把问题 (1) 转化成更简单形式 (5), 这种变量变换使得当新变量中的一个变量保持常数时, 得到直线族 $bx - ay = d$ 的一个构架.

与 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ 平行的直线 $bx - ay = d$ (即, 具有斜率 b/a), 称为偏微 (1) $au_x + bu_y + cu = f(x, y)$ 的**特征线**.

因此, 常系数一阶线性偏微用一由特征线作为它的坐标线的新坐标系来表示时会变得非常简单.

例 1 求偏微的通解:

$$3u_x - 2u_y + u = x, \quad u = u(x, y). \tag{6}$$

解　特征线具有斜率 $-\frac{2}{3}$. 它们构成了直线族 $2x+3y=d$. 于是, 作变量变换

$$\begin{cases} w = 2x+3y \\ z = y \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(w-3z) \\ y = z. \end{cases} \tag{7}$$

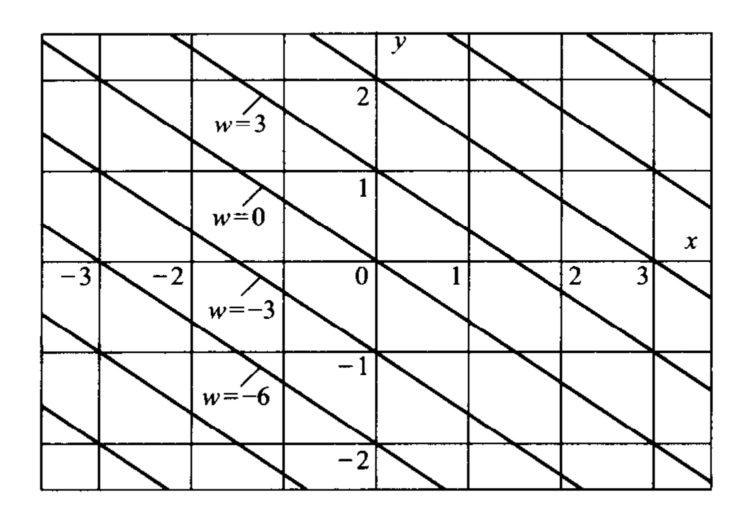


图 1

令 $v(w,z)=u(x,y)$, 有 $3u_x-2u_y=3(v_w w_x+v_z z_x)-2(v_w w_y+v_z z_y)=3(v_w\cdot 2)-2(v_z+v_w\cdot 3)=-2v_z$. 于是, 偏微 (6) 成为

$$-2v_z+v=\frac{1}{2}(w-3z). \tag{8}$$

除 -2 然后乘积分因子 $e^{-z/2}$, 得

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^{-z/2}v)=-\frac{1}{4}e^{-z/2}(w-3z).$$

把 w 看作固定, 对 z 积分, 得

$$\begin{aligned} e^{-z/2}v(w,z) &= -\frac{1}{4}w\int e^{-z/2}dz+\frac{3}{4}\int ze^{-z/2}dz+C(w) \\ &= \frac{1}{2}we^{-z/2}+\frac{3}{4}\big(ze^{-z/2}\cdot(-2)-\int e^{-z/2}(-2)dz\big)+C(w) \\ &= e^{-z/2}(\frac{1}{2}w-\frac{3}{2}z-3)+C(w), \end{aligned}$$

其中 $C(w)$ 是 w 的任意函数, 假设为 C^1(即 $C'(w)$ 是连续的). 于是, 有 $v(w,z)=\frac{1}{2}(w-3z-6)+e^{z/2}C(w)$, 并利用 (7) 得通解

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(2x+3y-3y-6)+e^{y/2}C(2x+3y)=x-3+e^{y/2}C(2x+3y), \tag{9}$$

$C(2x+3y)$ 是 $2x+3y$ 的任一 C^1 函数, 如 $(2x+3y)^2$, $\exp(2x+3y)$, $|\sin(2x+3y)|^{3/2}$ 等等. 关于 C 的 C^1 假设是为了 $u(x,y)$ 是 C^1 的需要. □

注记 如在 (9) 式中取 C 为零函数, 则得特解 $u_p(x,y)=x-3$. 对 C^1 函数 C 的任意选取, 得相应的齐次偏微 $3u_x-2u_y+u=0$ 的解

$$u_h(x,y)\equiv e^{y/2}C(2x+3y).$$

的确,

$$\begin{aligned}&3\frac{\partial}{\partial x}\big(e^{y/2}C(2x+3y)\big)-2\frac{\partial}{\partial y}\big(e^{y/2}C(2x+3y)\big)+e^{y/2}C(2x+3y)\\=&\,3e^{y/2}C'(2x+3y)\cdot 2-2e^{y/2}\cdot\frac{1}{2}C(2x+3y)\\&-2e^{y/2}C'(2x+3y)\cdot 3+e^{y/2}C(2x+3y)=0.\end{aligned}$$

通解 (9) 是特解 u_p 与相应的齐次方程的通解 u_h 之和. 通过对 C 选特殊的函数可得到其他的特解. 比如, 取 $C(2x+3y)=2x+3y$, 得特解 $x-3+e^{y/2}(2x+3y)$. 则 (6) 的通解可写为

$$u(x,y)=x-3+e^{y/2}(2x+3y)+e^{y/2}D(2x+3y), \tag{10}$$

其中 $D(2x+3y)$ 是 $2x+3y$ 的任一 C^1 函数. 解 (9) 和 (10) 都是正确的, 当 C 和 D 取遍所有的 C^1 函数, (9) 和 (10) 都生成所有解的集合, 在这样的意义下它们实际上是等价的. 因此, 两个通解的表达式看上去可以不同, 然而两个都是正确的. 当把自己的习题答案与提供的习题答案对照时要记住这个事实. 还要注意虽然本质上新变量之一是取作 $2x+3y$ 的函数, 而另一个变量的表示可取作 x 和 y 任一线性组合, 只要这个组合不是 $2x+3y$ 的一个乘子. 例如, 可用下面的变换来替代变换 (7)

$$\begin{cases}w=2x+3y\\z=x\end{cases};\quad\begin{cases}x=z\\y=\frac{1}{3}(w-2z)\end{cases}. \tag{11}$$

由这个变量变换得到 (替代 (8)) 方程 $3v_z+v=z$, 其解为 $v(w,z)=z-3+e^{-z/3}G(w)$, 其中 G 是任意 C^1 函数. 于是,

$$u(x,y)=x-3+e^{-x/3}G(2x+3y)=x-3+e^{y/2}e^{-(2x+3y)/6}G(2x+3y),$$

与 (9) 等价. □

在许多情况, 尤其在应用上, 人们对求满足给定的侧边条件的特解感兴趣. 对方程 (1), 一个适当的侧边条件也许是要求 $u(x,y)$ 在某条直线上的点具有指定的值. 这样的条件具有形式

$$u(x, mx+d) = g(x), \tag{12}$$

其中 $g(x)$ 为某个给定的 C^1 函数, m 是直线的斜率, d 是 y–轴上的截距. 当直线是垂直 (具无穷大斜率)的情形, 条件 (12) 须得由条件 $u(d,y) = g(y)$ 来代替, 其中 d 是垂直线的 x–轴截距. 在下面的例子将看到这样的条件通常足以完全确定总是出现在通解表达式中的任意函数. 然而, 有一个重要的例外. 如果施加侧边条件的直线碰巧是偏微的特征线时, 则侧边条件就不能唯一确定一个解. 确实, 在这种情形, 为了解存在, 将发现 (12) 中的函数 $g(y)$ 必须具有特殊形式. 如 $g(y)$ 具有这种特殊形式, 则将发现偏微 (1) 有无穷多满足侧边条件 (12) 的解.

例 2 求解下面给定侧边条件的偏微:

$$u_x - u_y + 2u = 1, \quad u(x,0) = x^2. \tag{13}$$

解 这里侧边条件指定了 u 在 x–轴上的值. 先求偏微的通解, 然后试图满足侧边条件. 特征线具有斜率 -1 且具有形式 $x+y=d$. 因此, 作变量变换

$$\begin{cases} w = x+y \\ z = y \end{cases}; \quad \begin{cases} x = w-z \\ y = z \end{cases},$$

然后定义 $v(w,z) = u(x,y)$. (13) 中的偏微化为 $-v_z + 2v = 1$, 可得 $v(w,z) = \frac{1}{2} + e^{2z}C(w)$, 其中 C 是任意 C^1 函数. 于是得偏微 (13) 的通解

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + e^{2y}C(x+y). \tag{14}$$

现在须选取函数 C 使得侧边条件 $u(x,0) = x^2$ 满足. 由 (14), 得 $u(x,0) = \frac{1}{2} + C(x)$. 因此, $\frac{1}{2} + C(x) = x^2$ 或 $C(x) = x^2 - \frac{1}{2}$. 在知道 C 对任意实数取什么值 (例如, $C(3) = 3^2 - \frac{1}{2}$) 这样的意义下, 完全确定了函数 C. 特别, 知道对任意的 x 和 y 的值, $C(x+y) = (x+y)^2 - \frac{1}{2}$. 于是, 具给定侧边条件偏微的唯一解为

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + e^{2y}\left((x+y)^2 - \frac{1}{2}\right).$$

注记 有些学生会陷入确定函数 C 的困难. 例如, 不要因为 $C(x)=x^2-\frac{1}{2}$ 就错误认为有 $C(x+y)=x^2-\frac{1}{2}$. 还有, 几乎总是这样, $C(x+y)=C(x)+C(y)$ 是不真的. 例如, $\log(x+y)\neq\log x+\log y$, $\sin(x+y)\neq\sin x+\sin y$, $(x+y)^2\neq x^2+y^2$, 等等. 有些学生对把结果 $C(x)=x^2-\frac{1}{2}$ 简单地用 $x+y$ 变换 x 得到正确结果 $C(x+y)=(x+y)^2-\frac{1}{2}$ 有异议. 异议在于 $x+y$ 不是 x, 除非 y 正好是零 (即, 凭什么用某个不等于 x 的来变换 x?). 这个异议可用下面来避免. 公式 $C(x)=x^2-\frac{1}{2}$ 表明 C 是这样的函数, 它把每个数赋值为该数的平方减去 $\frac{1}{2}$. 函数 $C(r)=r^2-\frac{1}{2}$ 刻画了相同的函数. 换句话说, 用来反映函数的变量是可以变化的, 而这种变化不会改变函数. 因此, 用 $C(r)=r^2-\frac{1}{2}$ 来代替 $C(x)=x^2-\frac{1}{2}$, 然后令 $r=x+y$. 这样, 异议 $x+y\neq x$ 就消除了. □

例 3 求解具侧边条件 $u(x,4x+2)=0$ 的偏微 $u_x+2u_y-4u=e^{x+y}$.

解 这里侧边条件要求 u 在直线 $y=4x+2$ 上等于零. 特征线具有形式 $2x-y=$ 常数, 则作变量变换

$$\begin{cases} w=2x-y \\ z=x+y \end{cases};\quad \begin{cases} x=\frac{1}{3}(w+z) \\ y=\frac{1}{3}(2z-w) \end{cases}.$$

记住 z 的选择本质上是任意的. 这里的选择是由这样的事实所激发: 在偏微中若令 $z=x+y$, 则 e^{x+y} 就简单地变为 e^z. 对 $v(w,z)=u(x,y)$, 有 $u_x+2u_y=(v_w w_x+v_z z_x)+2(v_w w_y+v_z z_y)=(2-2)v_w+(1+2)v_z=3v_z$. 因此, 偏微成为 $3v_z-4v=e^z$, 由此得

$$v(w,z)=-e^z+e^{4z/3}C(w)\quad 或\ u(x,y)=-e^{x+y}+e^{4(x+y)/3}C(2x-y). \tag{15}$$

指数为 $4(x+y)/3=-4(2x-y)/3+4x$. 于是, 可把 (15) 重写为

$$u(x,y)=-e^{x+y}+e^{4x}\left(e^{-4(2x-y)/3}C(2x-y)\right)\ 或\ u(x,y)=-e^{x+y}+e^{4x}D(2x-y), \tag{16}$$

其中 D 为任意 C^1 函数. 为了满足侧边条件, 则必有

$$0=u(x,4x+2)=-e^{5x+2}+e^{4x}D(-2x-2).$$

换言之, 函数 D 须如此来选

$$D(-2x-2)=e^{5x+2}/e^{4x}=e^{x+2}.$$

为了求函数 D,利用下面的技巧. 令 $r=-2x-2$, 并注意 $x=-\frac{1}{2}(r+2)$. 则

$$D(r)=D(-2x-2)=e^{x+2}=e^{-\frac{1}{2}(r+2)+2}=e^{-\frac{1}{2}r+1}.$$

于是, D 是由公式 $D(r) = e^{-\frac{1}{2}r+1}$ 确定的函数, 具侧边条件的偏微的解是

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}e^{-\frac{1}{2}(2x-y)+1} = -e^{x+y} + e^{3x+\frac{1}{2}y+1}. \tag{17}$$

如是用 (15) 的通解形式, 则由侧边条件 $u(x, 4x+2) = 0$ 能确定这任意函数 C. 虽然 C 会与 D 不同, 但读者可验证最后结果 (17) 是相同的. 因此, 确实没有必要对指数作任何精巧的变换, 尽管 (16) 看上去比 (15) 更整洁些. □

在例 3, 侧边条件给在直线 $y = 4x + 2$ 上, 该直线不是斜率为 2 的特征线之一. 用与例 3 同样的偏微, 接下来 (参看下面的例 4 和例 5) 举例说明当侧边条件是给在特征线上时会发生什么情况.

例 4 试解具侧边条件 $u(x, 2x-1) = 0$ 的偏微 $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$.

解 在例 3 中 (参看 (16)) 已求得偏微的通解 $u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}D(2x-y)$. 侧边条件给在特征线 $y = 2x - 1$ 上, 由此得

$$0 = u(x, 2x-1) = -e^{3x-1} + e^{4x}D(1) \text{ 或 } D(1) = e^{-x-1}. \tag{18}$$

不论如何选取 D, $D(1)$ 总是常数, 而 e^{-x-1} 不是 x 的常值函数. 于是, 侧边条件 $u(x, 2x-1) = 0$ 无法满足, 所以问题无解. 这里可看出问题在于侧边条件给在一条特征线上, 而 $D(2x-y)$ 在这样的直线上总是取常值. 这就使得无法确定函数 D, 而且具典型地 (但不总是, 参看例 5) 得到像 (18) 中的矛盾, 因此问题无解. 当侧边条件是在非特征线的直线上, 任意函数的变量 (例如,$2x-y$) 不是常数, 则该函数就像例 3 那样可求得. □

例 5 求偏微 $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$ 满足侧边条件 $u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}$ 的解.

解 如同例 3, 偏微的通解为

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}D(2x-y).$$

由侧边条件 (给在特征线 $y = 2x$ 上) 得

$$-e^{3x} + e^{4x} = u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}D(0).$$

在这种情形, 条件能满足, 只要选取 C^1 函数 D 使得 $D(0) = 1$ 即可. 有无穷多满足 $D(0) = 1$ 的 C^1 函数 D, 例如,

$$D(r) = r + 1, \quad D(r) = \cos r \text{ 和 } D(r) = e^r. \tag{19}$$

对应于 (19) 的选择, 分别有如下的解

$$u(x,y)=-e^{x+y}+e^{4x}(2x-y+1),\quad u(x,y)=-e^{x+y}+e^{4x}\cos(2x-y)$$
$$\text{和}\quad u(x,y)=-e^{x+y}+e^{4x}e^{2x-y}.$$

所有这些函数既满足偏微又满足侧边条件. 在例 5 未出现矛盾是由于在侧边条件中函数 $-e^{3x}+e^{4x}$ ① 的特殊选取. 确实, 为了不出现矛盾, 必须选取这函数具有特别形式 $-e^{3x}+ke^{4x}$, k 为某常数. 除了 $D(0)=k$, 则 C^1 函数 D 应该是任意的. 因此, 可见在特征线上给定侧边条件的偏微有解是可能的, 只要侧边条件具有特别形式. 在这种情形, 将会有无穷多的解. 然而, 如果侧边条件中的函数不具有特别形式, 则就像例 4 那样, 问题无解. □

当侧边条件给在特征线上时, 对这些特性有一个简单的几何理由. 因为如果如此选择一个坐标系使得坐标线 (比如 $w=d$) 就是特征线, 则偏微就化为是另一个变量 z 的常微, 变量 z 在每条特征线上充当了位置变量. 因为 v (作为 z 的函数) 在每条特征线 $w=d$ 上满足某个常微, 所以知道 v(或 u) 在这样的线上必具有特别的形式. 由于一阶常微的解典型地由解在一点指定的值所确定, 于是除了只在一点上, 解在整个直线上就不能任意指定. 下面的例子清楚表明在特殊的情形变量变换是不必要的.

例 6 确定函数 $g(x)$ 的形式使得满足侧边条件 $u(x,1)=g(x)$ 的偏微 $u_x-u=0$ 有解.

解 这时特征线为水平直线 $y=d$. 变量 x 可作为每条这样的直线上的位置变量. 另外, 在直线 $y=d$ 上, 偏微成为

$$\frac{\partial}{\partial x}(u(x,d))-u(x,d)=0, \tag{20}$$

此方程有解 $u(x,d)=C(d)e^x$, 其中 $C(d)$ 是随 d 而变化的任意常数. 因此, 在每条特征线上, u 必为一个常数乘 e^x. 特别, 当 $d=1$ 时, $u(x,1)=C(1)e^x$, 所以为了解存在, $g(x)$ 必须具有这种形式. 沿着任一特征线,u 必有特别形式, 因 u 是特殊常微 (20) 的解. 通过粘合每条特征线上的解 $u(x,d)=C(d)e^x$, 得通解 $u(x,y)=C(y)e^x$, 其中 $C(y)$ 是 y 的任意 C^1 函数. 注意如果 u 在与每条特征线 $y=d$ 只相交一个点的非特征线上指定, 则常数 $C(d)$ 将由 u 在交点处指定的值所确定. 根据这个理由, 通过粘合每条特征线上的唯一解, 一个在非特征线上适当的侧边条件将确定一个唯一解. □

①原文误为 $e^{-3x}+e^{4x}$. ——译者

侧边条件不必是给定在直线上.

定义 若要求 u 在某曲线 (如, 圆周, 抛物线, 直线等) 上有指定的值, 则称这样的曲线为**侧边条件曲线**.

为确保偏微 $au_x + bu_y + cu = f(x, y)$ 满足侧边条件的唯一解存在, 需要一些有关侧边条件曲线的假设, 将定义一些术语. **正则曲线**就是其单位切向量关于弧长(假如要沿着弧长来考虑的话) 是连续变化的曲线. 一正则曲线与一直线是**横向**相交的, 如果在每个交点, 交角不为零. 可以证明如下事实 (参看习题 15).

定理 1(存在性和唯一性) 对偏微 $au_x + bu_y + cu = f(x, y)$, 假设给定一正则侧边条件曲线, 该曲线与此偏微的每条特征曲线正好相交一次而且是横向相交的. 还假设 u 在侧边条件曲线上的值是指定的 C^1 函数(即, 函数值定义了沿着侧边条件曲线上的一个弧长变量的 C^1 函数). 则所述偏微有唯一的满足所给的侧边条件的解.

注记 唯一性易由如下事实得出: 一个解在一条特征线上的值由该特征线与侧边条件曲线的交点处的给定的函数值所确定. 侧边条件曲线的正则性和相交处的横向性用来证明把每条特征线上的解粘合起来生成原偏微的 C^1 解. 从前面例子来看, 当侧边条件曲线是直线时, 有兴趣的读者证明定理 1 将不会有什么困难. 注意到横向性条件保证了侧边条件曲线不是特征线 (为什么?). 例 4 和例 5 说明横向性条件是必要的 (也可参看习题 9). 在下面例子中, 侧边条件曲线不是直线而是曲线 $y = x^3$.

例 7 求偏微 $u_x - u_y + u = 0$ 满足条件 $u(x, x^3) = e^{-x}(x + x^3)$ 的解.

解 这里 u 在曲线 $y = x^3$ 上给定. 这条曲线与每条特征曲线 $x + y = d$ 正好相交一次, 而且是横向相交的 (因为曲线 x^3 的斜率是 $3x^2$, 不会等于特征线的斜率 -1). 由 $v(w, z) = u(x, y)$, 其中

$$\begin{cases} w = x + y \\ z = y \end{cases}; \quad \begin{cases} x = w - z \\ y = z \end{cases},$$

原偏微化为 $-v_z + v = 0$. 通解为 $v(w, z) = C(w)e^z$, 从而 $u(x, y) = C(x + y)e^y = D(x + y)e^{-x}$. 为了满足侧边条件, 须如此取 D, 使得 $e^{-x}(x + x^3) =$

$u(x,x^3) = D(x+x^3)e^{-x}$. 可行的选取是函数 $D(r) = r$, 则问题的解是 $u(x,y) = (x+y)e^{-x}$. □

种群分析和存货量分析的应用

在某些自然假设下, 这里来推导和求解一个一阶偏微, 这种偏微支配了个体的种群关于年龄随时间变化的组成方式. 这种个体不必是生物体, 但应是能生产的产品 (如灯泡, 晶体管, 食品), 或更一般地任一类似的物品的集合, 这些物品根据统计样本随着年份会变得不合格. 因此, 这种一阶偏微或许比热方程、波方程和 Laplace 方程有着更广泛的应用.

假设在时刻 t 某种种群年龄在 y 和 $y+\triangle y$ 之间的个体数大约为 $P(y,t)\triangle y$. 换言之, 在一固定时刻 t, $P(y,t)$ 是关于年龄变量 y 的**种群密度**. 则在时刻 t, 年龄在 a 和 b 之间的个体数为 $\int_a^b P(y,t)dy$. 假设年龄在 a 和 b 之间, 在时间间隔 t 到 $t+\triangle t$ 之间死亡的个体数大约为 $D(y,t)P(y,t)\triangle y\triangle t$, 其中 $D(y,t)$ 是由统计, 比方说由观察来确定的函数. 通常认为 "死亡率密度" $D(y,t)$ 是随着 y 的增加而增加 (即, 年龄越大的个体就越可能死亡), 而且由于季节性变化, $D(y,t)$ 会非常依赖于 t(例如, 空调在夏季更容易坏). 如果个体不会消亡 (即,$D(y,t)=0$), 则对任意 y 和时间间隔 $\triangle t$, $0 \leqslant \triangle t \leqslant y$, 有 $P(y,t+\triangle t) = P(y-\triangle t,t)$, 因为在时刻 $t+\triangle t$ 时的种群密度只是在时刻 t 时的种群密度在年龄上经由 $\triangle t$ 的一个迁移. 然而, 如 $D \neq 0$, 则要考虑当时间从 t 到 $t+\triangle t$ 时个体将消亡的数量. 的确,

$$P(y,t+\triangle t) = P(y-\triangle t,t) - \int_0^{\triangle t} D(y-\triangle t+s,t+s)P(y-\triangle t+s,t+s)ds. \quad (21)$$

(21) 两边关于 $\triangle t$ 求导, 然后令 $\triangle t = 0$, 得

$$P_t(y,t) = -P_y(y,t) - D(y,t)P(y,t) \text{ 或 } P_y + P_t + D(y,t)P = 0. \quad (22)$$

P_y 和 P_t 的系数是常数 (都是 1), 但 P 的系数 $D(y,t)$ 不一定是常数. 然而, 这节的所有理论仍可用于形如 $au_x + bu_y + c(x,y)u = f(x,y)$ 的偏微 (即, 只需 u_x 和 u_y 的系数为常数就可通过变量变换把这个偏微化为常微). 对方程 (22), 特征线族是 $y-t=d$. 因此, 作变量变换

$$\begin{cases} w = y-t \\ z = y \end{cases}; \quad \begin{cases} t = z-w \\ y = z \end{cases}. \quad (23)$$

记 $Q(w,z) \equiv P(y,t)$, 有 $P_y + P_t = Q_w w_y + Q_z z_y + Q_w w_t + Q_z z_t = Q_z$, 且 (22) 成为 $Q_z + D(z, z-w)Q = 0$. 积分因子为 $\exp[\int D(z,z-w)dz]$, 可得

$$Q(w,z) = C(w)\exp\Big(-\int_w^z D(\zeta,\zeta-w)d\zeta\Big), \tag{24}$$

其中 $C(w)$ 是任一 C^1 函数, 引入积分下限 w 是为了以后方便, 然而它可用 w 的任何 C^1 函数来代替 (为什么?). 于是,

$$P(y,t) = C(y-t)\exp\Big(-\int_{y-t}^y D(\zeta,\zeta-y+t)d\zeta\Big).$$

如取 $t=0$, 则 $P(y,0)=C(y)$. 因此, $C(y)$ 正好是初始种群密度. 这就是为什么在 (24) 取 w 作为下限. 可得 (记 $\tau \equiv \zeta - y + t$)

$$\begin{aligned} P(y,t) &= P(y-t,0)\exp\Big(-\textstyle\int_{y-t}^y D(\zeta,\zeta-y+t)d\zeta\Big) \\ &= P(y-t,0)\exp\Big(-\textstyle\int_0^t D(y-t+\tau,\tau)d\tau\Big). \end{aligned} \tag{25}$$

注意, 因为 $P(y,0)$ 对 $y<0$(即, 对负年龄) 尚未定义, 所以解 (25) 对 $t>y$ 是未定义的. 对 $y<0$, 这样来定义 $P(y,0)$ 是方便的, 使得 $P(y,0)\cdot\triangle y$ 是近似地在 $|y|$ 和 $|y|+\triangle y$ 之间进入未来的时间单位所产生的个体的数量. 对 $y<0$ 自然地取 $D(y,t)=0$. 则 (25) 对所有的 (y,t) 定义了 $P(y,t)$. 在生产率为常数 (比方为 C) 情形且当 $D(y,t)=D(y)$ 与时间无关 $(y>0)$, 可确定 (利用 (25) 的中间的表达式)**稳态种群密度** $P_\infty(y)$, 它可由当 $t\to\infty$ 获得:

$$P_\infty(y) \equiv \lim_{t\to\infty} P(y,t) = C\exp\Big(-\int_0^y D(\zeta)d\zeta\Big). \tag{26}$$

例 8 一店主每天需要鳄梨的数量是常数 C. 在任何时候, 在一个短时间间隔 $\triangle t$ 天内,一个鳄梨在 y 天之前从货架上取走 (比如由于变质或售出) 的可能性为 $\frac{y}{25}\triangle t$.

(a) C 应该等于多少, 使得最终货架上将有大约 300 个鳄梨?

(b) 假设当 $t=0$ 时该店主接管业务, 初始鳄梨密度为 $P(y,0)=300e^{-y}$. 假设 C 如 (a) 部分那样, 求 $P(y,t)$.

解 这里 $D(y,t)=\frac{y}{25}$, $y\geqslant 0$(且 $D(y,t)=0$, $y\leqslant 0$). 对 (a) 部分, 公式 (26) 表明, 最终鳄梨密度为

$$P_\infty(y)=C\exp(-\int_0^y\frac{\zeta}{25}d\zeta)=C\exp(-\frac{1}{2}(\frac{y}{5})^2).$$

则利用事实 $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, 在现场的鳄梨数为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P_\infty(y)dy&=C\int_0^\infty\exp(-\frac{1}{2}(\frac{y}{5})^2)dy=C\cdot 5\int_0^\infty\exp(-\frac{1}{2}x^2)dx\\&=C\cdot 5\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 6.27\cdot C.\end{aligned}$$

于是, $C\approx 300/6.27\approx 48$. 对 (b) 部分, 利用 (25), 其中 $P(y,0)=C$, $y<0$, $P(y,0)=300e^{-y}$, $y\geqslant 0$. 从而, 当 $y>t$, 由 (25) 得

$$P(y,t)=300e^{-(y-t)}\exp(-\int_{y-t}^y\frac{\zeta}{25}d\zeta)=300\exp(-(y-t)-\frac{t(2y-t)}{50}),\ y>t.$$

回想起当 $y<0$ 时 $D(y)=0$. 因此, 当 $y<0$ 时, (25) 中的从 $y-t$ 到 y 的积分区间可由从 0 到 y 区间来代替. 于是, 由 (25) 得

$$P(y,t)=C\exp(-\int_0^y\frac{\zeta}{25}d\zeta)=\exp(-\frac{1}{2}(\frac{y}{5})^2)=P_\infty(y)\quad 0<y<t.$$

因此, 只要 $0<y<t$, 稳态密度适用. □

概要 2.1

1. 特征线: 平行于 $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ 的直线 $bx-ay=$ 常数(即具有斜率 b/a) 称为是下面一阶偏微的特征线:

$$au_x+bu_y+cu=f(x,y),\tag{S1}$$

其中 a, b 和 c 是常数, 且 $a^2+b^2\neq 0$. 如 $a=0$ 或 $b=0$(即, 如特征线是 $x=d$ 或 $y=d$), 方程 (S1) 可作为一阶线性常微来解. 特征线的几何意义是 au_x+bu_y 本质上是 u 沿着这些直线的方向导数. 于是, 在每条特征线上, (S1) 实际上就是作为沿着该直线的位置变量函数的常微.

2. 变量变换: 偏微 (S1) 用新变量 (w,z) 表示时转化为一个常微 (带参数 w), 在新变量坐标下特征线就是新坐标线 $w=d$. 具体地, 如 $b\neq 0$, 考虑变换

$$\begin{cases} w=bx-ay \\ z=y \end{cases};\quad \begin{cases} x=\frac{1}{b}(w+az) \\ y=z \end{cases} \tag{S2}$$

(即, 特征线现在由 $w=d$ 给出), 令 $v(w,z)\equiv u(x,y)=u(\frac{1}{b}(w+az),z)$ 为 w 和 z 的未知函数. 然后, 由链规则 (例如, $u_x=v_w w_x+v_z z_x=bv_w$ 和 $u_y=v_w w_y+v_z z_y=-av_w+v_z$), (S1) 成为

$$bv_z+cv=f(\frac{1}{b}(w+az),z), \tag{S3}$$

式中没有 v_w. 则 (S3) 可作为 w 为常数的一阶常微来求解 v, 于是 (S1) 的通解为 $u(x,y)\equiv v(bx-ay,y)$. 选 $z=x$ 或某个其他的 x 和 y 的线性组合 (除了 $bx-ay$ 的乘子) 也许更方便, 这取决于 (S1) 中函数 $f(x,y)$ 的形式. 产生的关于 v 的方程仍然不含有 v_w 项, 虽然 v_z 的系数也许不再是如 (S3) 中的 b.

3. 直线上的侧边条件: (S1) 的通解含有一个任意 C^1 函数. 为了选出一个特解, 须给出一个适当的侧边条件. 若要求解在一直线, 比如 $y=mx+d$ 上的点 (x,y) 具有给定的函数值, 则侧边条件是

$$u(x,mx+d)=g(x), \tag{S4}$$

其中 $g(x)$ 是给定的 C^1 函数. 只要 $m\neq b/a$(即, 赋予侧边条件的直线不是特征线), 偏微 (S1) 有唯一的满足侧边条件 (S4) 的解. 换言之, 如 $m\neq b/a$, 侧边条件 (S4) 可用来唯一确定 (S1) 通解中的任意 C^1 函数. 然而, 若侧边条件是给在特征线上 (即, $m=b/a$), 则 (S1) 没有满足 (S4) 的解, 除非 $g(x)$ 具有特殊形式. 如 $g(x)$ 具有这种特殊形式, 则 (S1) 有无穷多满足侧边条件 (S4) 的解.

4. 曲线上的侧边条件: 侧边条件未必是给在直线上. 确实, 若在一正则曲线上 u 的值以 C^1 的方式给定, 该曲线与每条特征线正好横向地相交一次, 则这时 (S1) 的解能唯一确定. 本质的想法是: (S1) 在每条特征线上的解由解在该直线上一点的值所唯一确定, 因为 (S1) 在这直线上是一个常微. 为了确保在每条特征线上的解能粘合成 (S1) 的 C^1 解, 需要侧边条件曲线的正则性和横向性条件.

5. 应用: 在最后部分给出了在种群分析和存货量分析方面的应用.

练习 2.1

1. 求下列偏微的通解, 在 (a)~(d) 中 $u=u(x,y)$.

(a) $2u_x-3u_y=x$, (b) $u_x+u_y-u=0$,

(c) $u_x+2u_y-4u=e^{x+y}$, (d) $3u_x-4u_y=x+e^x$,

(e) $v_z+3v_w=9w^2,\ v=v(w,z)$, (f) $g_t-cg_x=0,\ g=g(x,t)$ ($c=$ 常数).

2. 求 $u_x+2u_y-4u=e^{x+y}$ 满足下列侧边条件的特解.

(a) $u(x,0)=\sin(x^2)$, (b) $u(0,y)=y^2$, (c) $u(x,-x)=x$.

3. 证明满足侧边条件 $u(x,x)=\tan x$ 的偏微 $u_x+u_y-u=0$ 是无解的.

4. 为使下面问题有解, $g(x)$ 须具什么形式?

$$u_x+3u_y-u=1,\ u(x,3x)=g(x).$$

若 $g(x)$ 具有所要求的形式, 会有不只一个解吗?

5. 当 $g(x)=-1+2e^x$, 写出习题 4 中偏微两个不同的解.

6. 求解问题: $u_x-2u_y=0,\ u(x,e^x)=e^{2x}+4xe^x+4x^2$.

7. 令 a, b 和 c 为常数且 $ab\neq 0$. 考虑齐次线性偏微 $au_x+bu_y+cu=0$. Bob 说通解由 $u(x,y)=e^{-cx/a}f(bx-ay)$ 给出, 其中 f 是任意 C^1 函数, 而 Jane 说通解是 $u(x,y)=e^{-cy/b}g(bx-ay)$, g 是任意 C^1 函数. 哪位正确?

8. (a) 证明偏微 $u_x=0$ 没有处处 C^1 的且满足侧边条件 $u(x,x^2)=x$ 的解.

(b) 在第一象限 $x>0,\ y>0$ 求 (a) 中问题的解.

(c) 用侧边条件曲线与特征线的交点来解释 (a) 和 (b) 的结果.

9. (a) 证明偏微 $u_x=0$ 没有处处 C^1 且满足侧边条件 $u(x,x^3)=x$ 的解, 即使侧边条件曲线 $y=x^3$ 与每条特征线 ($y=d$) 只相交一次.

(b) (a) 部分说明侧边条件曲线与特征线的交点的横向性条件的必要性. 解释为什么. **提示** 曲线 $y=x^3$ 以什么角度与 x–轴相交?

10. (a) 证明齐次偏微 $au_x+bu_y+cu=0$ 不可能在平面上一点且只有一点为零.

(b) 若 (a) 中偏微 $c=0$, 则证明解 u(处处有定义) 的图像 $z=u(x,y)$ 是由水平的平行线组成的曲面.

11. 在例 8(b) 中, 在时刻 t 后将有多少原始鳄梨 (在 $t=0$ 时就已存在的) 剩下来? 你的答案应该是 t 的函数.

12. 在例 8 中, 现假设在任意给定的日子, 不管存期如何鳄梨都以 10% 机会被从货架上取走 (即更精确地, $D(y)=0.1,\ y>0$).

(a) 证明最终将有大约 $Ce^{-y/10}y$ 天存期的鳄梨留在货架上.

(b) 根据 (a) 部分, C 的值应是多少, 如果最终仍将有大约 300 个鳄梨留在货架上的话. 你的答案与常识相符吗?

13. 空调以每月 100 台的常数速率从元旦开始生产. 假设在元旦以来已过了 t 月, 在一个小的时间间隔 Δt 月, 不管空调的年龄如何, 它损坏的可能性为 $(0.2-0.1\cdot\cos\frac{\pi t}{6})\Delta t$. 到年底大约有多少 y 月年龄的空调在工作? 其中 $y\leqslant 12$. 怎样来确定在年底工作着的空调总数? 如果你有数值积分的资源, 请计算这个数字.

提示 用公式 (25) 时, 请记住 $D(y,t)=0,\ y<0$.

14. 某种种群具有初始种群密度 $C(y),\ y\geqslant 0$. 在时刻 t 的种群出生率与在时刻 t 的种群总数成正比, 记为 $\alpha\int_0^\infty P(y,t)dy,\ \alpha>0$ 为常数. (假设 $\int_0^\infty C(y)dy<\infty$.) 死亡率是常数, 记为 $D(y,t)=k,\ y\geqslant 0$, 某个 $k>0$. 对所有的 $y,\ t>0$ 求种群密度 $P(y,t)$.

提示 首先注意到公式 (25) 适用, 但当 $t>y$ 时 $P(y-t,0)$ 尚未知. 令 $f(t)=P(0,t)$(即,($f(t)$ 是在时刻 t 的出生率). 一旦 $f(t)$ 确定, 则 $P(y-t,0)=f(t-y),\ t>y$(为什么?), 则解可由 (25) 明确给出. 为求 $f(t)$, 注意到

$$\begin{aligned}f(t)&=\alpha\int_0^\infty P(u,t)du=\alpha\int_0^t P(u,t)du+\alpha\int_t^\infty P(u,t)du\\&=\alpha\int_0^t P(u-t,0)e^{-ku}du+\alpha\int_t^\infty C(u-t)e^{-ku}du\\&=\alpha\int_0^t f(t-u)e^{-ku}du+\alpha e^{-kt}\int_0^\infty C(u)du.\end{aligned}$$

最后的积分是初始种群的总数, 记其为 p_0. 在最后式子的第一个积分作变量变换 $v=t-u$, 得 $e^{kt}f(t)=\alpha\int_0^t f(v)e^{kv}dv+\alpha p_0$. 现可求导.

15. 通过完成下列步骤来证明定理 1. 设 $(h(s),k(s))$ 为定理 1 中侧边条件曲线以弧长 s 为参数的参数化.

(a) 对平面上的每点 (x,y), 证明存在唯一的数 $\sigma(x,y)$ 和 $\tau(x,y)$, 使得 $x=h(\sigma(x,y))+a\tau(x,y)$ 和 $y=k(\sigma(x,y))+b\tau(x,y)$.(画个图.)

(b) 利用 (a) 部分的函数 $\sigma(x,y)$ 和 $\tau(x,y)$, 证明由变量变换

$$\begin{cases}s=\sigma(x,y)\\t=\tau(x,y)\end{cases};\quad\begin{cases}x=h(s)+at\\y=k(s)+bt\end{cases}$$

以及记 $v(s,t)\equiv u(x,y)$, 偏微 $au_x+bu_y+cu=f(x,y)$ 化为 $v_t+cv=F(s,t)$, 其中 $F(s,t)\equiv f(h(s)+at,k(s)+bt)$. **提示** 注意到 $v_t=u_xx_t+u_yy_t$.

(c) 证明 $v(s,t)=e^{-ct}\left(\int_0^t e^{cr}F(s,r)dr+U(s)\right)$, 其中 $U(s)=v(s,0)=u(h(s),k(s))$ 是 C^1 函数, 指定了 u 在侧边条件曲线上的值. 于是, 定理 1 中问题的唯一解是 C^1 函数 $u(x,y)=v(\sigma(x,y),\tau(x,y))$. (注意到 Jacobi 行列式 $x_sy_t-y_sx_t=$

$h'(s)b - k'(s)a \neq 0$(为什么?), 所以据反函数定理 σ 和 τ 是 C^1 的, 反函数定理可见于许多高等微积分书籍, 例如, [Taylor 和 Mann].)

§2.2 变系数

在许多应用中出现的是一阶变系数线性偏微

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \quad u = u(x,y), \tag{1}$$

其中 a, b, c 和 f 是给定的 x 和 y 的 C^1 函数. 注意 $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$ 是 u 在点 (x,y) 沿向量方向

$$\mathbf{g}(x,y) = a(x,y)\mathbf{i} + b(x,y)\mathbf{j}$$

的方向导数. 在第 2.1 节, a 和 b 为常数, 这个向量有固定的方向和摸, 但现在该向量会随基点 (x,y) 不同而变化. 因此, $\mathbf{g}(x,y)$ 是平面上的向量场. 把 $\mathbf{g}(x,y)$ 看作 xy–平面上流体流 (在点 (x,y)) 的速度是有益的. 当 a 和 b 为常数时, 流体的流线是斜率为 b/a 的直线 (即, 具平行于 $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ 的切线向量), 因此它们是特征线. 当 a 和 b 不是常数时, 流线一般将是弯曲的, 把这种流线称作特征曲线. 更精确地, 有下面定义.

定义 1 xy–平面上一曲线称为是偏微 (1) 的**特征曲线**, 如果在曲线上每点 (x_0,y_0), 向量 $\mathbf{g}(x_0,y_0) = a(x_0,y_0)\mathbf{i} + b(x_0,y_0)\mathbf{j}$ 与曲线相切.

在特征曲线上每点, 可得 $\mathbf{g}\cdot\nabla u$(或 $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$) 是 u 沿着切线向量方向的方向导数, 因而 $\mathbf{g}\cdot\nabla u$ 与 u 关于沿着曲线的位置变量的导数成比例. 于是, 犹如常数情形, 在每条特征曲线上, 偏微 (1) 实际上是一个作为沿着曲线的位置变量函数的常微. 若特征曲线是函数 $y(x)$ 的图像 (即, 假设 $a(x,y)\neq 0$), 则定义 1 隐含了

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{2}$$

(即 $y(x)$ 的图像在 (x,y) 处的切线与 $\mathbf{g}(x,y) = a(x,y)\mathbf{i} + b(x,y)\mathbf{j}$ 平行).

常微 (2) 称为是偏微 (1) 的**特征方程**. 特征方程的解曲线是 (1) 的特征曲线.

当 a 和 b 是常数情形,(2) 的通解简明地就是 $y = \frac{b}{a}x +$ 常数, 或 $bx - ay = d$, 其中 d 是任意常数. 在变系数的一般情形, 求解 (2) 可能是相当困难的, 但假设 (2) 已经解出, 且假设解以隐式形式 $h(x,y) = d$ 给出, 这里 d 是任意常数. 通过作下面变换可化简偏微 (1)

$$w = h(x,y) \quad \text{和} \quad z = y, \tag{3}$$

就如当 a 和 b 是常数时作的那样 (例如, 在此特殊情形,$h(x,y) = bx - ay$.). 这个过程的基本原理是 w 在每条特征曲线上是常数并且原偏微化为一个沿着这些特征曲线的位置变量 z 的常微. 如前,$z = y$ 的选取不是必要的. 确实, 可令 z 为任意 x 和 y 的 C^1 函数, 只要这个变换可反过来用 z 和 w 来表示 x 和 y. 置 $v(w,z) = u(x,y)$, 可验证 (1) 转化为一个视 w 固定, 关于 z 的常微. 先计算

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= a(v_w w_x + v_z z_x) + b(v_w w_y + v_z z_y) \\ &= (aw_x + bw_y)v_w + (az_x + bv_y)v_z. \end{aligned}$$

因此, 为了在这个变形过的关于 v 的偏微没有 v_w , 只消证明在任意点 $(x, y(x))$, $aw_x + bw_y = 0$. 为此, 令 (x_0, y_0) 为任给一点, 令 $y(x)$ 是 (2) 满足 $y(x_0) = y_0$ 的解. 已知 $h(x, y(x)) =$ 常数, 因而利用 (2),

$$0 = \frac{d}{dx}h(x,y(x)) = h_x + h_y\frac{dy}{dx} = w_x + w_y\frac{b(x,y)}{a(x,y)}.$$

于是, 在任意点 $(x, y(x))$, $aw_x + bw_y = 0$. 特别, 在任意给定的点 (x_0, y_0), $aw_x + bw_y = 0$. 另一种证法, 回想起 ∇h 跟任一水平曲线 $h(x,y) = d$ 垂直, 并构造 $\mathbf{g} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ 与该水平曲线相切. 于是, $aw_x + bw_y = \mathbf{g} \cdot \nabla h = 0$. 虽然已证明了上述方法可行, 但许多情况表明 (3) 只在 xy–平面上某个区域上可逆. 这说明有一些小心的必要, 就如在下面一些例子将看到的那样.

例 1　求下列偏微的通解:

$$-yu_x + xu_y = 0. \tag{4}$$

解　特征方程是 $dy/dx = -x/y$. 这是可分离方程, 经分离变量和积分立刻解得

$$ydy = -xdx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}d.$$

因此, 特征曲线组成圆族 $x^2+y^2=d$ $[d>0]$ 和点 $(0,0)$ $[d=0]$. 作变量变换

$$\begin{cases} w=x^2+y^2 \\ z=y \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{w-z^2} \\ y=z \end{cases}. \tag{5}$$

虽然有逆变换是双值的且只定义在 $w\geqslant z^2$ 这样的事实, 但仍将得到正确的解. 置 $v(w,z)=u(x,y)$, 偏微 (4) 化为

$$\begin{aligned} 0&=-yu_x+xu_y=-y(v_w w_x+v_z z_x)+x(v_w w_y+v_z z_y) \\ &=-(y\cdot 2x-x\cdot 2y)v_w+xv_z=xv_z, \end{aligned}$$

(即, $xv_z=0$). 因此, 若 v 是 w 的 C^1, 设为 $v=f(w)$, 猜测

$$u(x,y)=f(x^2+y^2) \tag{6}$$

将是原偏微的解, 尽管变换 (5) 有缺陷. 确实, 可直接验证解 (6):

$$-yu_x+xu_y=-yf'(x^2+y^2)2x+xf'(x^2+y^2)2y=0.$$

这表明 (6) 是解. 在获得 "假设性的解" 的过程中将常借助于试验性方法, 但只有当它们是被实际验证过的才能证明它们确实是解. 尚未最后证明 (6) 是通解. 一个解具有形式 (6) 的充要条件是解在每一圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上为常值. 我们应该来验证 (4) 的任意解在这些特征圆周上必为常数. 为此, 通过下面把这些圆周参数化

$$x(t)=a\cos(t),\ y(t)=a\sin(t),\ a>0. \tag{7}$$

随着 t 的变化,$(x(t),y(t))$ 就描绘出圆周 $x^2+y^2=a^2$. u 在 $(x(t),y(t))$ 处的值是 t 的函数, 记为 $U(t)=u(x(t),y(t))$. 希望证明 $U(t)$ 是常数, 所以 u 在任意圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上为常数. 为此, 根据偏微 (4) 来计算:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}&=\frac{d}{dt}u(x(t),y(t))=u_x x'(t)+u_y y'(t)=-u_x a\sin(t)+u_y a\cos(t) \\ &=-u_x(x(t),y(t))y(t)+u_y(x(t),y(t))x(t)=0. \end{aligned}$$

因此, 该偏微表明函数 u 在特征圆周上取常值, (6) 事实上就是通解形式. □

注记 在例 1, 函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不必是 C^1 的. 例如, 若 $f(z)=3z^{2/3}$, 则 $u(x,y)=3(x^2+y^2)^{2/3}=3r^{4/3}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$, 它仍为 C^1 的, 即使 $f'(z)=2z^{-1/3}$ 在 $z=0$ 处无定义. 像这样的技术性的难点会在 "临界点" (x_0,y_0) 发生,

在其上 $a(x_0,y_0)=0$ 和 $b(x_0,y_0)=0$. 在例 1, 仍然可说所有的解具有形式 (6), 但 $f(z)$ 是 C^1 的要求在 $z=0$ 处可放松一些. 对这种问题的关心程度将留给教师. 然而, 应该注意到若 $h(x,y)$ 是 C^1 的且对一开集 S 中的所有的点 (x,y), $\nabla h(x,y)\neq 0$, 则 $f(h(x,y))$ 在 S 上是 C^1 的充要条件是 f 在 $h(S)$ 上是 C^1 的. 因此, 要使 (1) 的解是 C^1 的, 若 $\nabla h(x_0,y_0)\neq 0$, 积分的任意函数在 $h(x_0,y_0)$ 附近当然必须是 C^1 的. □

特征曲线的首选参数化

在例 1, 通过 $x(t)$ 和 $y(t)$ 把一特征曲线参数化, 并定义了函数 $U(t)=u(x(t),y(t))$, 它仅是在 "时刻"t 时 u 沿着该特征线的值. 根据偏微 (4), 发现 $U(t)$ 满足常微 $U'(t)=0$. 对一般的一阶线性偏微 (1), 这分节的主要目的是明确证明: 如当 t 变化使 $(x(t),y(t))$ 描绘出一条特征曲线, 则函数 $U(t)=u(x(t),y(t))$ 必满足某个常微.

一粒子能以多种方式沿着一特征曲线运动 (例如, 快速的, 缓慢的, 等等). 也许最自然的方式是让粒子在点 (x,y) 时, 它的速度为 $\mathbf{g}(x,y)=a(x,y)\mathbf{i}+b(x,y)\mathbf{j}$ (即, 粒子是由速度为 $\mathbf{g}(x,y)$ 的流体流携带运动似的). 以这种方式运动的粒子, 在时刻 t 确定粒子位置 $(x(t),y(t))$ 的函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 必须满足方程组

$$\frac{dx}{dt}=a(x(t),y(t)),\quad \frac{dy}{dt}=b((x(t),y(t)). \tag{8}$$

由于粒子的速度向量 $x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}$ 跟它的轨道相切, 于是可知 (8) 确保点 $(x(t),y(t))$ 绘出偏微 (1) 的一条特征曲线.

定义 2 方程组 (8) 称为是偏微 (1) 的**特征方程**. 如 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是这个方程组的解, 则 $(x(t),y(t))$ 称为是随着 t 变化由它绘出的特征曲线的**首选参数化**.

在第 1.1 节, 求解了形如 (8) 的方程组的简单情形, 其中 $a(x,y)$ 和 $b(x,y)$ 是 x 和 y 线性组合. 通常, 只考虑特征方程组可容易求解的问题. 对例 1 中考虑的偏微, 方程组 (8) 是 $x'(t)=-y(t)$, $y'(t)=x(t)$. 对第一个方程求导然后利用

第二式子, 得 $x''(t) = -y'(t) = -x(t)$ 或 $x''(t) + x(t) = 0$. 于是,

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \text{和} \quad y(t) = -x'(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t. \tag{9}$$

对常数 c_1 和 c_2 的任一组选取, 描绘出一条特征曲线 (这时, 是一个圆周或一个点). 在例 1 的 (7) 中, 为方便起见选了 $c_1 = a$ 和 $c_2 = 0$.

假设 $(x(t), y(t))$ 是下面偏微的特征曲线的首选参数化

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y). \tag{10}$$

令

$$U(t) = u(x(t), y(t)),\ C(t) = c(x(t), y(t)) \text{ 和 } F(t) = f(x(t), y(t)). \tag{11}$$

为了找出 $U(t)$ 须满足的常微, 来计算

$$\begin{aligned}
U'(t) &= u_x(x(t), y(t))x'(t) + u_y(x(t), y(t))y'(t) \quad (\text{由链规则}) \\
&= u_x(x(t), y(t))a(x(t), y(t)) + u_y(x(t), y(t))b(x(t), y(t)) \quad (\text{由 } (8)) \\
&= -c(x(t), y(t))u(x(t), y(t)) + f(x(t), y(t)) \quad (\text{由偏微 } (10)) \\
&= -C(t)U(t) + F(t) \quad (\text{由 } (11)).
\end{aligned}$$

从而, 证明了 $U(t) = u(x(t), y(t))$ 必满足常微

$$U'(t) + C(t)U(t) = F(t). \tag{12}$$

令 $m(t) = \exp\left(\int_0^t C(\tau)d\tau\right)$ 是 (12) 的积分因子, 得解

$$U(t) = \frac{1}{m(t)}\left(\int_0^t m(\tau)F(\tau)d\tau + U(0)\right). \tag{13}$$

在这个公式中, $m(t)$ 和 $F(t)$ 只依赖于 $c(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 沿着特征曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 上的值. 于是, (13) 表明, 一旦 $U(0) = u(x(0), y(0))$ 的值指定, 解 u 沿着整个特征曲线的值 $U(t)$ 就可完全确定. 若 $c(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 为零, 如例 1, 则 (13) 表明 u 在每条特征曲线上为常数. 然而, 常数随着特征线的不同而变化. 例如, 例 1 的特解 $u(x,y) = (x^2 + y^2)^3$ 在半径为 2 的圆周上是 64, 而在半径为 1 的圆周上是 1. 若 $c(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 不为零, 则 $U(t)$ 未必是常数, 虽然 (13) 表明 $U(t)$ 必具有某种仅依赖于 $U(0)$ 的选取的形式. 所以, 一般无法指定 u 在一条特征曲线上两个不同点的值, 就如下面例子所表明的那样.

例 2　证明问题 $-yu_x + xu_y = 0$, $u(x,0) = 3x$ 无解.

解　侧边条件给在 x–轴, 它与每条特征圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 相交两次, 交于 $(a,0)$ 和 $(-a,0)$, $a \neq 0$. 在例 1 中可知 $u(x,y)$ 在每条这样的圆周上为常数, 然而侧边条件要求 $u(a,0) = 3a$ 和 $u(-a,0) = -3a$. 因此, 这个侧边条件对原偏微的解无法满足. 出现这样的问题是因为不能在任一特征曲线上不同的两点指定 u 的值. 在一特征线上一点 u 的值给定, 则根据沿着该曲线 u 是一确定的常微 (12) 的解 (13) 这样的事实, u 在该特征曲线上的其他点上的值就唯一确定了. □

注记　有时, 如果侧边条件小心选取, 问题可仍然有解, 即使特征曲线与侧边条件曲线有多于一次的交点. 例如, 问题 $-yu_x + xu_y = 0, u(x,0) = 3x^2$ 有解 $u(x,y) = 3(x^2 + y^2)$. 这个侧边条件的可取之处是 $u(a,0) = 3a^2 = u(-a,0)$. □

解的参数形式

已经看到, 为了方便起见把偏微

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \tag{14}$$

的特征曲线看作粒子是以速度为 $\mathbf{g}(x,y) = a(x,y)\mathbf{i} + b(x,y)\mathbf{j}$ 的流体流的运动. 粒子的位置 $(x(t), y(t))$ 由在时刻 $t = 0$ 时粒子起始位置 $(x(0), y(0))$ 完全确定. 若一侧边条件给定在某条与每条特征曲线正好横向相交一次的正则侧边条件曲线上, 则取粒子在每条特征曲线上的起始位置作为特征曲线与侧边条件曲线的交点是方便的. 若令 s 表示沿着侧边条件曲线的位置变量, 则对每个 s 的值得到不同的特征曲线. 对每个固定的 s, 令 $(X(s,t), Y(s,t))$ 为粒子在时刻 t 的位置, 它开始于在侧边条件曲线对应于 s 的点并以流体流动.

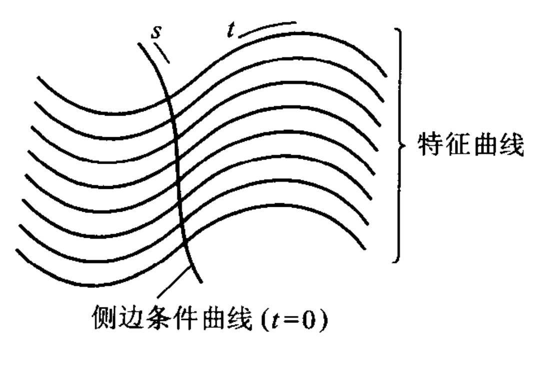


图 1

注意到侧边条件曲线本身是随着 s 变化且 t 保持为 0 时由 $(X(s,0), Y(s,0))$ 描

绘而来. 换言之, 有下面的: 函数 $X(s,t)$ 和 $Y(s,t)$ 是下面特征方程组具给定的初始值 $X(s,0)$ 和 $Y(s,0)$ 的解 (对每个固定的 s)

$$\frac{d}{dt}X(s,t) = a(X(s,t),Y(s,t)),\ \frac{d}{dt}Y(s,t) = b(X(s,t),Y(s,t)). \tag{15}$$

假设 u 在侧边条件曲线上的点的值由下式给定

$$u(X(s,0),Y(s,0)) = G(s), \tag{16}$$

其中 $G(s)$ 是给定的 C^1 函数. 可通过以下来求得 $u(X(s,t),Y(s,t))$. 令

$$\begin{gathered} U(s,t) = u(X(s,t),Y(s,t)),\ C(s,t) = c(X(s,t),Y(s,t)), \\ F(s,t) = f(X(s,t),Y(s,t)) \end{gathered} \tag{17}$$

和

$$m(s,t) = \exp\Big(\int_0^t C(s,\tau)d\tau\Big).$$

则可用前分节的结果 (13), 对每个固定的 s, 得

$$U(s,t) = \frac{1}{m(s,t)}\Big(\int_0^t m(s,\tau)F(s,\tau)d\tau + G(s)\Big). \tag{18}$$

由 (17) 可知 $U(s,t)$ 是 u 在点 $(X(s,t),Y(s,t))$ 上的值. 因此, 当 s 和 t 变化时, xyu-空间上由

$$x = X(s,t),\ y = Y(s,t),\ u = U(s,t) \tag{19}$$

给出的点 (x,y,u) 描绘了偏微 (14) 满足侧边条件 (16) 的解 u 的图像.

方程 (19) 构成了 (14) 满足条件 (16) 的解的**参数形式**.

虽然 (19) 没有直接给出 $u(x,y)$ 的公式, 但可能从方程 $x=X(s,t)$ 和 $y=Y(s,t)$ 解得用 x 和 y 来表示 s 和 t, 设为 $s=S(x,y)$, $t=T(x,y)$. 则 $u(x,y)=U(S(x,y),T(x,y))$ 将是解的通常的显形式. 为了生成在 xyu–空间解的图像的三维计算机标绘图, 把解留作 (19) [①]形式通常是方便的 (参看下面的图 2).

例 3 求下面问题解的参数形式

$$-yu_x+xu_y=0,\ u(s,s^2)=s^3\ (s>0). \tag{20}$$

解 由 (15), 特征曲线 $(X(s,t),Y(s,t)$ 可通过解下面问题得到

$$\frac{d}{dt}X(s,t)=-Y(s,t),\ \frac{d}{dt}Y(s,t)=X(s,t) \tag{21}$$

具初始条件

$$X(s,0)=s,\ Y(s,0)=s^2.$$

这个方程组的通解是 (参看 (9))

$$X(s,t)=c_1(s)\cos t+c_2(s)\sin t,\quad Y(s,t)=c_1(s)\sin t-c_2(s)\cos t.$$

由初始条件, 得 $c_1(s)=s$, $c_2(s)=-s^2$. 对 (20) 的偏微, 有 $c(x,y)=0$ 和 $f(x,y)=0$ (参看 (14)). 因此, (17) 中的 $m(s,t)=1$ 和 $F(s,t)=0$. 根据 (20) 和 (16), 得 $G(s)=s^2$, 从而由 (18), $U(s,t)=s^3$. 于是, 得参数解

$$X(s,t)=s\cos t-s^2\sin t,\quad Y(s,t)=s\sin t+s^2\cos t,\quad U(s,t)=s^3. \tag{22}$$

当 $t=0$ 并且 s $(s>0)$ 变化时, 得到 xyu–空间的点 (s,s^2,s^3), 它绘出所谓的三次挠线. 当 t 变化, 这条曲线上的点绕着 u–轴作圆周运动. 于是, 解的图像是通过把三次挠线绕 u–轴旋转得到的曲面, 如在图 2 所示. 也能得到解的显形式. 由例 1 可知通解具有形式 $u(x,y)=C(x^2+y^2)$. 因此, 侧边条件表明 $C(s^2+s^4)=s^3$. 置 $r^2=s^2+s^4$, 得 $s^2=(-1+\sqrt{1+4r^2})/2$. 于是, 由 $C(r^2)=s^3$ 得

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(-1+\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

若侧边条件曲线换成 (s,s^7), 则由于在求解中用 r^2 来表示 s^2 的困难, 解的显形式就难得到 (如果并非不可能的话). 然而, 在解的参数形式中, 可简单地在 (22) 中用 s^7 来代替 s^2. □

[①] 原文误为 (18).——译者

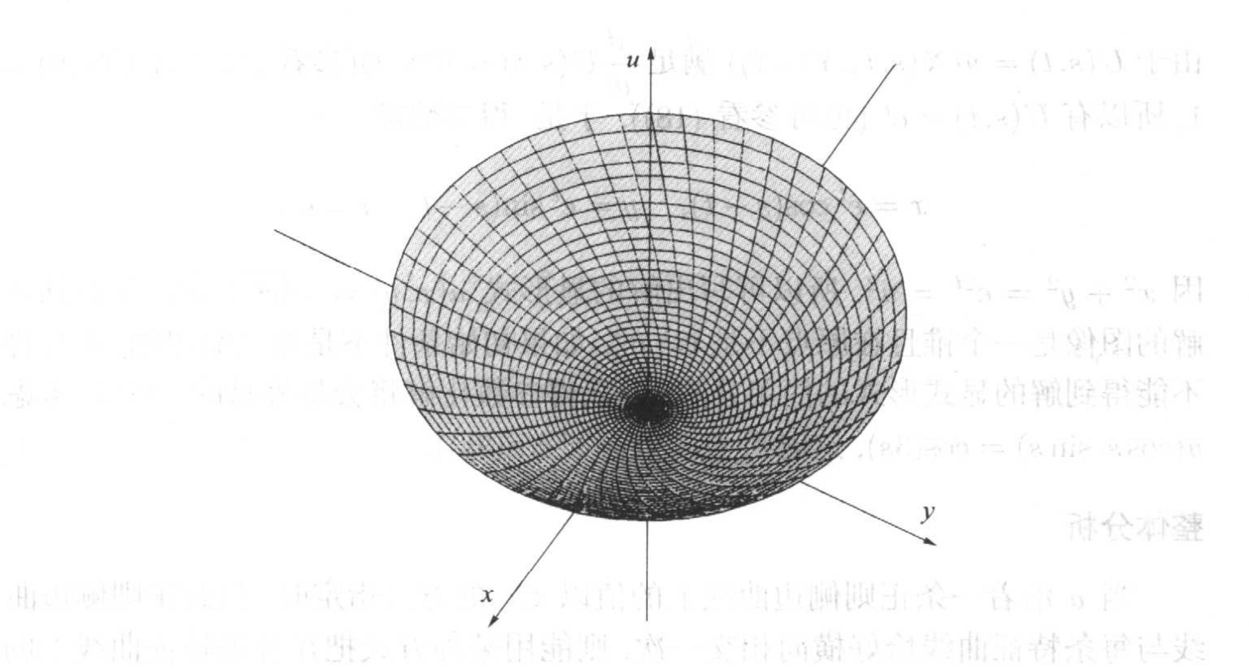


图 2

例 4 求解 $(y+x)u_x+(y-x)u_y=u$, 满足条件 $u(\cos t,\sin t)=1,\ 0\leqslant s\leqslant 2\pi$.

解 侧边条件表明 u 在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上为 1. 特征方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$ (参看 (2)) 既不是可分离的也不是线性的, 虽然在相关的变量变换 $y(x)=xz(x)$ 下它可化为可分离的. 但这里选用参数化方法. 特征方程组 (参看 (15)) 是 (s 固定)

$$\frac{d}{dt}X(s,t)+X(s,t)+Y(s,t) \text{ 和 } \frac{d}{dt}Y(s,t)=-X(s,t)+Y(s,t), \tag{23}$$

初始条件为

$$X(s,0)=\cos s,\quad Y(s,0)=\sin s.$$

用第 1.1 节中的方法来求解该方程组. (23) 中的第一个方程关于 t 求导然后利用第二个方程, 得 $X''=X'+Y'=X'+(-X+Y)=X'+(-X+X'-X)$ 或 $X''-2X'+2X=0$. 辅助方程 $r^2-2r+2=0$ 的根是 $1\pm i$. 因此, 利用 $Y=X'-X$

$$X(s,t)=c_1(s)e^t\cos t+c_2(s)e^t\sin t \text{ 和 } Y(s,t)=-c_1(s)e^t\sin t+c_2(s)e^t\cos t.$$

对固定的 s, 这些曲线 $(X(s,t),Y(s,t))$ 当 t 增加时盘旋离开原点. 由初始条件, 得 $c_1(s)=\cos s$ 和 $c_2(s)=\sin s$. 从而

$$X(s,t)=\cos s\ e^t\cos t+\sin s\ e^t\sin t=e^t\cos(s-t) \text{ 和 } Y(s,t)=e^t\sin(s-t).$$

由于 $U(s,t)=u(X(s,t),Y(s,t))$ 满足 $\frac{d}{dt}U(s,t)=U(s,t)$(参看 (12)) 且 $U(s,0)=1$, 所以有 $U(s,t)=e^t$ (也可参看 (18)). 于是, 得参数解

$$x=e^t\cos(s-t),\quad y=e^t\sin(s-t),\ u=e^t.$$

因 $x^2+y^2=e^{2t}=u^2$, 所以可写出解的显形式 $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. 注意到该解的图像是一个锥且在原点不是 C^1 的. 如果初始条件不是这么简单的, 那也许不能得到解的显式形式的简单公式; 但获得参数化解将会是容易的 (例如, 考虑 $u(\cos s,\sin s)=\cos(3s)$, 这时得 $U(s,t)=e^t\cos(3s)$). □

整体分析

当 u 沿着一条正则侧边曲线上的值以 C^1 的方式指定时, 且此正则侧边曲线与每条特征曲线恰好横向相交一次, 则能用某种方式把在各条特征曲线上的解粘合起来. 然而, 如在下面例子说明的那样, 会出现没有一条侧边条件曲线横向相交一次地穿过每条特征曲线. 在这样的情形, 构造在整个 xy–平面上 (即, 整体地) 有定义的解可导致一些有兴趣的复杂情况.

例 5 求偏微的通解:

$$xu_x-yu_y+yu=0. \tag{24}$$

解 求得特征曲线的形式为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\ \text{或}\ \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0.$$

积分, 得 $\ln|x|+\ln|y|=\ln|d|$. 因此, 特征曲线族是曲线 $xy=d$ 的集合 (当 $d\neq 0$ 时是双曲线). 根据首选参数化观点, 双曲线 $xy=d$ 的两支应视为不同的特征曲线. 确实, 首选参数化 $(x(t),y(t))$ 的方程组是 $x'(t)=x(t)$, $y'(t)=-y(t)$, 其解是 $x(t)=c_1e^t$, $y(t)=c_2e^{-t}$. 对固定非零的 c_1 和 c_2, 点 (c_1e^t,c_2e^{-t}) 只绘出双曲线 $xy=c_1c_2$ 的一支. 像例 1 那样, 作如下变量变换来继续进行通解过程

$$\begin{cases}w=xy\\ z=y\end{cases};\quad \begin{cases}x=w/z\\ y=z\end{cases}. \tag{25}$$

逆变换不是处处有定义的 (只对 $z\neq 0$ 有定义). 这将导致一些未料到的困难. 置 $v(w,z)=u(x,y)$, 得 $xu_x-yu_y=x(v_ww_x+v_zz_x)-y(v_ww_y+v_zz_y)=(xy-$

$yx)v_w - yv_z = -yv_z$. 因此, 原偏微化为 $-zv_z + zv = 0$, 其解为 $v(w,z) = C(w)e^z$. 于是, 得到假设解

$$u(x,y) = C(xy)e^y, \tag{26}$$

其中 C 是任一 C^1 函数. 虽然可直接验证 (26) 是解, 但这次要证明 (26) 不是通解. 可看出解 (26) 在每条双曲线的分支上是函数 $C(d)e^y$, 而这些分支是分离的, 所以没有理由为什么解在每条分支上得有 e^y 的相同的乘子. 注意到如果把 u 的区域限制在上半平面 $y > 0$, 则每条双曲线 $xy = d$ 只有一个分支, 所以 (26)①事实上将是在半平面 $y > 0$ 上的通解. 如果限制在 $y < 0$, 类似的评注适用. 假设我们试图通过下面定义来粘合在每个半平面上的通解

$$u(x,y) = \begin{cases} C(xy)e^y, & y \geqslant 0, \\ D(xy)e^y, & y \leqslant 0. \end{cases} \tag{27}$$

其中 C 和 D 是 C^1 函数. 的确, (27) 对于 $y > 0$ 和 $y < 0$ 是原偏微的 C^1 解, 然而须确定 u 在 x–轴上的点 $(y = 0)$ 有定义且是 C^1 的. 要使 u 有定义, 就得有 $C(0) = D(0)$ (即, 公式在 $y = 0$ 处必须一致). 再者, 对 $y \geqslant 0$, 有 $u_x(x,y) = C'(xy)ye^y$, 且对 $y \leqslant 0$, 有 $u_x(x,y) = D'(xy)ye^y$. 因此, 在两种情形都有 $u_x(x,0) = 0$, u_x 有定义且是连续的. 于是

$$u_y(x,y) = \begin{cases} C'(xy)xe^y + C(xy)e^y, & y \geqslant 0, \\ D'(xy)xe^y + D(xy)e^y, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

为使公式在 $y = 0$ 处相等, 需要 $C'(0) = D'(0)$. 于是, 只要假设 $C(0) = D(0)$ 和 $C'(0) = D'(0)$, (27) 是一个解. 的确, (27) 是原偏微的通解, 其中 C 和 D 是满足 $C(0) = D(0)$ 和 $C'(0) = D'(0)$ 的任意 C^1 函数. 例如, 取 $C(r) = r$ 和 $D(r) = \sin r$, 得特解

$$u(x,y) = \begin{cases} xye^y, & y \geqslant 0, \\ \sin(xy)e^y, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

注意到这样的事实是有趣味的: 为使 $u(x,y)$ 对所有的 x 和 y 有定义, 则 (27) 中的函数 C 和 D 每个必须对所有的实数有定义. 这样, 就得到一个一阶偏微的例子, 它需要两个任意函数来表示其通解. 这就导致一个有趣的问题. 存在能唯一确定偏微 (24) 的解的侧边条件吗? 答案是 "没有" 似乎是合理的, 因为这个侧边

①原文误为 (11).——译者

条件将确定两个任意函数 C 和 D. 的确, 赋予侧边条件的曲线将要穿过每条双曲线 $xy = d$ 的每个分支一次且只有一次. 考虑下面图 3 中显示的四个分支.

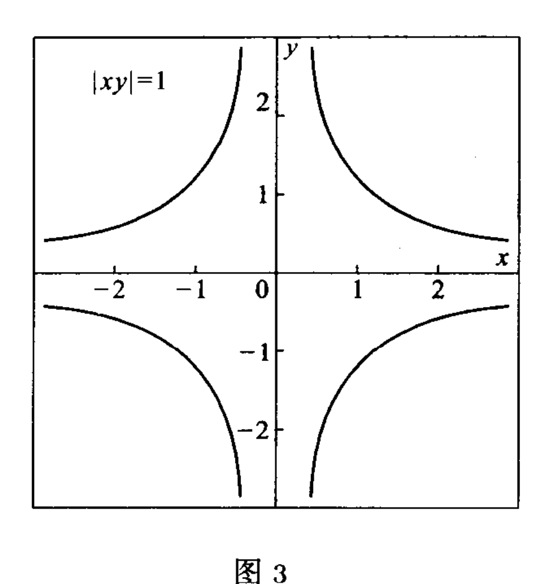


图 3

容易看出, 没有一条连续曲线它穿过这些分支恰好是一次的. 这表明没有一个侧边条件它能唯一确定原偏微的解. 可通过赋予两个侧边条件来获得唯一解, 比如

$$u(x,1) = h(x) \text{ 和 } u(x,-1) = k(x), \quad \text{其中 } h(x) \text{ 和 } k(x) \text{ 是 } C^1 \text{ 函数.}$$

则可由下面关系来确定通解 (27) 中的函数 C 和 D:

$$C(x)e = u(x,1) = h(x),$$
$$D(x)e^{-1} = u(x,-1) = k(x).$$

因此, $C(x) = h(x)/e$ 和 $D(x) = k(x)e$. 因须有 $C(0) = D(0)$ 和 $C'(0) = D'(0)$, 于是为了解存在, 故导出函数 $h(x)$ 和 $k(x)$ 须满足相当奇怪的条件 $h(0) = e^2k(0)$ 和 $h'(0) = e^2k'(0)$! □

例 5 说明, 在构造通解的过程中, 当特征曲线族具有 "拓扑非平凡" 结构时, 即不存在与每条特征曲线横向相交一次的正则侧边条件曲线时, 会产生复杂情况. 因此, 制定一个具体的过程, 凭此可获取一阶变系数线性偏微的完全通解, 如果并非不可能的话也将是困难的 (或至少是使用起来非常不方便的). 本质上, 可通过在特征曲线 $(x(t), y(t))$ 上解常微 (12) 然后把这些曲线上的解粘合起来构成任一解. 但实际上这不是像听起来那么容易. 可给出一阶线性偏微的例子, 它的通解含有无穷多个任意函数 (参看习题 8).

对气体流的应用

想象一气体(或可压缩介质)平行于一给定直线(设为 x-轴)流动. 记气体在点 (x,y,z) 在时刻 t 的密度(单位体积质量)为 $\rho(x,t)$; 为简单起见假设密度与 y 和 z 无关. 令在点 (x,y,z) 在时刻 t 的速度为 $v(x,t)\mathbf{i}$, 其中 $\mathbf{i}$ 是正 x 方向的单位向量. 证明由于质量守恒, 函数 $\rho(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 必满足所谓的**连续性方程**:

$$\rho_t+(\rho v)_x=0 \quad \text{或} \quad \rho_t+v\rho_x+v_x\rho=0. \tag{28}$$

关于推导, 考虑 x_0 和 $x_0+\triangle x$ 之间的空间 (见图 4).

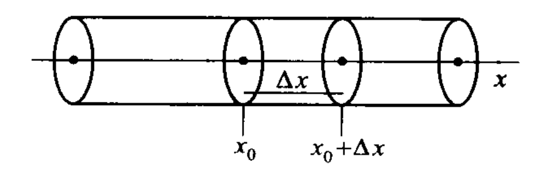


图 4

在时间间隔 $\triangle t$ 穿过平面 $x=x_0$ 上单位面积进入这个空间的质量为 $\rho(x_0,t)v(x_0,t)\triangle t$, 而通过表面 $x=x_0+\triangle x$(单位面积) 在时间间隔 $\triangle t$ 流出的质量 $\approx \rho(x_0+\triangle x,t)\triangle t$. 于是, 在 $\triangle t$ 期间在两平面之间单位截面间的质量净变化近似地由下式给出

$$\int_{x_0}^{x_0+\triangle x}(\rho(x,t+\triangle t)-\rho(x,t))dx \approx -\,(\rho(x_0+\triangle x,t)v(x_0+\triangle x,t) - \rho(x_0,t)v(x_0,t))\triangle t.$$

用 $\triangle x\triangle t$ 相除, 然后以 $\triangle x$ 和 $\triangle t$ 趋于零取极限, 得 $\rho_t(x_0,t)=-(\rho v)_x(x_0,t)$, 这就得到 (28). 通过事先指定 $v(x,t)$, 只要知道 $\rho(x,0)$[即, 在时刻 $t=0$ 时的密度], 就可利用 (28) 算出 "未知" 密度 $\rho(x,t)$. 换言之, 求 $\rho(x,t)$ 就得解问题

$$\rho_t+v\rho_x+v_x\rho=0,\ \rho(x,0)=\rho_0(x), \tag{29}$$

其中 $\rho_0(x)$ 是某个给定的 C^1 函数 (初始密度). 我们来考虑一些特殊情形.

1. 假设 $v(x,t)=v_0$ 是常数. 则 (29) 中的偏微成为 $\rho_t+v_0\rho_x=0$. 特征线形成斜率 $dx/dt=v_0$ 的直线族 (即, $x-v_0t=d$). 不用进行熟悉的变量变换, 易见这个偏微的通解是 $\rho(x,t)=C(x-v_0t)$, C 是任意 C^1 函数. 由 (29) 中的初始条件, 得 $\rho_0(x)=C(x-v_0\cdot 0)=C(x)$. 于是, 该情形问题 (29) 的解是

$$\rho(x,t)=\rho_0(x-v_0t).$$

换句话说, 密度分布以速度 $|v_0|$ 顺风传播.

2. 假设 $v(x,t)=\alpha x$, 其中 α 是某个正常数. 在此情形, 速度对负的 x 是以 $-\mathbf{i}$ 方向而对正的 x 是以 $+\mathbf{i}$ 方向 (即, 风以离开点 $x=0$ 吹走). 自然, 在这种情形预想在 $x=0$ 处的密度随着时间减少. (29) 中的偏微成为 $\rho_t+\alpha x\rho_x+\alpha\rho=0$. 特征方程 $x'(t)=\alpha x$ 的解在 xt - 平面形成特征曲线族 $x=de^{\alpha t}$ 或 $xe^{-\alpha t}$. 作变量变换

$$\begin{cases} w=xe^{-\alpha t} \\ z=t \end{cases};\quad \begin{cases} x=we^{\alpha z} \\ t=z \end{cases},$$

并令 $r(w,z)=\rho(x,t)$. 原偏微化为

$$0=\rho_t+\alpha x\rho_x+\alpha\rho=(r_ww_t+r_zz_t)+\alpha x(r_ww_x+r_zz_x)+\alpha r=r_z+\alpha r,$$

或 $r_z+\alpha r=0$. 通解为 $r(w,z)=C(w)e^{-\alpha z}$, C 为任一 C^1 函数, 由此得 $\rho(x,t)=C(xe^{-\alpha t})e^{-\alpha t}$. 利用初始条件, 得 $\rho_0(x)=\rho(x,0)=C(x)$, 因此 $C(x)=\rho_0(x)$. 则这时问题 (29) ①的唯一解为

$$\rho(x,t)=\rho_0(xe^{-\alpha t})e^{-\alpha t}. \tag{30}$$

密度在 $x=0$ 处减少, 正如所预想的. 注意到下面现象是有趣味的: 在 $\rho_0(x)=\rho_0=$ 常数情形, 有 $\rho(x,t)=\rho_0e^{-\alpha t}$ 与 x 无关, 即使风速 $v=\alpha x$ 依赖于 x. 还注意到 (30) 表明 $\rho(x,t)$ 的图像是 $\rho_0(x)$ 的图像经水平方向以因子 $e^{\alpha t}$ 伸缩以及速度以因子 $e^{-\alpha t}$ 压缩得来. 这些过程 (合起来) 保持图像下的面积不变, 这意味着总质量 (即, 密度关于 x 的积分) 保持不变.

几何应用

这里将求所有的函数 $u=u(x,y)$ 使得图像 $z=u(x,y)$ 在任意点 $(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ 的切平面过原点. 假设 u 是 C^1 的. 回忆起图像在 $(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ 的

①原文误为 (14).——译者

切平面方程为

$$u_x(x_0,y_0)(x-x_0)+u_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-u(x_0,y_0))=0.$$

为了 (0,0,0) 在此切平面上, 必有 $-u_x(x_0,y_0)x_0-u_y(x_0,y_0)y_0+u(x_0,y_0)=0$. 此等式对 u 的定义域内一切 (x_0,y_0) 成立, 函数 u 必须满足偏微

$$xu_x+yu_y-u=0. \tag{31}$$

特征曲线满足 $dy/dx=y/x$, 其解为 $\ln|y|-\ln|x|=\ln|d|$ 或 $y/x=d$, 是 xy - 平面上起点为原点的射线族. 为解 (31), 转换坐标系使得坐标之一在每条这样的射线上是常数. 极坐标 (r,θ) 是完全合适的, 当 $\theta=$ 常数时表示一射线. 该变换 (对 $(x,y)\neq(0,0)$) 是

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad x=r\cos\theta;$$

逆变换

$$\theta=\begin{cases}\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), & y\geqslant 0\\ \arccos(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}})+\pi, & y<0\end{cases},\quad y=r\sin\theta.$$

逆变换比变换本身更简单 (原变换在原点无定义). 意识到 (31) 该化为关于 r 的常微. 我们利用逆变换来计算 v_r, 而不是利用原变换来计算 xu_x+yu_y, 这里 $v(r,\theta)=u(x,y)$:

$$v_r=u_xx_r+u_yy_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta \quad 或 \quad rv_r=xu_x+yu_y.$$

因此, (31) 化为 $rv_r-v=0$, 其解为 $v(r,\theta)=C(\theta)r$, 其中 $C(\theta)$ 是 θ 的任意 C^1 函数. 图像 $z=v(r,\theta)$ 由空间始于原点的射线组成并形成一个圆锥体, 以原点为其可能顶点, 如图 5 所示. 注意到曲面 $\theta=\theta_0$ 是由 z–轴伸展出来的半平面且图像与此平面交于直线 $z=C(\theta_0)r$. 当在原点有顶点时, 图像将在 (0,0) 处没有切平面, 这隐含对应于 $v(r,\theta)=C(\theta)r$ 的函数 $u(x,y)$ 在 (0,0) 处不是 C^1, 即使 C 是 C^1 的. 出现这种奇怪现象是因为变换 $(x,y)\to(r,\theta)$ 在 (0,0) 处是不确定的. 当锥面退化为过 (0,0) 的平面, 得偏微 (31) 的一个解 $u(x,y)=ax+by$, 此解即使在 (0,0) 处也是 C^1 的. 可容易证明 (31) ①在所有点 (x,y) (即使在 (0,0)) 都是 C^1 的任一解必具有形式 $u(x,y)=ax+by$ (即, 具有平面图像). 确实, 如果一个解在 (0,0) 处是 C^1 的, 则在原点它有切平面, 设为 P. 然而, 因为所有形成该曲面的射线在原点与曲面相切, 所以它们必与 P 相切. 与一平面相切的射线必落在该平面上. 于是, 这些射线都在 P 上, 则此平面就是 $u(x,y)$ 的图像.

①原文误为 (16).——译者

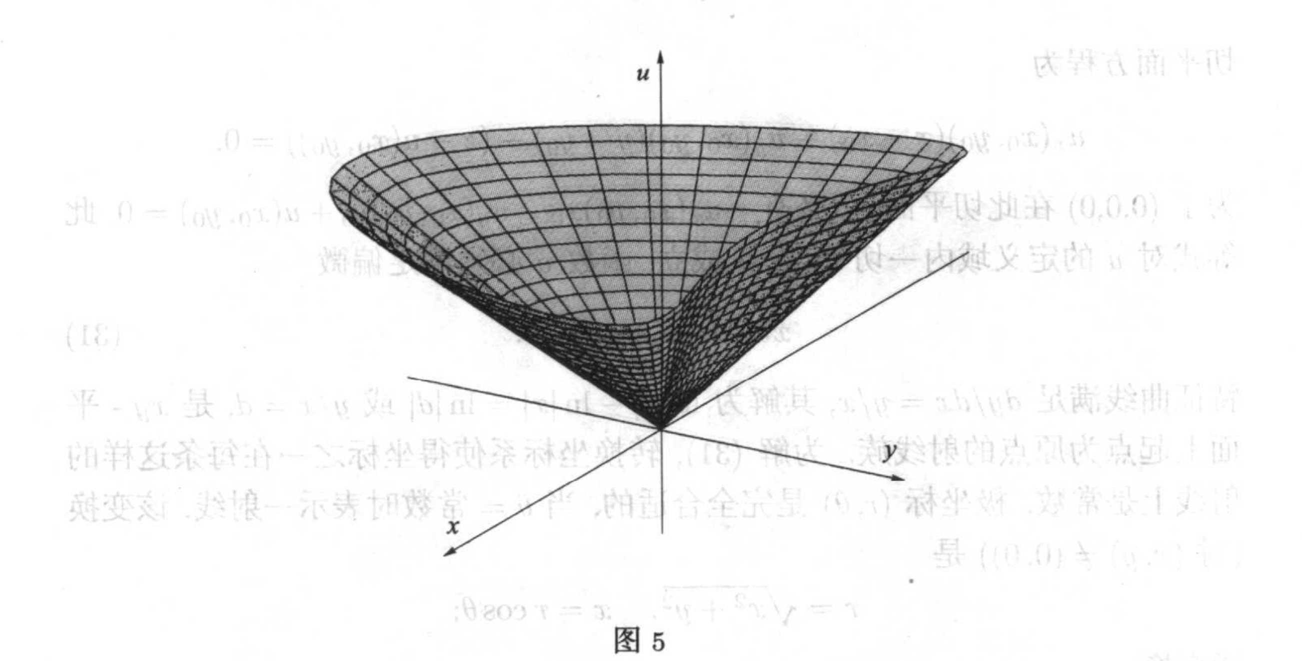


图 5

概要 2.2

1. 特征曲线: xy–平面上一曲线称为是偏微

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \quad u = u(x,y) \tag{S1}$$

的特征曲线, 如果在曲线上每点 (x_0,y_0), 向量 $\mathbf{g}(x_0,y_0) = a(x_0,y_0)\mathbf{i} + b(x_0,y_0)\mathbf{j}$ 与曲线相切. 特征曲线族可通过解特征方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{S2}$$

获得. 特征曲线的意义在于: 在每条特征曲线上偏微 (S1) 成为沿着特征曲线位置变量的函数的常微 (参看下面的 2 和 3 部分).

2. 变量变换: 令 (S2) 的解族 (即, 特征曲线族) 的隐式表示为 $h(x,y) = d$, d 为任意常数. 则在变量变换

$$w = h(x,y),\ z = y, \qquad 以及\ v(w,z) = u(x,y) \tag{S3}$$

下, 偏微 (S1) 化为一个关于 v 的含有 v_z 但不含有 v_w 的偏微. 可用 $z = k(x,y)$ 来代替 (S3) 中的“$z = y$”, $k(x,y)$ 为任意合宜的 C^1 函数. 但一般而言, 关于 v 的偏微只对 xy - 平面上变换 $w = h(x,y)$, $z = k(x,y)$ 是唯一可逆的区域上等价

于 (S1). 为获得通解, 必须把在这样的区域上的解如此粘合起来使得解在穿过这些区域的边界是 C^1 的 (参看习题 5).

3. 特征方程组: 特征曲线可视为一粒子在流体流中流动的轨道, 流体具有速度 $\mathbf{g}(x,y)=a(x,y)\mathbf{i}+b(x,y)\mathbf{j}$. 确定这种粒子位置 $(x(t),y(t))$ 的函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足特征方程组

$$\frac{dx}{dt}=a(x(t),y(t)) \quad 和 \quad \frac{dy}{dt}=b(x(t),y(t)). \tag{S4}$$

由定义, (S4) 的解 $(x(t),y(t))$ 确定了由此描绘出的特征曲线的首选参数化. 令 $u(x,y)$ 为 (S1) 的解, 并令 $U(t)=u(x(t),y(t))$, $C(t)=c(x(t),y(t))$ 和 $F(t)=f(x(t),y(t))$. 则 $U(t)$ 满足常微

$$U'(t)+C(t)U(t)=F(t), \quad 得解\ U(t)=\frac{1}{m(t)}\Big(\int_0^t m(\tau)F(\tau)d\tau+U(0)\Big), \tag{S5}$$

其中 $m(t)=\exp(\int_0^t C(\tau)d\tau)$. 于是, 偏微 (S1) 的解 u 沿着一特征曲线在 $(x(t),y(t))$ 处的值 $U(t)$ 由它的值 $U(0)=u(x(0),y(0))$ 确定.

4. 解的参数形式: 令 s 为沿一正则侧边条件曲线的位置变量, 该正则侧边条件曲线与每条特征曲线横向相交且恰好相交一次. 对每个固定的 s, 令 $(X(s,t),Y(s,t))$ 为粒子在时刻 t 的位置, 该粒子始于侧边条件曲线上对应于 s 的点, 并随着流体流动. 换言之, 函数 $X(s,t)$ 和 $Y(s,t)$ 是特征方程组的解 (对每个固定的 s)

$$\frac{d}{dt}X(s,t)=a(X(s,t),Y(s,t)) \quad 和 \quad \frac{d}{dt}Y(s,t)=b(X(s,t),Y(s,t)), \tag{S6}$$

具给定的初始条件 $X(s,0)$ 和 $Y(s,0)$, 其中当 s 变化时 $(X(s,0),Y(s,0))$ 绘出侧边条件曲线. 赋予偏微 (S1) 侧边条件 $u(X(s,0),Y(s,0))=G(s)$, 则对每个固定的 s 应用公式 (S5), 得

$$u(X(s,t),Y(s,t))=U(s,t)=\frac{1}{m(s,t)}\Big(\int_0^t m(s,\tau)F(s,\tau)d\tau+G(s)\Big). \tag{S7}$$

因此, 有下面的偏微 (S1) 解的参数形式①

$$x=X(s,t),\ y=Y(s,t),\ u=U(s,t). \tag{S8}$$

①原文误为 (S9).——译者

如果能从 (S8) 的前两式唯一的解出以 x 和 y 表示的 s 和 t, 比方说 $s = S(x,y)$ 和 $t = T(x,y)$, 就得到显式解 $u(x,y) = U(S(x,y), T(x,y))$. 随着 s 和 t 的变化, 点 $(X(s,t), Y(s,t), U(s,t))$ 典型地绘出包含显式解 $u(x,y)$ 图像的曲面, 如果这样的解存在的话.

练习 2.2

1. 求下列偏微在指定区域上的通解.

(a) $xu_x + 2yu_y = 0,\ x > 0,\ y > 0$

(b) $xu_x - 2yu_y + u = e^x,\ x > 0$

(c) $xu_x - xyu_y - u = 0$, 对所有的 (x,y)

(d) $yu_x - 4xu_y = 2xy$, 对所有的 (x,y).

2. 求习题 1 中的偏微分别满足下列侧边条件的特解.

(a) $u(x, 1/x) = x\ (x > 0)$ (b) $u(1,y) = y^2$

(c) $u(x,x) = x^2 e^x$ (d) $u(x,0) = x^4$.

3. 求习题 1 中的偏微分别满足下列侧边条件的解的参数形式. 注意到在每种情形求显式解 $u(x,y)$ 是徒劳的.

(a) $u(s, e^{-s}) = \sin s,\ s > 0$ (b) $u(s, \sinh s) = 0,\ s > 0$

(c) $u(s^2, s) = s^2$ (d) $u(s, s^3) = 1$.

4. 证明习题 1(d) 中的偏微没有满足侧边条件 $u(x,0) = x^3$ 的解. 用特征曲线解释这个结果.

5. 证明习题 1(a) 中的偏微对所有 (x,y) 有定义且是 C^1 的唯一解是常值函数 (例如, $u(x,y) = 5$).

提示 注意到特征曲线都是从原点发出.

6. 习题 1(c) 中的偏微的通解 $u(x,y)$, 即 $u(x,y) = xC(ye^x)$, 具有性质 $u(0,y) = 0$. 因此, $u(0,y)$ 不能任意指定, 即使 y–轴穿过每条 "特征曲线"$y = de^{-x}$ 仅有一次. 通过给出特征曲线的首选参数化 $(x(t), y(t))$ 来解释这个明显的矛盾, $(x(t), y(t))$ 满足

$$x'(t) = x(t) \quad 和 \quad y'(t) = -x(t)y(t).$$

注意到每条曲线 $y = de^{-x}$ 是由三条这样的特征曲线组成, 其中之一是 y–轴上一点.

7. 构造偏微 $xu_x - 2yu_y = 0$ 的一个解, 该解在整个 xy–平面上是 C^1 的, 但又不具有形式 $u(x,y) = C(yx^2)$, 其中 C 为 C^1 函数.

8. 考虑偏微 $\sin x u_x - y\cos x u_y = 0$.

(a) 绘出该偏微特征曲线的草图.

(b) 证明任一正则侧边条件曲线必包含在一宽度为 2π 的垂直的带中, 此正则侧边条件曲线与该偏微的任一相交的特征曲线恰好横向 (即, 以非零角度) 相交一次.
(c) 证明需要无穷多侧边条件才能唯一确定定义在整个 xy–平面上该偏微的解.
(d) 证明, 任给一无穷的 C^1 函数的族, 设为 $f_n(y)$, 使得 $f_n(0)=0$ 和 $f_n'(0)=0$ $(n=0,\pm1,\ \pm2,\cdots)$, 存在该偏微的解 $u(x,y)$(对所有的 (x,y) 是 C^1 的), 满足如下无穷多侧边条件中的每个侧边条件

$$u((n+\frac{1}{2})\pi,y)=f_n(y),\quad n=0,\pm1,\ \pm2,\cdots.$$

9. 在连续性方程 $\rho_t+v(x,t)\rho_x+v_x(x,t)\rho=0$, 假设 $v(x,t)=\alpha x^n$, 其中 $n>1$ 是整数以及 $\alpha>0$ 为常数. 解该方程满足初始条件 $\rho(x,0)=\rho_0(x)$ 的解. 证明, 与预期相反, 在原点的密度 $\rho(0,t)$ 与 t 无关. 此外, 只要 $\alpha(n-1)tx^{n-1}>-1$, 则证明解存在, 如果 n 是奇数, 此结论对 $t\geqslant 0$ 和所有的 x 为真. 如果 n 是偶数会怎样? 当 n 是偶数时, 讨论解对负的 t 的自然和可能的物理意义.

§2.3 高维, 拟线性, 应用

特征法也可用于高维一阶线性偏微的情形. 例如, 在三维情形, 最一般的一阶线性偏微是

$$a(x,y,z)u_x+b(x,y,z)u_y+c(x,y,z)u_z+d(x,y,z)u=f(x,y,z),\ u=u(x,y,z), \tag{1}$$

a, b, c, d 和 f 为给定的 C^1 函数. 特征曲线 $(x(t),y(t),z(t))$, 其中 t 是首选参数 (参看第 2.2 节的 (8)), 是下面方程组的解

$$\frac{dx}{dt}=a(x(t),y(t),z(t)),\ \frac{dy}{dt}=b(x(t),y(t),z(t)),\ \frac{dz}{dt}=c(x(t),y(t),z(t)). \tag{2}$$

特别, 用 x 代替 t 作为参数通常更方便, 这时上述方程组化为关于未知的 $y(x)$ 和 $z(x)$ 的两个方程 (假设 $a(x,y,z)\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))}\quad \text{和}\quad \frac{dz}{dx}=\frac{c(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))}. \tag{3}$$

(3) 的解典型地依赖于两个任意常数, 设为 α 和 β. 把解写作 $y(x;\alpha,\beta), z(x;\alpha,\beta)$, 对每一对固定的 α 和 β, 随着 x 变化, 由点 $(x, y(x;\alpha,\beta), z(x;\alpha,\beta))$ 绘出的曲线是特征曲线. 现假设能同时由两个方程

$$y = y(x;\alpha,\beta) \quad 和 \quad z = z(x;\alpha,\beta) \tag{4}$$

唯一地解出以 x, y 和 z 来表示的 α 和 β. 设其为 $\alpha = A(x,y,z)$ 和 $\beta = B(x,y,z)$, 其中 A 和 B 为某函数. 对应于数对 (α,β) 的特征曲线是两曲面 $A(x,y,z)=\alpha$ 和 $B(x,y,z)=\beta$ 的交线 (为什么?). 在该特征曲线上, 函数 A 和 B 是常数 (即, 分别为 α 和 β). 若作坐标变换使得特征曲线可由固定两个新坐标 (比如 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$) 而让剩下的坐标 $\bar{z}$ 变化得到, 原偏微就可简化为一个常微. 令

$$\bar{x} = A(x,y,z),\ \bar{y} = B(x,y,z) \ \ 和\ \bar{z} = z. \tag{5}$$

注意到当 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 固定时, 得到一特征曲线. 从理想上来说, 希望变换 (5) 是可逆的, 要不然会出现一些困难, 就如在 2 维情形看到的那样 (参看第 2.2 节的例 5). 令 $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = u(x,y,z)$, 得

$$\begin{aligned}
&au_x + bu_y + cu_z \\
=& a\cdot(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_x + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_x + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_x) + b\cdot(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_y + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_y + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_y) \\
&+c\cdot(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_z + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_z + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_z) \\
=& (aA_x + bA_y + cA_z)\bar{u}_{\bar{x}} + (aB_x + bB_y + cB_z)\bar{u}_{\bar{y}} + c\bar{u}_{\bar{z}} = c\bar{u}_{\bar{z}},
\end{aligned} \tag{6}$$

其中两项圆括号由于下面的理由去掉. 设 (x_0,y_0,z_0) 为任一点, 令 $(x,y(x),z(x))$ 为过这点的特征曲线 (即, $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$). 因 A 在任一特征曲线上为常值, 所以有 $(a\neq 0)$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}A(x,y(x),z(x)) = A_x + A_y\frac{dy}{dx} + A_z\frac{dz}{dx} = A_x + A_y\frac{b}{a} + A_z\frac{c}{a} \\
&= \frac{1}{a}(aA_x + bA_y + cA_z).
\end{aligned}$$

因此, 在这任意点 (x_0,y_0,z_0) 处 $aA_x+bA_y+cA_z=0$. 类似地, $aB_x+bB_y+cB_z=0$. 由 (6), 可见偏微 (1) 化为关于 $\bar{z}$ 的常微 ($\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 固定)

$$\bar{c}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\bar{u}_{\bar{z}} + \bar{d}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\bar{u} = \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \tag{7}$$

其中 $\bar{c}$, $\bar{d}$ 和 $\bar{f}$ 是利用 (5) 的逆变换 (如果存在这样的逆变换), 以 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 来表示的函数 c, d 和 f. 则由 (7) 能解得 $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 从而

$$u(x,y,z) = \bar{u}(A(x,y,z), B(x,y,z), z)$$

是原偏微 (1) 的一个解.

要实现所有这些过程有许多技术障碍. 必须得解方程组 (3), 这一般不是件容易事, 虽然有时解是以期望的形式 $A(x,y,z)=\alpha$ 和 $B(x,y,z)=\beta$ 表示, 使得不必同时由 (4) 去解 α 和 β. 再者, (5) 的逆变换也许是不确定的或难得到的. 在 2 维情形已经看到由于逆变换的不确定而出现的困难. 在 3 维情形, 由于特征曲线会出现扭结和链环的可能,"整体" 情况会更复杂. 在例子和习题里, 我们将让情况相当简单.

例 1 求偏微的通解:

$$2u_x+3u_y+5u_z-u=0,\quad u=u(x,y,z). \tag{8}$$

解 特征曲线由通过解方程组得到:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{5}{2}.$$

得 $y=\frac{3}{2}x+\frac{\alpha}{2}$, $z=\frac{5}{2}x+\frac{\beta}{2}$, 其中 α 和 β 为任意常数. 或者, 特征曲线是由水平曲面 (这里是平面) $2y-3x=\alpha$ 和 $2z-5x=\beta$ 的交线所确定的直线. 因此, 作变量变换

$$\begin{cases}\bar{x}=2y-3x\\ \bar{y}=2z-5x\\ \bar{z}=z\end{cases};\quad \begin{cases}x=\frac{1}{5}(-\bar{y}+2\bar{z})\\ y=\frac{1}{10}(5\bar{x}-3\bar{y}+6\bar{z})\\ z=\bar{z}\end{cases}.$$

这里, 逆变换存在且已计算出, 虽然将不会用它. 置 $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=u(x,y,z)$, 得

$$\begin{aligned}2u_x&=3u_y+5u_z\\ &=2(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_x+\bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_x+\bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_x)+3(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_y+\bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_y+\bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_y)+5(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_z+\bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_z+\bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_z)\\ &=(-6+6+0)\bar{u}_{\bar{x}}+(-10+0+10)\bar{u}_{\bar{y}}+5\bar{u}_{\bar{z}}.\end{aligned}$$

因此, (8) 化为 $5\bar{u}_{\bar{z}}-\bar{u}=0$, 其解为 $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=C(\bar{x},\bar{y})e^{\bar{z}/5}$, 其中 $C(\bar{x},\bar{y})$ 是 $(\bar{x},\bar{y})$ 的任意 C^1 函数.(8) 的通解以 x, y 和 z 表示是

$$u(x,y,z)=C(2y-3x,2z-5x)e^{z/5}.\ \Box \tag{9}$$

注记 (9) 中的函数 C 可由在一曲面上附加一个侧边条件来确定, 该曲面与每条特征曲线交于一个点. 考虑下面在 xy–平面上的侧边条件

$$u(x,y,0)=x^2\sin y. \tag{10}$$

由方程 (9) 和 (10), 得

$$C(2y-3x,-5x)=u(x,y,0)=x^2\sin y. \tag{11}$$

现令 $r=2y-3x,\ s=-5x$. 则 $x=\frac{1}{5}s$ 和 $y=\frac{1}{2}(r-\frac{3}{5}s)$, 且由 (11), 得

$$C(r,s)=(-\frac{s}{5})^2\sin(\frac{1}{2}r-\frac{3}{10}s).$$

则偏微 (8) 满足侧边条件 (10) 所期望的解是

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=(\frac{5x-2z}{5})^2\sin(\frac{1}{2}(2y-3x)-\frac{3}{10}(2z-5x))e^{z/5}\\&=(x-\frac{2}{5}z)^2\sin(y-\frac{3}{5}z)e^{z/5}.\end{aligned}$$

□

例 2 求通解:

$$u_x+zu_y+6xu_z=0,\ u=u(x,y,z). \tag{12}$$

解 特征曲线由解方程组得到

$$\frac{dy}{dx}=z,\quad \frac{dz}{dx}=6x,$$

其中 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$. 注意到不能积分对第一个方程得到 $y=zx$, 因 z 是 x 的未知函数. 可以对第二个方程积分, 得 $z=3x^2+\alpha$. 然后, 由第一个方程得 $y=x^3+\alpha x+\beta$. 从而, 特征曲线由点 $(x,x^3+\alpha x+\beta,3x^2+\alpha)$ 随着 x 变化时绘出. 解出用 (x,y,z) 来表示的 α 和 β, 得 $\alpha=z-3x^2$, $\beta=y-x^3-(z-3x^2)x=y+2x^3-xz$. 特征曲线是曲面 $\alpha=z-3x^2$, $\beta=y+2x^3-xz$ 的交线. 作变量变换:

$$\begin{cases}\bar{x}=z-3x^2\\ \bar{y}=y+2x^3-xz\\ \bar{z}=z\end{cases};\qquad \begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(\bar{z}-\bar{x})}\quad(\bar{z}\geqslant\bar{x})\\ y=\bar{y}\mp2[\frac{1}{3}(\bar{z}-\bar{x})]^{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{3}(\bar{z}-\bar{x})}\\ z=\bar{z}\end{cases}.$$

注意到逆变换不是明确定义的, 除非不是限制在区域 $x\geqslant0$(这时在关于 x 的等式用 "+") 就是限制在 $x\leqslant0$. 因此, 在断言由这个变换求得的解就是通解时必须要小心. 置 $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=u(x,y,z)$, 偏微 (12) 化为 $6x\bar{u}_{\bar{z}}=0$, 得解为 $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=C(\bar{x},\bar{y})$ 或

$$u(x,y,z)=C(z-3x^2,y+2x^3-xz), \tag{13}$$

其中 C 是任一 C^1 函数. 然而, 我们只能有把握断言这是在区域 $x \geqslant 0$(或在区域 $x \leqslant 0$) 上的通解, 在该区域上变换是唯一可逆的. 实际上, 任一解必有形式

$$u(x,y,z)=\begin{cases} C(z-3x^2, y+2x^3-xz), & x \geqslant 0, \\ D(z-3x^2, y+2x^3-xz), & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad (C,\ D \in C^1).$$

然而, 为使解在 $x=0$ 有合适定义, 需要 $C(z,y)=D(z,y)$. 因此, 函数 C 和 D 必须相同, 而且 (13) 实际上就是对所有的 (x,y,z) 有定义的通解. 因 $u(0,y,z)=C(z,y)$, 所以函数 C 将立刻由在平面 $x=0$ 上指定 u 的侧边条件确定. □

一阶拟线性偏微和 Lagrange 方法

关于 u 的一般的一阶偏微具有形式 $F(x,y,u,u_x,u_y)=0$, 其中 F 是五个变量的函数 (例如, $F(x,y,u,u_x,u_y)=u^2u_x^3-3xu_xu_y+y^2$). 虽然有一个特征法的推广可用来求解这样的方程 (参看第 2.4 节), 但要解释这个求解过程却相当冗长. 然而, 有一类一阶偏微现在可以来解答.

具有下面形式的方程称为是**一阶拟线性偏微**

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y-c(x,y,u)=0 \quad (u=u(x,y)), \tag{14}$$

其中 a, b 和 c 是给定的三个变量的 C^1 函数.

当 a 和 b 不依赖于 u 且 $c(x,y,u)=-C(x,y)u+f(x,y)$ 的特殊情形时, (14) 成为已考虑过的一阶线性偏微 $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+C(x,y)u=f(x,y)$. 然而, 当 a 和 b 依赖于 u 时, (14) 是非线性的. 在 1779 年, Joseph Lagrange 证明了 (14) 的解可由隐式 $\varphi(x,y,u)=0$ 表示, 其中 $\varphi(x,y,z)$ 是下面线性偏微的解 (3 维)

$$a(x,y,z)\varphi_x+b(x,y,z)\varphi_y+c(x,y,z)\varphi_z=0, \tag{15}$$

这是 (1) 的特殊情形. 先假设 $u(x,y)$ 是 (14) 的一个解. 若定义 $\varphi(x,y,z)=u(x,y)-z$, 则在 u 的图像上任一点 $(x,y,z)=(x,y,u(x,y))$, 由方程 (14), 得

$$\begin{aligned} &a(x,y,z)\varphi_x+b(x,y,z)\varphi_y+c(x,y,z)\varphi_z \\ &\qquad =a(x,y,u(x,y))u_x+b(x,y,u(x,y))u_y+c(x,y,u(x,y))\cdot(-1)=0. \end{aligned}$$

反过来, 假设 φ 是 (15) 的解, 使得曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 在某点 $p=(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量 $\nabla\varphi=\varphi_x\mathbf{i}+\varphi_y\mathbf{j}+\varphi_z\mathbf{k}$ 不是水平的 (即, $\varphi_z(p)\neq 0$). 则在 p 附近, 曲面是某函数 $u(x,y)$ 的图像 [即, $\varphi(x,y,u(x,y))=0$]. 下面能证明 $u(x,y)$ 必是 (14) 的解. 方程 $\varphi(x,y,u(x,y))=0$ 关于 x 和 y 求导, 得

$$\varphi_x(x,y,u(x,y))+\varphi_z(x,y,u(x,y))u_x(x,y)=0$$

和

$$\varphi_y(x,y,u(x,y))+\varphi_z(x,y,u(x,y))u_y(x,y)=0.$$

因此 $u_x=-\varphi_x/\varphi_z$ 和 $u_y=-\varphi_y/\varphi_z$. 把这些 u_x 和 u_y 表达式代入 (14) 的左边, 由假设 φ 满足 (15), 得

$$-\frac{1}{\varphi_z}\big(a(x,y,u(x,y))\varphi_x+b(x,y,u(x,y))\varphi_y+c(x,y,u(x,y))\varphi_z\big)=0.$$

于是, $u(x,y)$ 满足 (14). 总之, 由 Lagrange 方法得到下面事实.

> 拟线性偏微 (14) 的解 $u=u(x,y)$ 能由 $\varphi(x,y,u)=0$ 隐式确定, 其中 $\varphi(x,y,z)$ 满足线性偏微 (15), 且在某点 p, $\varphi(p)=0$, $\varphi_z(p)\neq 0$.

注记 Lagrange 方法背后有一个简单的几何想法. 令 $\mathbf{v}(x,y,z)=a(x,y,z)\mathbf{i}+b(x,y,z)\mathbf{j}+c(x,y,z)\mathbf{k}$ 为空间一给定的向量场. 偏微 $a(x,y,z)u_x+b(x,y,z)u_y-c(x,y,u)=0$ (即, $\mathbf{v}\cdot(u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}-\mathbf{k})=0$) 表明 $\mathbf{v}$ 在所有点 $(x,y,u(x,y))$ 与 u 的图像相切. 假设把 u 的图像视为由 $\varphi(x,y,z)=0$ 隐式确定的曲面. 因 $\nabla\varphi$ 是该曲面的法线, 于是条件 $\mathbf{v}$ 与该曲面相切意味着 $\nabla\varphi\cdot\mathbf{v}=0$, 这正是线性偏微 (15). □

例 3 求下面拟线性偏微满足给定侧边条件的解:

$$u_x+uu_y=6x,\quad u(0,y)=3y. \tag{16}$$

解 相应的 3 维线性偏微是

$$\varphi_x+z\varphi_y+6x\varphi_z=0. \tag{17}$$

这跟在例 2 中求解的偏微相同. 由 (13), 通解为 $\varphi(x,y,z)=C(z-3x^2,y+2x^3-xz)$, 其中 C 为任一 C^1 函数. 于是偏微 (16) 的解对函数 C 的各种选择由

$$C(u-3x^2,y+2x^3-xu)=0 \tag{18}$$

隐式确定. 例如, 若 $C(r,s)=r$, 则得解 $u-3x^2=0$ 或用显式 $u(x,y)=3x^2$, 而如果 $C(r,s)=r-s$, 则得 $u-3x^2-y-2x^3+xu=0$, 或用显式 $u(x,y)=(y+3x^2+2x^3)/(1+x)$, $x\neq 1$. (16) 中的侧边条件可用来确定函数 C. 确实, 因为这个条件表明当 $x=0$ 时 $u=3y$, 所以在 (18) 中可用 $3y$ 代替 u, 用 0 代替 x, 得到条件 $C(3y,y)=0$. 有许多函数 C 满足这个条件, 一个简单的选取是 $C(r,s)=r-3s$. 由此得解

$$u-3x^2-3(y+2x^3-xu)=0 \quad 或 \quad u(x,y)=\frac{3(y+x^2+2x^3)}{1+3x},\ x\neq -\frac{1}{3}. \ \square \tag{19}$$

注记 如果侧边条件 (16) 用更一般的条件 $u(0,y)=G(y)$(G 为给定的 C^1 函数) 来变换, 则需如此选取函数 C, 使得 $C(G(y),y)=0$. 此外, C 的选取不是唯一的, 但一个简单的选取为 $C(r,s)=r-G(s)$. 于是, (16) 中的偏微的一个解可由下面式子隐式获得

$$u-3x^2-G(y+2x^3-xu)=0. \tag{20}$$

一般而言, 从 (20) 能解出 u 显式地用 x 和 y 来表示是罕见的. 然而, 在曲面 $\varphi(x,y,z)=z-3x^2-G(y+2x^3-xz)=0$ 上点 $(0,y,G(y))$, 法向量 $\nabla\varphi(0,y,G(y))$ 的 $\mathbf{k}$ 分量为 1(不为零). 因此, 曲面在这些点上不是垂直的, 于是曲面是偏微 (16) 的某个解 $u(x,y)$ 的图像 (定义在 y–轴的一个领域里), 尽管 $u(x,y)$ 的显式公式可能是难以获得的. 回顾在第 2.2 节中, 能确定参数化解 $X(s,t)$, $Y(s,t)$, $U(s,t)$, 即使当求显式解 $u(x,t)$ 是徒劳时. 从相应的线性偏微 (15) 在 xyz–空间的特征曲线能容易得到拟线性方程 (14) 的参数化解. 用下面的例子来说明这种方法.

例 4 求下面具侧边条件的拟线性偏微的参数化解

$$u_x+uu_y=6x, \quad u(0,y)=G(y), \tag{21}$$

其中 $G(y)$ 是任意 C^1 函数.

解 相应于线性偏微 $\varphi_x+z\varphi_y+6x\varphi_z=0$ 的特征曲线 $(x(t),y(t),z(t))$ 的特征方程组是

$$\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dy}{dt}=z, \quad \frac{dz}{dt}=6x. \tag{22}$$

通解为

$$x(t)=t+\alpha, \quad y(t)=t^3+3\alpha t^2+\beta t+\gamma, \quad z(t)=3t^2+6\alpha t+\beta, \tag{23}$$

其中先求 x, 然后求 z 最后求 y. 偏微 $\varphi_x + z\varphi_y + 6x\varphi_z = 0$ 隐含 φ 在任一特征曲线上为常值, 因为由链法则和 (22)

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t)) = \varphi_x \cdot x'(t) + \varphi_y \cdot y'(t) + \varphi_z \cdot z'(t) = \varphi_x + \varphi_y \cdot z(t) + \varphi_z \cdot 6x(t) = 0.$$

换言之, 每条特征曲线落在形式为 $\varphi(x,y,z) =$ 常数的曲面上. 解 $u(x,y)$ 的图像是这些曲面之一, 即 $\varphi(x,y,z) = 0$, 其中 $\varphi(x,y,z) = z - 3x^2 - G(y + 2x^3 - xz)$. 这意味着 $u(x,y)$ 的图像由一族特征曲线组成. 自然, 为了满足侧边条件, 要求这族特征曲线中的每条特征曲线过形式为 $(0, s, G(s))$ 的点. 令 $x = X(s,t)$, $y = Y(s,t)$, $z = Z(s,t)$ 为在 "时刻" $t = 0$ 时过点 $(0, s, G(s))$ 的曲线. 在 (23) 中令 $x(0) = 0$, $y(0) = s$ 和 $z(0) = G(s)$, 得 $\alpha = 0$, $\beta = G(s)$ 和 $\gamma = s$. 则

$$X(s,t) = t, \quad Y(s,t) = t^3 + G(s)t + s, \quad Z(s,t) = 3t^2 + G(s).$$

当 s 和 t 变化, 得到通过曲线 $(0, s, G(s))$ 的曲面, 正如侧边条件所要求的. 由于这张曲面是由 φ 在其上取常值 (即, 与 t 无关) 的特征曲线所组成, 可知

$$\varphi(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)) = \varphi(X(s,0), Y(s,0), Z(s,0)) = \varphi(0, s, G(s)) = 0.$$

因此, 当 s 和 t 变化, 点 $(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$ 绘出满足 $\varphi(x,y,u) = 0$ 的点 (x,y,u) 的集合. 换句话说, 得参数化解

$$x = X(s,t) = t, \quad y = Y(s,t) = t^3 + G(s)t + s, \quad u = U(s,t) = Z(s,t) = 3t^2 + G(s).$$

□

对交通流的应用

令 $\rho(x,t)$ 为一单行道上点 x 处在时刻 t 时的车辆密度 (即, $\int_a^b \rho(x,t)dx$ 是 $x = a$ 和 $x = b$ 之间汽车的数量). 将问题简化, 假设 $\rho(x,t)$ 是 C^1 的. 令 M 为合法的速度极限, 通常可外加另外的 5 英里/小时不受惩罚. 令 d 为交通堵塞的密度. 则可假设在 x 处在时刻 t 时车流速度 $v(x,t) = M(1 - \rho(x,t)/d)$. 注意到当 $\rho = d$ 时 $v = 0$ 以及当 $\rho = 0$ 时 $v = M$. 然而, 当 $\rho = \frac{1}{2}d$(即, 诸车之间大约有一车长的间距), 有 $v = \frac{1}{2}M$, 如果 $M = 60$ 这是相当不安全的, 不过还是让我们继续下去. 连续性方程 $\rho_t + (v\rho)_x = 0$(参看第 2.2 节的 (28)) 不仅适用于气体流也适用于交通流. 因

$$(v\rho)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[M(1 - \frac{\rho}{d})\rho\right] = M(1 - 2\frac{\rho}{d})\rho_x,$$

得到关于交通密度的拟线性偏微

$$\rho_t + M(1 - 2\frac{\rho}{d})\rho_x = 0. \tag{24}$$

关于 $\varphi(x,t,z)$ 相应的线性偏微是 $\varphi_t + M(1-2\frac{z}{d})\varphi_x + 0\cdot\varphi_z = 0$. 如下, 直接得到解的参数化形式. t 已用在方程中, 用 τ 来代替 t 作为参变量. 特征方程为 $t'(\tau)=1$, $x'(t) = M(1-2\frac{z}{d})$ 和 $z'(t)=0$. 因此, 对任意的常数 α, β 和 γ, 特征曲线由下面给定

$$t(\tau) = \tau + \alpha, \quad x(\tau) = M(1 - \frac{2}{d}\gamma)\tau + \beta, \quad z(t) = \gamma. \tag{25}$$

假设初始密度 $\rho(x,0) = f(x)$, 或 $\rho(s,0) = f(s)$. 对固定的 s, 要选取形如 (25) 的特征曲线, 使得当 $\tau = 0$ 时过 $(0, s, f(s))$. 因此, 取 $\alpha = 0$, $\beta = s$ 和 $\gamma = f(s)$. 于是参数化解为

$$t = T(s,t) = \tau, \ x = X(s,t) = M(1 - \frac{2}{d}f(s))\tau + s, \ \rho = Z(s,t) = f(s). \tag{26}$$

令 s 为某个固定的值, 比如是 x_0. 则 (26) 隐含密度 $\rho(x,t)$ 在 xt–平面的直线

$$x = M(1 - \frac{2}{d}f(x_0))t + x_0 \tag{27}$$

上是常数 (即,$f(x_0)$). 若把 x_0 的值换成新的值 x_1 且 $f(x_0) \neq f(x_1)$, 则新的直线将在某点 (x_2, t_2) 与前面的直线相交, 因为这两条直线的斜率将会不同. 而且, 因 $f(x_0) \neq f(x_1)$, 则 ρ 在新直线上的常数值将不同于 ρ 在前一直线上的常数值. 因此, 在交点得到矛盾: $\rho(x_2,t_2) = f(x_0)$ 和 $\rho(x_2,t_2) = f(x_1)$. 于是, (24) 对所有 (x,t) 有定义的唯一解 $\rho(x,t)$ 是那样的解, 其初始密度 $\rho(x,0) = f(x)$ 是常数, 比如 $f(x) = c$, 这时 $\rho(x,t) = c$ (即, 车辆以匀速 $M(1-\frac{c}{d})$ 运行, 若 $0 \leqslant c \leqslant d$). 也许会出现对所有 $t \geqslant 0$(但不是所有 $t < 0$) 非常数解存在. 确实, 若车辆的初始密度 $f(x)$ 选为在 x 的正方向是减少的 (即, $f'(x) \leqslant 0$), 则 $f(x_0) > f(x_1), x_1 > x_0$, 且交点 (x_2,t_2) 落在 x–轴下面, (即, $t_2 < 0$), 因为过 $(x_1, 0)$ 的直线的斜率小于过点 $(x_0,0)$ 的直线的斜率. 然而, 如果 $f'(x)$ 在某点是正的, 比如在 x_0, 则对某点 $x_1 > x_0$, 有 $f(x_1) > f(x_0)$ 和相应的直线将在 x–轴上方相交 (即, 解 $\rho(x,t)$ 在

(x_2, t_2) 将不存在, 其中 $t_2 \geqslant 0$). 当在某处 $f'(x) > 0$, 将求得最小的时间 $t > 0$, 使得解在此时之后不再存在. 在任意给定的时间 t_0, 参数化解 (26) 的 "图像" 是由下面参数化给出的 $x\rho$-平面上的曲线 (当 s 变化)

$$x(s) = M(1 - \frac{2}{d}f(s))t_0 + s, \quad \rho(s) = \rho(s, t_0) = f(s). \tag{28}$$

该曲线在 $(x(s), \rho(s))$ 的切向量为

$$x'(s)\mathbf{i} + \rho'(s)\mathbf{j} = (1 - \frac{2M}{d}f(s)t_0)\mathbf{i} + f'(s)\mathbf{j}. \tag{29}$$

因此, 当 $f'(s) \neq 0$ 且

$$1 - \frac{2M}{d}f(s)t_0 = 0 \quad \text{或} \quad t_0 = \frac{d}{2Mf'(s)}$$

时, 切向量在 $(x(s), \rho(s))$ 处将是垂直的. 令 G 是 $f'(x)$ 的最大值 (或更精确地, 最小上界)(即, G 是车辆最大初始密度梯度). 假设 $G < \infty$. 则只要 $t_0 < d/(2MG)$, 密度曲线 $\rho(x, t_0)$ 就没有垂直切向量且解对所有的 (x, t), $t < d/(2MG)$ 存在. 然而, 除非 $f'(x) = G$, 对那些比 $d/(2MG)$"略微" 大些的 t, 解 $\rho(x, t)$ 不再是 C^1 的, 因在这样的时刻上将会有垂直的切向量. 确实, 密度图形通常将会在它自己上面重叠起来且不再是一个函数的图像, 好比是一个打破的波 (参看下面的图 1). 注意到 $\rho(x, t)$ 本身决不会超过 d, 如果 $f(x) = \rho(x, 0) < d$. 然而, 交通流理论预测如果在某处 $f'(x) > 0$, 密度将会发展成一个急剧的跳跃 (即, 一个垂直切向量) 或被称之为**激波**. 当一个激波出现, 密度梯度为无穷, 这必然造成接近激波点处的车流速度的一个迅速变化. 由于车辆碰撞只会在瞬间猛然发生, 所以交通流理论表明事故很可能发生在激波点上. 再者, 如同下面例子所揭示的, 交通流理论可用来预测哪里和什么时候激波可能发生.

例 5 用上面的符号, 令车辆的初始密度为 $\rho(x, 0) = \frac{a}{1+x^2}$, $a < d$ 为常数. 首先, 最大密度的点为 $x = 0$. 在时刻 t 最大密度的点在哪? 什么时候以及在哪里产生第一次激波?

解 对每个 x_0, 解在直线 (参看 (28))

$$x = M(1 - \frac{2}{d}f(x_0))t + x_0$$

上为常值 $f(x_0) = \frac{a}{1+x_0^2}$. 置 $x_0 = 0$, 立刻可见在时刻 t 时的最大密度是在 $x = M(1 - \frac{2a}{d})t$ 处. 因此, 如果 $a < \frac{1}{2}d$ 最大密度点将向右移动, 如果 $a > \frac{1}{2}d$ 则

向左移动, 如 $a = \frac{1}{2}d$ 就停留在 $x = 0$ 处. 使 $f'(x) = -2ax(1+x^2)^{-2}$ 的最大值的 x 满足

$$0 = f''(x) = \frac{2a(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

即, $x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. $f'(x)$ 的最大值为

$$G = f'(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{2a}{\sqrt{3}}(4/3)^{-2} = \frac{9a}{8\sqrt{3}} = \frac{3a}{8}\sqrt{3}.$$

于是, 第一个激波发生时刻为

$$t_1 = \frac{d}{2MG} = \frac{d}{2M\frac{3a}{8}\sqrt{3}} = \frac{4d}{9aM}\sqrt{3},$$

位置为

$$\begin{aligned} x &= M(1-\frac{2}{d}f(x_1))t_1 + x_1 = M(1-\frac{2}{d}\frac{3a}{4})\frac{4d}{9aM}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ &= (1-\frac{6a}{4d})\frac{4d}{9a}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} = (\frac{4d}{9a}-1)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

正如人们所预料的, 它小于在时刻 t 时密度最大值的点, 即, 点

$$M(1-2\cdot\frac{a}{d})\frac{4}{9}\sqrt{3}\frac{d}{aM} = (\frac{4d}{9a}-\frac{8}{9})\sqrt{3}.$$ □

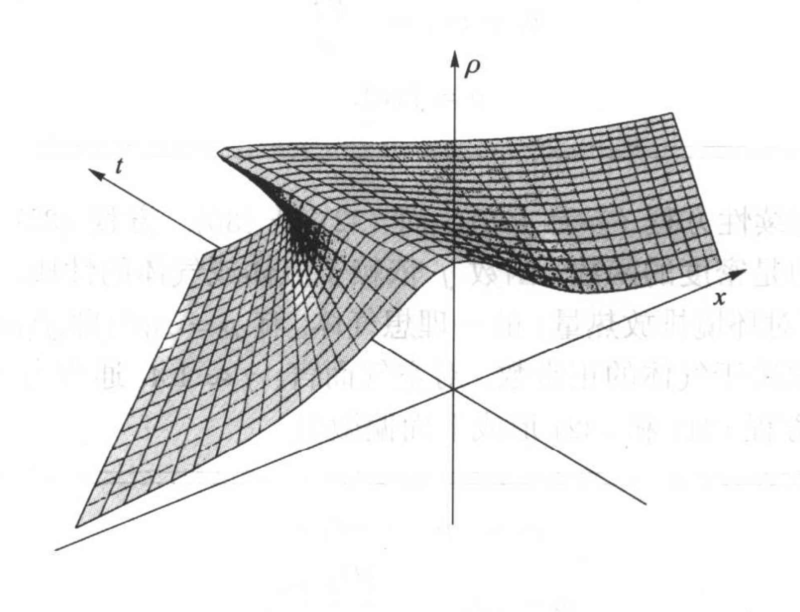


图 1

对连续介质力学的应用

想象一管具有速度 $v(x,y)\mathbf{i}$ 的气体或某个可压缩的介质 (参看第 2.2 节对气体流的应用). 如 $x(t)$ 是一小量 “气体元素” 在时刻 t 的位置, 则 $x'(t)=v(x(t),t)$, 以及

$$x''(t)=\frac{d}{dt}v(x(t),t)=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dt}=v_x(x(t),t)v(x(t),t)+v_t(x(t),t).$$

因此, 流体粒子在 (x,t) 处的加速度不是简单地为 $v_t(x,t)$, 而是 $v\cdot v_x+v_t$. 则直接应用 Newton 第二定律得运动方程

$$\rho(x,t)(v_t+vv_x)=f(x,t), \tag{30}$$

其中 $\rho(x,t)$ 是质量密度, $f(x,t)$ 是作用力密度 (单位长度上的质量和作用力). 虽然方程 (30) 是正确的, 但它没有我们已经使读者相信的那么明显. 的确, Newton 第二定律更一般的表述是在一物体上总作用力等于冲量的变化率 (即, $f(t)=\frac{d}{dt}[m(t)v(t)]=m(t)v'(t)+m'(t)v(t)$), 如果质量随时间变化的话, 这不是简单地质量乘加速度. 假设没有粘性的情况下 (假设粘性被忽略), 作用力密度 $f(x,t)$ 是负压力梯度 (即,$-p_x(x,t)$, 这里 $p(x,t)$ 是压力) 与外力密度的和, 外力密度比方说是由重力产生. 为简单起见, 假设没有外力. 则 **Euler 方程**为

$$\rho_t+(\rho v)_x=0, \tag{31}$$

$$v_t+vv_x=-\frac{p_x}{\rho}, \tag{32}$$

$$p=f(\rho). \tag{33}$$

注意 (31) 是连续性方程 (参看 (28)), 而 (32) 是 (30). 方程 (33) 称为**状态方程**, 它表明压力是密度的函数. 函数 f 依赖于流体或气体的性质. 对于处于绝热过程 (即, 不对环境排放热量) 的一理想气体, 有 $p=A\rho^\gamma$(即,$f(\rho)=A\rho^\gamma$), 其中 A 和 γ 为取决于气体的正常数. 对空气而言, $\gamma\approx 1.4$, 通常 $\gamma>1$. 注意到 $p_x=f'(\rho)\rho_x$, 方程 (31) 和 (32) 形成下面偏微组

$$\rho_t+v\rho_x=-v_x\rho \tag{34}$$

$$v_t+vv_x=-\frac{f'(\rho)\rho_x}{\rho}. \tag{35}$$

求这个方程组的通解不是一件平凡的工作. 经线性化过程, 这个方程组可近似地分解成两个分别关于 v 和 ρ 的波方程 (参看习题 14). 然而, 我们能得到某些精确解并且仍然保持前后联系的一阶拟线性方程都是关于一个未知函数的. 的确, 假设试图求得对某个函数 V, $v(x,t)=V(\rho(x,t))$ 这样的解 (即, 寻求 ρ 和 v 是函数相关的解). 因 $v_x=V'(\rho)\rho_x$ 和 $v_t=V'(\rho)\rho_t$, 所以

$$\rho_t+V(\rho)\rho_x=-\rho V'(\rho)\rho_x, \tag{34'}$$

$$\rho_t+V(\rho)\rho_x=-\frac{f'(\rho)\rho_x}{\rho V'(\rho)}. \tag{35'}$$

因这些方程的左边是相同的, 所以注意到应如此选取函数 V, 使得右边相等, 即

$$\rho V'(\rho)=\frac{f'(\rho)}{\rho V'(\rho)} \quad 或 \quad V'(\rho)=\pm\frac{1}{\rho}\sqrt{f'(\rho)} \quad 或 \quad V(\rho)=\pm\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{r}\sqrt{f'(r)}dr, \tag{36}$$

其中 ρ_0 是速度为 0 时的密度. 因此, 如假设 v 和 ρ 函数相关, 则联系它们的函数几乎可由方程 (31),(32) 和 (33) 确定. 然而, 就像在交通流中所讨论的那样, 没有坚实的实际理由来假设 v 和 ρ 之间有一个函数关系. 当 $f(\rho)=A\rho^\gamma$ 时, 有

$$V(\rho)=\pm\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{r}\sqrt{\gamma A r^{\gamma-1}}dr=\pm\frac{2\sqrt{\gamma A}}{\gamma-1}\left(\sqrt{\rho^{\gamma-1}}-\sqrt{\rho_0^{\gamma-1}}\right). \tag{37}$$

回到一般情形, 因 $V'(\rho)=\pm\frac{1}{\rho}\sqrt{f'(\rho)}$ 通常不为零, 所以可合理地假设函数 V 有逆, 设为 R, 使得 $\rho=R(v)$. 由于 $R'(v)=V'(\rho)^{-1}$, 则

$$\frac{R'(v)}{R(v)}=\frac{1}{\rho V'(\rho)}=\frac{\pm1}{\sqrt{f'(\rho)}}=\frac{\pm1}{\sqrt{f'(R(v))}}=\pm\frac{1}{c(v)},$$

其中

$$c(v)=\sqrt{f'(R(v))}. \tag{38}$$

因此,

$$v_t+vv_x=-f'(\rho)\rho_x/\rho=-\frac{f'(R(v))R'(v)v_x}{R(v)}=-\pm c(v)v_x$$

或

$$v_t+(v\pm c(v))v_x=0. \tag{39}$$

这是关于 v 的一阶拟线性偏微. 在 xtz–空间相应的线性偏微为

$$\varphi_t + (z \pm c(z))\varphi_x - 0\varphi_z = 0.$$

特征方程为 $x'(t) = z \pm c(t)$ 和 $z'(t) = 0$. 解为 $z = \alpha$ 和 $x - (z \pm c(z))t = \beta$. 由此得 $\varphi(x, t, z) = C(z, x - (z \pm c(z))t)$, 其中 C 是任一 C^1 函数. 则相应的 (39) 的隐式解为

$$\varphi(v, x - (v \pm c(v))t) = 0.$$

假设初始速度为 $v(x, 0) = g(x)$, $g(x)$ 为某个给定函数. 则需选取 φ 使得 $\varphi(g(x), x) = 0$. 于是 φ 的一个简单选取是 $\varphi(r, s) = r - g(s)$. 因为从 $v - g(x - (v \pm c(v))t) = 0$ 解出用 x 和 t 来表示 v 会是困难的, 所以下面解的参数形式 (用 τ 作参数, 因为 t 已经用在方程中) 常显得更有用:

$$t = \tau, \quad x = (g(s) \pm c(g(s)))\tau + s, \quad v = g(s). \tag{40}$$

随着 τ 和 s 的变化, 点 (t, x, v) 绘出解 $v(x, y)$ 在 txv–空间中的图像. 注意到 $v(x, t)$ 在直线 $x = [g(x_0) \pm c(g(x_0))]t + x_0$ 上的值是常数, 即 $g(x_0)$. 总之, 已经证明如下:

问题

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{41}$$

$$v_t + v v_x = -\frac{p_x}{\rho}, \tag{42}$$

$$p = f(\rho), \tag{43}$$

$$v(x, 0) = g(x) \quad 和 \quad \rho(x, 0) = R(g(x)), \tag{44}$$

的解由下面隐式给出

$$-g(x - (v \pm c(v))t) = 0, \quad \rho(x, t) = R(v(x, t)), \tag{45}$$

其中 R 是 (37) 中 V 的反函数,
或由

$$t = \tau, \quad x = (g(s) \pm c(g(s)))\tau + s, \quad v = g(s) \tag{46}$$

参数化给出.

由 (46) 与有关交通流的 (26) 的相似性, 预料到具有激波现象. 注意 (46) 是关于速度的参数化解, 而 (26) 是关于密度的参数化解. 由于在气体流和交通流的考虑中速度和密度是函数相关的, 所以在两种情形中的任一种里容易从相互关系得到密度和速度的解.

例 6 令 $p = A\rho^\gamma (\gamma > 1)$ 是状态方程. 当 $v(x,0) = \alpha x$ ($\alpha > 0$, 常数) 时求问题 (41)-(44) 的 $v(x,t)$ 和 $\rho(x,t)$. 假设当 $\rho = \rho_0$ 时 $v = 0$.

解 取 $g(x) = \alpha x$, 需确定 $R(v)$ 和 $c(v)$. 因 $f(\rho) = A\rho^\gamma$, 所以由 (37) 得

$$V(\rho) = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma A r^{\gamma-1}} dr + V(\rho_0) = \pm \frac{2\sqrt{\gamma A}}{\gamma - 1}(\sqrt{\rho^{\gamma-1}} - \sqrt{\rho_0^{\gamma-1}}),$$

$$\rho = R(v) = \left(\sqrt{\rho_0^{\gamma-1}} \pm \frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma A}} v\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

以及

$$c(v) = \sqrt{f'(R(v))} = \sqrt{A\gamma R(v)^{\gamma-1}} = \sqrt{A\gamma\rho_0^{\gamma-1}} \pm \frac{1}{2}(\gamma-1)v.$$

令 $c_0 = c(0) = \sqrt{f'(\rho_0)} = \sqrt{A\gamma\rho_0^{\gamma-1}}$. 则得隐式解

$$v - \alpha\left(x - (v \pm (c_0 \pm \frac{1}{2}(\gamma-1))v)t\right) = v - \alpha\left(x - (\pm c_0 + \frac{1}{2}(\gamma+1)v)t\right) = 0.$$

因此, $v(1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha t) = \alpha(x - \pm c_0 t)$, 以及显式表示

$$v(x,t) = \frac{\alpha(x - \pm c_0 t)}{1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha t} \tag{47}$$

和

$$\rho(x,t) = R(v(x,t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma A}}(c_0 \pm \frac{1}{2}(\gamma-1)v(x,t))\right)^{2/(\gamma-1)} \tag{48}$$

为明确起见, 假设取正号 (对于负号参见习题 16). 则对固定的 t, $v(x,t)$ 的图像是在 $c_0 t$ 与 x-轴相交的直线且斜率为 $\alpha(1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha t)^{-1}$. 在习题 14 中, 可知当几乎没有风时 (即, v 小)c_0 是气体中的声速: 因此已证明, 作为初始条件, 截取点 $w(t)$, 在其上有 $v(w(t),t) = 0$, 以声速移动, 与 α 的值无关. 斜率 $\alpha(1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha t)^{-1}$ 当 $t \to \infty$ 时趋于零. 直观上, 这是因为风是吹离零速度的点, 把移动更慢的风留在后面. 注意到解不能在时间上无限期的后退, 因为斜率在 $t_0 = -[\frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha]^{-1}$ 处变为无穷. 这是悲剧性的激波. 随着时间往后进行风吹向速度为零的点, 并且当所有的气体都马上到达时, 最终有一个 "巨大的碎裂声". 如时间从 $t = t_0$ 向前进行, 将得到由点 $x = c_0 t_0$ 发出的爆破. 的确, 如 $x(t)$

是气体元素在时刻 t 时的位置, 则通过解常微 $x'(t) = v(x(t), t)$, 无论 $x(0)$ 取什么值, 得到 (参看习题 15)$x(t_0) = c_0 t_0$. 在现讨论的情形, v 的参数化解由

$$t = \tau, \quad x = (c_0 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha s)\tau + s, \quad v = \alpha s \tag{49}$$

给出 (参看 (46)). 因此, v 在直线 $x = (c_0 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha x_1)t + x_1$ 取常值 αx_1. 注意到当 $t = t_0 = -[\frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha]^{-1}$ 时, 有 $x = c_0 t_0 - x_1 + x_1 = c_0 t_0$. 因此, 所有这些直线过激波点 $(c_0 t_0, t_0)$, 则在其上 v 如预料的那样是 "极度" 不确定的. 还应注意到解不是在激波点外所有的点都是真正实际有效的, 因为由 (48), 为了压力不是负的, v 必须至少是 $-2c_0/(\gamma-1)$. 用 $-2c_0/(\gamma-1)$ 代替 (49) 中的 αs, 可知解只在过激波点 $(c_0 t_0, t_0)$ 斜率为

$$(c_0 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\frac{-2c_0}{(\gamma-1)}) = c_0(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}) = \frac{-2c_0}{(\gamma-1)}$$

的直线上方有效. 这则是扩展的气体左边界的 (常数!) 速度, 在其上压力为零. □

概要 2.3

1. 高维的特征法: 特征曲线法可用于如下的一阶线性偏微的情形

$$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = f(x,y,z), \quad u = u(x,y,z), \tag{S1}$$

其中 a, b, c, d 和 f 为给定的 C^1 函数. 以 x 作为沿着特征曲线的位置变量 (具速度为 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 的流体流的流线), 该特征线随着 x 的变化由 $(x, y(x), z(x))$ 绘出, 其中 $y(x)$ 和 $z(x)$ 是由两个方程组成的方程组的解 (假设 $a(x,y,z) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))} \quad \text{和} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))}. \tag{S2}$$

(S2) 的解典型地依赖两个任意常数 α 和 β, 设为 $y = y(x;\alpha,\beta)$ 和 $z = z(x;\alpha,\beta)$. 如能以 x, y 和 z 唯一地解出 α 和 β, 则特征曲线能表示为曲面 $A(x,y,z) = \alpha$ 和 $B(x,y,z) = \beta$ 的交线. 于是在变量变换 $\bar{x} = A(x,y,z)$, $\bar{y} = B(x,y,z)$, $\bar{z} = z$ 下, 偏微 (S1) 转化为 (根据链法则) 关于 $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = u(x,y,z)$ 的偏微 (参看 (7)), 该偏微不含有 $\bar{u}_{\bar{x}}$ 和 $\bar{u}_{\bar{y}}$(即,(7) 作为 $\bar{z}$ 的函数的常微能求解). 对任意维数的一阶线性偏微, 基本思想是引入变量变换, 使得当所有的新变量中除了一个之外保持固定时, 产生特征曲线. 则转化后的偏微成为关于这个剩下来新变量函数的常微.

2. Lagrange 方法: 拟线性偏微

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y - c(x,y,u) = 0, \quad u = u(x,y), \tag{S3}$$

其中 a, b 和 c 为给定的三个变量的 C^1 函数, 其解可由 $\varphi(x,y,u)=0$ 隐式确定, 这里 $\varphi(x,y,z)$ 满足线性偏微

$$a(x,y,z)\varphi_x + b(x,y,z)\varphi_y + c(x,y,z)\varphi_z = 0, \tag{S4}$$

且在某个 $\varphi(p)=0$ 的点 $p=(x_0,y_0,z_0)$, $\varphi_z(p)\neq 0$. (S4) 的解典型地具有形式 $\varphi(x,y,z)=C(A(x,y,z),B(x,y,z))$, 其中 A 和 B 为特定的函数, C 为任一 C^1 函数. 如给定一侧边条件, 比如 $u(x,0)=f(x)$, 则即使能求得函数 C 使得 $C(A(x,0,f(x)),B(x,0,f(x)))=0$, 要从 $\varphi(x,y,u)=0$ 解出 $u(x,y)$ 将会是行不通的. 可换为求一个参数化解 $x=X(s,t)$, $y=Y(s,t)$, $u=Z(s,t)$. 函数 $X(s,t)$, $Y(s,t)$, $Z(s,t)$ 是下面特征方程组满足初始条件 $X(s,0)=s$, $Y(s,0)=0$, $Z(s,0)=f(s)$ 的解:

$$\frac{dX}{dt} = a(X,Y,Z), \quad \frac{dY}{dt} = b(X,Y,Z), \quad \frac{dZ}{dt} = c(X,Y,Z).$$

随着 s 和 t 的变化, 点 $(X(s,t),Y(s,t),Z(s,t))$ 绘出 $u(x,y)$ 的图像. 在流体流理论和连续介质力学的应用中, 我们发现参数化解通常不能对所有的 (x,y) 确定显式解 $u(x,y)$, 然而这些解揭示了一个或两个偏导数成为无穷的激波. 参数化解可用来确定激波点.

练习 2.3

1. 求解关于 $u=u(x,y,z)$ 满足侧边条件 $u(x,y,0)=x^2+y^2$ 的偏微 $u_x+u_y+u_z=u$.

2. 考虑关于 $u(x,y,z)$ 的偏微 $u_x-u_y+u=z$.

(a) 求解满足侧边条件 $u(0,y,z)=y^2e^z$ 的这个偏微.

(b) 证明这个偏微没有满足 $u(x,y,x+y)=0$ 的解.

(c) 找出两个 (从无穷多个) 解 u 使得 $u(x,y,x+y)=x+y+e^y$.

(d) 用偏微在空间和赋予侧边条件的平面 $z=x+y$ 上的特征线来解释 (b) 和 (c) 的结果.

3. (a) 求关于 $u=u(x,y,z,t)$ 的偏微 $u_t=u_x+2u_y-u_x$ 的通解.

(b) 满足 $u(x,y,z,0)=x^2+y^2+z^2$ 的特解是什么?

(c) u 如 (b) 中, 在固定时刻 t, 求使得 $u(x,y,z,t)=0$ 的点 (x,y,z).

4. (a) 求 $-yu_x + xu_y + u_z = 0, u = u(x, y, z)$ 的通解.

提示 用 z 作为特征曲线的参数并注意到 $dx/dz = -y$ 和 $dy/dz = x$ 隐含 $d^2x/dz^2 = -x$. 因此, $x = \alpha\cos z + \beta\sin z, \cdots$ 等等.

(b) 证明除了一条之外所有特征曲线都是绕着 z-轴的螺旋线, 并证明该偏微的任一解在每条这样的螺旋线上取常值.

5. 考虑偏微 $xu_x + yu_y + zu_z = 0$.

(a) 求该偏微满足 $u(x, y, 1) = x^2 + y + 1$ 的解. 该解在哪有定义?

(b) 通过考虑特征曲线, 证明该偏微对所有 (x, y, z) 有定义的任一解必为常数.

(c) 求偏微除了 $(0, 0, 0)$ 之外对所有 (x, y, z) 都是 C^1 的任一非常数的解.

6. (a) 求拟线性偏微 $2(uu_x + uu_y) = 1$ 以隐式 $C(A(x, y, u), B(x, y, u)) = 0$ 表示的解, 其中函数 C 是 C^1.

(b) 求 (a) 部分偏微满足侧边条件 $u(x, 2x) = 1$ 的解.

(c) 证明 (a) 部分偏微没有满足 $u(x, x) = 1$ 的解.

提示 注意到 $\frac{d}{dx}u(x, x) = u_x(x, x) + u_y(x, x)$.

7. (a) 用习题 6(a) 中的形式表示偏微 $xuu_x - yuu_y = x^2$ 的解.

(b) 求 (a) 部分偏微的一个解, 使得 $u(1, y) = y^2 + 1$.

(c) 证明 (a) 部分偏微有无穷多个满足 $u(x, \frac{1}{x}) = x,\ x > 0$ 的解.

提示 取 $C(r, s) = s - f(r)$, 且 $f(1) = 0$.

8. 求习题 6(a) 中偏微满足侧边条件 $u(s, 2s) = g(s)$ 的参数化解 $x = X(s, t),\ y = Y(s, t),\ u = U(s, t),\ g(s)$ 为给定的 C^1 函数. 当 $g(s) = 1$ 时, 验证你的答案与习题 6(b) 的答案相符.

9. 求习题 7(a) 中偏微满足侧边条件 $u(1, s) = g(s)$ 的参数化解 $x = X(s, t),\ y = Y(s, t),\ u = U(s, t),\ g(s)$ 为给定的函数. 为简单起见, 假设 $g(s) \geqslant 1$. 当 $g(s) = s^2 + 1$ 时, 验证你的答案与习题 7(b) 的答案相符.

10. 求偏微 $yuu_x + xuu_y = xy$ 满足侧边条件 $u(\cos s, \sin s) = \sin(2s)$ 的解. 该解在哪有意义?

11. 利用在关于交通流的子节中的符号和假设, 假设初始车辆密度为 $\rho(x, 0) = f(x)$. 设 x_0 是使 $f'(x)$ 取绝对最大值的唯一点, 设为 $f'(x_0) = G$. 已经证明第一个激波在时刻 $t_0 = d[2MG]^{-1}$ 时出现. 如果最初在 x_0 附近车辆之间大约有 n 个车辆长度的距离 (即, $f(x_0) = \rho(x_0, 0) = d/(1 + n)$), 则证明第一个激波点是位于 $x = x_0 + \frac{d(n-1)}{2G(n+1)}$, 它与速度限度 M 无关.

12. 在交通流的子节中, 假设了 $v = M(1 - \frac{\rho}{d})$. 更一般地假设 $v = V(\rho)$, V 为某一给定函数.

(a) 证明关于 ρ 的偏微成为 $\rho_t + (V(\rho) + \rho V'(\rho))\rho_x = 0$.

(b) 求这个偏微满足条件 $\rho(x,0) = f(x)$ 的参数化解.

(c) 对怎样的函数 $V(\rho)$(满足 $V(d) = 0$)(a) 部分中的偏微变为线性? 对这样的 V, 求 (b) 中解 $\rho(x,t)$ 的一个显式形式. 在这种情形激波在发展吗?

13. 在下述步骤中, 我们推荐出 Euler 方程, $\rho(x,t)(v_t + vv_x) = f(x,t)$ (比较 (30) 式).

(a) 考虑在时刻 $t = 0$ 时 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的这部分流体. 在时刻 t, 这部分流体将在 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 之间. 令 $f(x,t)\mathbf{i}$ 为作用在流体上单位长度上的力. Newton 方程表明这部分流体的动量的变化率等于作用在这部分流体上的总作用力. 因此,

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)v(x,t)dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t)dx.$$

利用 Leibniz 法则 (参看附录 3) 和求两边在 $t = 0$ 的值, 得

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}(\rho v)|_{t=0}dx + \rho(b,0)v(b,0)x_2'(0) - \rho(a,0)v(a,0)x_1'(0) = \int_a^b f(x,0)dx.$$

(b) 利用 $x_1'(0) = v(a,0)$, $x_2'(0) = v(b,0)$ 和微积分的基本定理推得

$$\int_a^b (\rho v)_t + (\rho v^2)_x|_{t=0}dx = \int_a^b f(x,0)dx.$$

(c) 因 a 和 b 是任意的且 $t = 0$ 的选取不是必要的, 得到

$$(\rho v)_t + (\rho v^2)_x = f(x,t). \tag{$*$}$$

利用连续性方程 $\rho_t + (v\rho)_x = 0$ 把方程 $(*)$ 的左边转化为期望的形式 $\rho(v_t + vv_x)$.

14. 用关于连续体力学子节的符号, 通过完成下面步骤证明, 对小的速度 $v(x,t)$ 和偏离常数密度 ρ_0 很小的密度 $\rho(x,t)$, $\rho(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 都服从波方程.

(a) 令 $v = \epsilon\bar{v}(x,t)$ 和 $\rho = \rho_0 + \epsilon\bar{\rho}(x,t)$, 其中 ϵ 是小参数. 由状态方程 $p(x,t) = f(\rho(x,t)) = f(\rho_0 + \epsilon\bar{\rho}(x,t)) \approx f(\rho_0) + \epsilon f'(\rho_0)\bar{\rho}(x,t)$(为什么?). 把这些表示式代入方程 $\rho_t + (\rho v)_x = 0$ 和 $\rho(v_t + vv_x) = -p_x$ 并忽略具有因子 ϵ^2 的项, 得 $\bar{\rho}_t\epsilon + \rho_0\bar{v}_x\epsilon = 0$ 和 $\rho_0\bar{v}_t\epsilon = -f'(\rho_0)\bar{\rho}_x(x,t)\epsilon$,

$$\text{或}\quad \bar{\rho}_t = -\rho_0\bar{v}_x \quad \text{和} \quad \rho_0\bar{v}_t = -c_0^2\bar{\rho}_x, \quad \text{其中} \quad c_0^2 = f'(\rho_0). \tag{$**$}$$

(b) 通过对 $(**)$ 中第一个方程关于 t 求导和对第二个方程关于 x 求导, 得 $\bar{\rho}_{tt} = c_0^2\bar{\rho}_{xx}$, 类似地有 $\bar{v}_{tt} = c_0^2\bar{v}_{xx}$. 对任意的 C^2 函数 f 和 g, $f(x + c_0t) + g(x - c_0t)$ 是这些方程中的每个方程的通解. 因此, c_0 称为是在如上的近似下, 扰动在介质中传播的速度 (参看第 1.3 节的习题 12).

注记 上面这种通过忽略 ϵ 的高次幂的项来确定与已知方程 (即, $\rho = \rho_0$ 和 $v = 0$) 有小偏差 (带有 ϵ 因子) 的方程的过程称为**线性化**, 因为用这种方式得到的方程是线性

的. 虽然这种线性化使得方程非常容易求解 (例如, 由于叠加原理), 但要知道线性化了的方程只是近似正确的, 而且精确解的某些重要的特征在这种过程中或许会消失掉 (例如, 线性化了的交通流方程的解没有激波). 我们在前面有关极小曲面方程就注意到这个 (参看第 1.2 节的例 11). □

15. 在例 6 中, 气体元素在时刻 t 时的位置 $x(t)$ 服从线性常微

$$x'(t) = v(x(t), t) = \frac{\alpha(x(t) - c_0 t)}{1 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)\alpha t} \quad (\text{为什么?}).$$

(a) 求这个常微的通解.

(b) 证明这个常微 $x(t)$ 的每个解趋于

$$\frac{-2c_0}{(\gamma+1)\alpha} \quad \text{当} \quad t \to \frac{-2}{(\gamma+1)\alpha}\text{时}.$$

(c) 虽然有事实: 当 $x \to \infty$ 时 $v(x,t) \to \infty$, 证明每个气体元素的速度当 $t \to \infty$ 时最终趋于 $\frac{-2c_0}{\gamma-1)}$.

16. 令

$$v_{\pm}(x,t) = \frac{\alpha(x - \pm c_0 t)}{1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha t}.$$

在例 6 中, 选择了考虑 $v_+(x,t)$. 证明 $v_-(x,t) = -v_+(-x,t)$. 为什么这意味着 $v_-(x,t)$ 是通过取 $v_+(x,t)$ 的物形背景的镜像获得的解?

17. 如在推导 (34′) 和 (35′) 中所做的那样, 假设 v 和 ρ 函数相关 (即, $v = V(\rho)$).

(a) 假设一个状态方程具有形式 $p = f(\rho) > 0$, 其中 $f'(\rho) > 0$, 证明方程 $v_t + (v \pm c(v))v_x = 0$ 是线性的 (不仅仅是拟线性) 当且仅当 $f(\rho) = C(1 - \frac{D}{\rho})$, 其中 C 和 D 是某些正常数.(注意 D 代表某个临界密度, 低于它压力可能为零. 当 $\rho \to \infty$ 时, 压力趋于最大值 C.)

(b) 令 $f(\rho) = C(1 - \frac{D}{\rho})$. 假设当 $\rho = D$ 时 $v = 0$, 且 $v \geqslant 0$. v 是怎样依赖于 ρ 的, 即, 函数 $V(\rho)$ 是什么?

(c) 在 (a) 和 (b) 的假设下, 证明扰动在介质中以常速 $\sqrt{\frac{C}{D}}$ 传播. 换句话说, $v(x,t) = g(x - \sqrt{\frac{C}{D}}t)$, 其中 $v(x,0) = g(x)$ 且 $0 < g(x) < \sqrt{\frac{C}{D}}$. 为什么限制初始速度 $g(x)$ 是必要的?

§2.4 关于一般非线性偏微的补充 (选修)

关于 $u = u(x,y)$ 的一般一阶偏微为形式

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1}$$

其中 F 为某个 (五个变量的) 函数, 假设它至少是 C^1 的. 因为通常不认为 u_x 和 u_y 是变量, 所以当说到 $F = F(x,y,p,q)$ 为一个函数时, 习惯用 p 表示 u_x 和用 q 表示 u_y. 对于线性方程, F 具有形式

$$F(x,y,u,p,q) = a(x,y)p + b(x,y)q + c(x,y)u - f(x,y), \tag{2}$$

而对于拟线性方程

$$F(x,y,u,p,q) = a(x,y,u)p + b(x,y,u)q - c(x,y,u). \tag{3}$$

通过注意到沿着特征曲线一阶线性偏微变为常微来解出它们, 特征曲线可视为下面方程组的解

$$X'(t) = a(X(t),Y(t)) \quad 和 \quad Y'(t) = b(X(t),Y(t)), \tag{4}$$

其中偏微为 $F(x,y,u_x,u_y) = 0$, F 如 (2). 注意到 $F_p = a(x,y)$ 和 $F_q = b(x,y)$, 这时方程组 (4) 可写为 $X' = F_p$ 和 $Y' = F_q$. 为了解一般的一阶偏微 (1), F 是任一给定的 C^1 函数, 可尝试定义特征曲线为如下方程组的解

$$\begin{aligned} X'(t) &= F_p(X(t),Y(t),U(t),P(t),Q(t)) \\ Y'(t) &= F_q(X(t),Y(t),U(t),P(t),Q(t)), \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $U(t) = U(X(t),Y(t))$, $P(t) = u_x(X(t),Y(t))$ 和 $Q(t) = u_y(X(t),Y(t))$. 然而, 与线性情形不同,(5) 的右边不仅依赖于 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 还依赖于与未知的解 $u(x,y)$ 有关的 $U(t)$, $P(t)$ 和 $Q(t)$. 但可把 (5) 看作一个更大的关于五个未知函数 $X(t)$, $Y(t)$, $U(t)$, $P(t)$ 和 $Q(t)$ 的五个常微组成的方程组的一部分. 需要找出剩下的三个方程应该是什么. 首先, 注意到 $U'(t) = \frac{d}{dt}[u(X(t),Y(t))] = u_xX'(t) + u_yY'(t) = P(t)X'(t) + Q(t)Y'(t) = P(t)F_p(\cdots) + Q(t)F_q(\cdots)$, 其中 "$\cdots$" 表示 "$X(t)$, $Y(t)$, $U(t)$, $P(t)$, $Q(t)$". 因此, 关于 $U'(t)$ 的方程应是

$$U'(t) = P(t)F_p(\cdots) + Q(t)F_q(\cdots).$$

关于 $P'(t)$ 的方程可通过注意到 $P'(t) = \frac{d}{dt}(u_x(X(t),Y(t)) = u_{xx}X'(t) + u_{xy}Y'(t) = u_{xx}F_p(\cdots) + u_{xy}F_q(\cdots)$ 获得. 我们似乎陷入了一个困境, 由于 u_{xx}

的出现似乎需要引入又一个函数 $R(t) = u_{xx}(X(t), Y(t))$ ①, 这将导致一个更大的方程组. 然而, 尚未用过 $u(x, y)$ 应满足偏微 $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ 这个事实. 这个事实表明

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) \\ &= F_x + F_u u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{yx}. \end{aligned}$$

因此,$P'(t) = u_{xx} F_p(\cdots) + u_{xy} F_q(\cdots) = -[F_x(\cdots) + P(t) F_u(\cdots)]$, 类似地 $Q'(t) = -[F_y(\cdots) + Q(t) F_u(\cdots)]$. 于是, 最后得到方程组

$$\boxed{\begin{aligned} X'(t) &= F_p(\cdots) \\ Y'(t) &= F_q(\cdots) \\ U'(t) &= P(t) F_p(\cdots) + Q(t) F_q(\cdots) \\ P'(t) &= -[F_x(\cdots) + P(t) F_u(\cdots)] \\ Q'(t) &= -[F_y(\cdots) + Q(t) F_u(\cdots)]. \end{aligned}} \tag{6}$$

方程组 (6) 构成了偏微 $F(x, y, u, p, q) = 0$ 的**特征方程组**. (6) 的一个解 $(X(t), Y(t), U(t), P(t), Q(t))$ 称为**预特征带**; 它定义了在 $xyupq$–空间上的一条曲线, $xyupq$–空间有时笼统地称为“相空间”. 该方程组可看作在相空间流体流中粒子运动的运动方程. 如对所有的 t

$$F(X(t), Y(t), U(t), P(t), Q(t)) = 0, \tag{7}$$

则**预特征带**称为**特征带**. 如在特征带中略去 $P(t)$ 和 $Q(t)$, 只考虑 $(X(t), Y(t), U(t))$, 则得到一曲线 (在 xyu–空间), 称其为**特征 3–曲线**. (对线性方程, 曲线 $(X(t), Y(t))$ 称作特征曲线, 但有些书对我们的特征 3–曲线概念仍保留这种术语.)

当然, 这里最终目的是求偏微 $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ 满足适当的侧边条件的解 (例如, u 在某条曲线上有给定的值). 关于特征带的讨论是不切题的, 除非这种讨论适合于这个目的. 基本思想是把解 $u(x, y)$ 的图像看作由一族特征 3–曲线在 xyu–空间织成的曲面, 这族特征 3–曲线是以满足侧边条件的方式来构造

①原文误为 $R(t) = u_{xx}(x(t), y(t))$.——译者

的. 我们将叙述这个过程并给出一些例子, 但略去了这个方法有效性的证明 (参看 Courant 和 Hilbert, 第二卷, 第 75 页及后面). 总之, 用这种过程获得的假设解的有效性能够并且应该直接验证.

随着 s 的变化, 设 $(f(s), g(s))$ 绘出一条正则曲线 (在 xy-平面上), 视其为侧边条件曲线. 来寻求下面问题的解

$$\begin{aligned} &F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \\ &u(f(s), g(s)) = G(s), \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $g(s)$ 是给定的 C^1 函数. 这样的问题可能无解 (例如, 考虑偏微 $u_x^2 + u_y^2 + 1 = 0$). 然而, 如一个解在侧边条件曲线的某个领域内存在, 则这样的解常能通过完成如下步骤求得.

1. 如可能, 求函数 $h(s)$ 和 $k(s)$ 满足

$$F(f(s), g(s), G(s), h(s), k(s)) = 0, \tag{9}$$

$$G'(s) = h(s)f'(s) + k(s)g'(s), \tag{10}$$

$$F_p(f(s), g(s), \cdots)g'(s) - F_q(f(s), g(s), \cdots)f'(s) \neq 0. \tag{11}$$

如 $h(s)$ 和 $k(s)$ 不存在, 则 (8) 无解. 如 $(f(s), g(s))$ 有多个选取, 则对每个这样的选取 (8) 通常有一个解存在.

2. 对每个固定的 s, 解下面具有给定初始条件 $P(s,0) = h(s)$, $Q(s,0) = k(s)$ 的关于 $X(s,t)$, $Y(s,t)$, $U(s,t)$, $P(s,t)$ 和 $Q(s,t)$ 的特征方程组 (参看 (6)), 其中 $h(s)$ 和 $k(s)$ 是在步骤 1 中求得的函数:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}X(s,t) = F_p(X(s,t), Y(s,t), \cdots) \\ &\tfrac{d}{dt}Y(s,t) = F_q(X(s,t), Y(s,t), \cdots) \\ &\tfrac{d}{dt}U(s,t) = P(s,t)F_p(\cdots) + Q(s,t)F_q(\cdots) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}P(s,t) = -(F_p(\cdots) + P(s,t)F_u(\cdots))$$
$$\frac{d}{dt}Q(s,t) = -(F_y(\cdots) + Q(s,t)F_u(\cdots)).$$

如果有用的话, 假设对所有的 (s,t), $F(X,Y,U,P,Q)=0$, 因为由 (9), 这个量在 $t=0$ 时为 0, 且可能证明 $F(X,Y,U,P,Q)$ 与 t 无关, 如果 X, Y, U, P 和 Q 满足方程组 (12) 的话 (即, 解总是特征带). 还有, 根据下一个步骤, 如果不解出 P 和 Q 就能解出 X, Y 和 U 的话, 就没必要去解 P 和 Q.

3. 由参数化观点, 当 s 和 t 变化时, 由如下定义

$$x = X(s,t),\ y = Y(s,t),\ u = U(s,t), \tag{13}$$

的点 (x,y,u), 绘出 (8) 的假设解 u 在 xyu–空间的图像, 至少是在由 $(f(s), g(s), G(s))$ 绘出的曲线的一个领域内. 在某些情形, 可用 (13) 的前两个方程解得以 x 和 y 表示 s 和 t(设为 $s=S(x,y)$ 和 $t=T(x,y)$) 来得到一个解 $u(x,y)=U(S(x,y),T(x,y))$, 其中 (x,y) 在曲线 $(f(s),g(s))$ 的一个领域内.

注记 需要对条件 (11) 作出一些注解. 假设解的图像是由 (13) 得到的点令 s 和 t 变化时在 xyu–空间的形成的曲面. 然而, 这里可能会有问题, 因为会出现以这种方式定义的曲面将不是以 1-1 方式投射到 xy–平面上, 在这种情形该曲面将不是一个函数的图像. 为了得到至少在曲线 $(f(s),g(s))$ 的一个领域内的一个解 $u(x,y)$, 需要知道对每个固定的 s, 曲面 (13) 在点 $(f(s),g(s),G(s))$ 的法向量有非零的 $\mathbf{k}$ 分量. 这个法向量是两个切向量的叉积

$$\left(\frac{\partial X}{\partial s}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial s}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial s}\mathbf{k}\right) \times \left(\frac{\partial X}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial t}\mathbf{k}\right) \quad 于\ (s,0).$$

则 $\mathbf{k}$ 分量是 $X_tY_s - X_sY_t$. 因此, 除非 $X_t(s,0)g'(s) - Y_t(s,0)f'(s) \neq 0$①,(13) 不会是在曲线 $(f(s),g(s))$ 的一个领域内一个解的图像. 因 $X_t(s,0) = F_p(f(s),g(s), G(s),h(s),k(s))$ 和 $Y_t(s,0) = F_q(\cdots)$, 所以这个条件可写成 (11) 那样. 在线性偏微的情形, 条件 (11) 等价于要求侧边条件曲线与特征曲线横向相交 (为什么?) □

在第 2.3 节, 解答了拟线性偏微 $u_x + uu_y = 6x$,(i) 在例 3 中用了 Lagrange 方法,(ii) 在例 4 中用了参数方程. 然而, 这个偏微也能用上述解一般的一阶偏

①原文误为 $X_t(s,0)k'(s) - Y_t(s,0)h'(s) \neq 0$.——译者

微的步骤来解, 而且看一下这种方法是如何适用于这个熟悉的方程是有益的.

例 1 求偏微 $u_x + uu_y = 6x$ 满足侧边条件 $u(0,s) = G(s)$ 的解.

解 因为由 $(0,s)$ 绘出的侧边条件曲线是 y-轴, 所以 $f(s) = 0$ 和 $g(s) = s$. 此时 $F(x,y,u,p,q) = p + uq - 6x$. 需要求出函数 $h(s)$ 和 $k(s)$, 使得

$$h(s) + G(s)k(s) = 0 \quad 和 \quad G'(s) = k(s),$$

这分别为 (9) 和 (10). 因此, 取 $k(s) = G'(s)$ 和 $h(s) = -G(s)G'(s)$. 此时条件 (11) 是必然满足的. 特征方程组 (12) 是

$$\frac{dX}{dt} = 1, \quad \frac{dY}{dt} = U, \quad \frac{dU}{dt} = P + QU, \quad \frac{dP}{dt} = -(-6 + PQ), \quad \frac{dQ}{dt} = -Q^2$$

以及初始条件

$$X(s,0) = 0, \quad Y(s,0) = s, \quad U(s,0) = G(s),$$
$$P(s,0) = h(s) = -G(s)G'(s), \quad Q(s,0) = k(s) = G'(s).$$

显然,$X(s,t) = t$, 又因为可假设 $F(X,Y,U,P,Q) = P + UQ - 6X = 0$, 所以关于 $\frac{dU}{dt}$ 的方程化为 $\frac{dU}{dt} = 6X = 6t$, 于是 $U(s,t) = 3t^2 + G(s)$. 则由 $\frac{dY}{dt} = U$ 得 $Y(s,t) = t^3 + G(s)t + s$. 于是, 得到解的参数化形式

$$x = t, \quad y = t^3 + G(s)t + s, \quad u = 3t^2 + G(s). \tag{14}$$

回顾一下第 2.3 节后面的注记, 发现本问题的解可由如下隐式表示

$$u - 3x^2 - G(y + 2x^3 - xu) = 0. \tag{15}$$

如把 (14) 中关于 x, y 和 u 的表示式代入这个隐式关系, 得恒等式 $G(s) - G(s) = 0$, 这意味着在 (14) 中当 s 和 t 变化时绘出的曲面落在由 (15) 给出的曲面上. 对简单的函数 $G(s)$(比如,1 次或 2 次多项式), 由 (14) 中前两个方程中容易解得以 x 和 y 来表示 s 和 t, 这时 (14) 中的第三个方程得出显式解 $u(x,y)$. 无论如何, 在制作一个曲面的计算机标绘图时, 参数化解 (14) 通常比 (15) 优越. □

注记 对于拟线性方程, 其中 $F(x,y,u,p,q) = a(x,y,u)p + b(x,y,u)q - c(x,y,u)$, 当 (x,y,u,p,q) 满足 $F(x,y,u,p,q) = 0$ 时 (参看 (7)), 注意到 $pF_p + qF_q = a(x,y,u)p + b(x,y,u)q = c(x,y,u)$. 由此得 (12) 中前三个方程不含有 $P(t)$ 和 $Q(t)$, 因此这三个方程足以确定 X, Y 和 U(即, 如偏微是拟线性的,(12) 中后两个方程可去掉). 在下面的例子中, (12) 中所有五个方程都需要. □

例 2 分别就 $G(s)=1$, $G(s)=-1$ 和 $G(s)=s$ 求解下列问题

$$u_xu_y-u=0$$
$$u(s,-s)=G(s).$$

解 对每个侧边条件, 将要解相同的特征方程组 (12), 在这三种情形中只是初始条件不同. 因此, 首先求出特征方程组 (12) 的通解, 然后由每个情形的侧边条件来确定对 s 的依赖性. 这时 $F(x,y,u,p,q)=pq-u$, 且特征方程组 (12) 为

$$\frac{dX}{dt}=F_p=Q(t),\quad \frac{dY}{dt}=F_q=P(t),\quad \frac{dU}{dt}=QF_p+PF_q=2P(t)Q(t),$$
$$\frac{dP}{dt}-(F_x+P(t)F_u)=P(t),\quad \frac{dQ}{dt}-(F_y+Q(t)F_u)=Q(t).$$

易得 $P(t)=ae^t$ 和 $Q(t)=be^t$, a 和 b 是任意常数. 因想要得到特征带 (即, $F(x,y,u,p,q)=0$), 所以置 $U(t)=P(t)Q(t)=abe^{2t}$ (而这确实实际上满足关于 U 的方程). 最后, $X(t)=be^t+\alpha$ 和 $Y(t)=ae^t+\beta$, α 和 β 是常数. 则通特征带由下面给出

$$X(t)=be^t+\alpha,\quad Y(t)=ae^t+\beta,\quad U(t)=abe^{2t},\quad P(t)=ae^t,\quad Q(t)=be^t.$$

情形 $G(s)=1$: 由于侧边条件给在由 $(s,-s)$ 绘出的直线 $y=-x$ 上, 所以在 (9), (10) 和 (11) 中, 有 $f(s)=s$ 和 $g(s)=-s$. 求 $h(s)$ 和 $k(s)$ 使得

$$1=G(s)=h(s)k(s),\quad 0=G'(s)=h(s)-k(s)$$
$$\text{和}\quad 0\neq F_p(\cdots)(-1)-F_q(\cdots)(1)=-k(s)-h(s).$$

有两种选择, 即, $h(s)=1$ 和 $k(s)=1$, 或 $h(s)=-1$ 和 $k(s)=-1$. 对第一种选择, 得到

$$X(s,t)=e^t-1+s,\ Y(s,t)=e^t-1-s,\ U(s,t)=e^{2t},\ P(s,t)=e^t,\ Q(s,t)=e^t.$$

把前两个式子相加解得以 x 和 y 来表示 e^t, 得 $e^t=\frac{1}{2}(x+y+2)$. 则解是 $u(x,y)=e^{2t}=\frac{1}{4}(x+y+2)^2$. 如取 $h(s)=-1$ 和 $k(s)=-1$, 读者可验证获得的解为 $u(x,y)=\frac{1}{4}(x+y-2)^2$.

情形 $G(s)=-1$: 在这种情形, 没有这样的函数 $h(s)$ 和 $k(s)$, 它们满足

$$-1=h(s)k(s),\quad 0=G'(s)=h(s)-k(s)\quad \text{和}\quad 0\neq -k(s)-h(s).$$

因此, 此时无解.

情形 $G(s) = s$: 这时 $h(s)$ 和 $k(s)$ 必须满足

$$s = h(s)k(s), \quad 1 = G'(s) = h(s) - k(s) \quad 和 \quad 0 \neq -k(s) - h(s).$$

由前两个式子, 得 $(h(s), k(s))$ 对的选取

$$h(s) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4s}) \quad 和 \quad k(s) = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4s}),$$

但它们只对 $s > -\frac{1}{4}$ 有定义, 且有非零的和. 因此, 将会无解, 除非只要求侧边条件 $u(s, -s) = s$ 对 $s > -\frac{1}{4}$ 成立. 假设它成立, 则

$$X(s,t) = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4s})(e^t - 1) + s, \quad Y(s,t) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4s})(e^t - 1) - s$$

$$和 \quad U(s,t) = se^{2t}.$$

现在虽然可能从前两个式子解得以 x 和 y 来表示 s 和 e^t(至少在侧边条件曲线的一个领域内), 但这个解的参数化形式很可能比显式解本身更方便地来刻画显式解的图像. □

例 3 假设在 xy–平面上的一正则曲线上的每点 (x, y) 沿曲线的法向以速度 $c(x, y)$ 运动, 这里 $c(x, y)$ 是 xy–平面上给定的正的 C^1 函数. 在几何光学中, 以这种方式运动的曲线代表在二维介质中运动的波前曲线, 其中光的速度 $c(x, y)$, 可能依赖于位置 (x, y)(即, 折射度是可变的). 在运动的曲线上的每点绘出 (可能是歪曲的) 在这个介质中的光线. 证明, 任给

$$u_x^2 + u_y^2 = c(x, y)^{-2} \tag{16}$$

(称为**短时距方程**或 **Hamilton-Jacobi方程**, 由上下文决定) 的一个解 $u(x, y)$, 曲线 $u(x, y) = \tau$ 定义了一条在时刻 τ 的波前曲线. 对偏微 (16), 证明特征方程组 (12) 包含一族粒子的运动方程, 这些粒子具有加速度 $\mathbf{A}(x, y) = -\nabla[-\frac{1}{2}c(x, y)^{-2}]$ (即, 如这些粒子质量为 1, 它们受到具有势为 $-\frac{1}{2}c(x, y)^{-2}$ 的作用力). 求这族粒子运动与波前曲线运动之间的对偶关系, 这种对偶预示了量子力学.

解 令 $(x(\tau), y(\tau))$ 为在时刻 τ 曲线 $u(x, y) = \tau$ 上一点的位置 (即,$u(x(\tau), y(\tau)) = \tau$) 并假设它的速度 $\mathbf{v}(\tau) = x'(\tau)\mathbf{i} + y'(\tau)\mathbf{j}$ 与曲线 $u(x, y) = \tau$ 垂直 (即,

$\mathbf{v}$ 和 ∇u 是平行的; $\mathbf{v}\cdot\nabla u=\|\mathbf{v}\|\|\nabla u\|$). 假设 u 满足 (16), 则

$$1=\frac{d\tau}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}u(x(\tau),y(\tau))=u_x(x(\tau),y(\tau))x'(\tau)+u_y(x(\tau),y(\tau))y'(\tau)$$

(由链法则)

$$=\mathbf{v}(\tau)\cdot\nabla u(x(\tau),y(\tau))=\|\mathbf{v}(\tau)\|\|\nabla u(x(\tau),y(\tau))\|=\frac{\|\mathbf{v}(\tau)\|}{c(x(\tau),y(\tau))}$$

(由偏微(16)).

因此, $\|\mathbf{v}(\tau)\|=c(x(\tau),y(\tau))$ 且随着时间 τ 的变化, 曲线 $u(x,y)=\tau$ 确实刻画了在介质中的波前运动. 如取 $F(x,y,u,p,q)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{2}c(x,y)^{-2}$, 则 (16) 的特征方程组是

$$\frac{dX}{dt}=P(t),\quad \frac{dY}{dt}=Q(t),\quad \frac{dU}{dt}=P(t)^2+Q(t)^2=c(X(t),Y(t))^{-2},$$

$$\frac{dP}{dt}=A_1(X(t),Y(t)),\quad \frac{dQ}{dt}=A_2(X(t),Y(t)),$$

其中 $A_1(x,y)\mathbf{i}+A_2(x,y)\mathbf{j}=\mathbf{A}(x,y)=-\nabla[-\frac{1}{2}c(x,y)^{-2}]$(即, $A_1=-c_x/c^3$ 和 $A_2=-c_y/c^3$). 于是, 得

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{dP}{dt}=A_1(X(t),Y(t)),\ \frac{d^2Y}{dt^2}=\frac{dQ}{dt}=A_2(X(t),Y(t)),$$

$$\frac{dU}{dt}=\frac{1}{c(X(t),Y(t))^2}. \tag{17}$$

因此, 特征 3- 曲线具有形式 $(X(t),Y(t),U(t))$, 其中 $(X(t),Y(t))$ 是质量为 1 的粒子在时刻 t 的位置, 该粒子在具有势为 $-\frac{1}{2}c(x,y)^{-2}$ 的作用力 $A(x,y)$ 的影响下运动. 假设如此给定这种粒子的初始曲线 $(f(s),g(s))$ 以及初始速度分布 $h(s)\mathbf{i}+k(s)\mathbf{j}$, 使得 $h(s)^2+k(s)^2-c(f(s),g(s))^{-2}=0$ 及 $h(s)f'(s)+k(s)g'(s)=0$ (即, 速度是曲线的法向). 设 $X(s,t)$, $Y(s,t)$, $U(s,t)$ 是 (17) 具初始条件 $X(s,0)=f(s)$, $Y(s,0)=g(s)$ 和 $U(s,0)=0$ 的解, 则得 (16) 的参数化解

$$x=X(s,t),\quad y=Y(s,t),\quad u=U(s,t), \tag{18}$$

其在曲线 $(f(s),g(s))$ 上为 0. 如 (18) 中前两个方程是可逆的, 得到 $s=S(x,y)$ 和 $t=T(x,y)$, 则有显式解 $u(x,y)=U(S(x,y),T(x,y))$. 初始波前 $u(x,y)=0$ 由曲线 $(f(s),g(s))$ 绘出 [即,$(X(s,0),Y(s,0))$], 但一般地, 在时刻 $t\neq 0$ 的波

前 $u(x,y)=t$ 不是由 $(X(s,t),Y(s,t))$ 随着 s 的变化绘出. 的确, 如 $u(X(s,t),Y(s,t))=t$, 则

$$1=\frac{dt}{dt}=\frac{d}{dt}u(X(s,t),Y(s,t))=\frac{dU}{dt}(s,t)=\frac{1}{c(X(s,t),Y(s,t))^2},$$

此一般不真, 除非 $c(x,y)=1$. 注意到当波前上的点 $x(\tau),y(\tau))$ 以速度 $c(x,y)$ 运动时, 粒子以速度 $[P(t)^2+Q(t)^2]^{\frac{1}{2}}=c(X(t),Y(t))^{-1}$ 运动. 因 $\frac{dX}{dt}=P(t)=u_x(X(t),Y(t))$ 和 $\frac{dY}{dt}=Q(t)=u_y(X(t),Y(t))$, 所以这些粒子, 以及在波前的那些点, 沿着方向 ∇u 运动. 因此, 粒子和光线绘出相同的轨道, 但分别 (通常是不同的) 以速度 c^{-1} 和 c. 对固定的 s, 时刻 t 时在 $(X(s,t),Y(s,t))$ 的粒子落在生成于时刻 $\tau=U(s,t)$ 时的波前曲线上. □

注记 1 由上面构造的一族单位质量的粒子用参数 s 来标识. 在时刻 t, 带有标记 s 的粒子具有动能 $\frac{1}{2}[P(s,t)^2+Q(s,t)^2]$ 和势能 $-\frac{1}{2}c(X(s,t),Y(s,t))^{-2}$. 这些能的和为零 (特别, 为常数), 因为 $F(X(s,t),Y(s,t),U(s,t),P(s,t),Q(s,t))=0$ (即, (X,Y,U,P,Q) 是特征带) [①] , 这是由于 $P(s,0)$, $Q(s,0)$(即, $h(s)$ 和 $k(s)$) 是如此选取, 使得当 $t=0$ 时 $F=0$(即 (9) 成立).(特征方程组隐含 F 在每条预特征带上是常数). 在粒子力学中, 在任意时刻粒子的**瞬时作用能**等于它的动能减去它的势能. 对于这里讨论的粒子, 这个差为 $c(X(s,t),Y(s,t))^{-2}$(即, $\frac{1}{2}c^{-2}-(-\frac{1}{2}c^{-2})=c^{-2}$). 由 (17) 和初始条件 $U(s,0)=0$, 得 $U(s,t)=\int_0^t c(X(s,r),Y(s,r))^{-2}dr$. 因此, 在粒子的范畴中, $U(s,t)$ 是粒子 s 在时间区间 $[0,t]$ 上的 (总)**作用能**. 在波的范畴中, $u(x,y)=U(s,t)$ 称为波的**相函数**(即, 波前可视为该波的常数相位曲线). 因此, 波的常数相位曲线 (即, 波前) 就是对应的粒子族的常数作用能曲线. **Fermat原理**表明两点之间光线所走的连接两点的路径, 是使得光线的端点沿着这条路径, 以速度 $c(x,y)$ 从一点移动到另一点, 将以最少时间到达另一端点. 由于在波的范畴中 "时间"(或相位) 对应于在粒子范畴中的 "作用能", 所以粗略地把波范畴里的 Fermat 原理看作相当于**最小作用能原理**, 即, 如一粒子在给定的时间区间内从一点移动到另一点, 它取的是最小 (总) 作用能路径. □

注记 2 引人兴趣的波/粒子对偶, 它作为如 (16) 的偏微的求解过程的组成部分, 是由爱尔兰数学家 William Rowan Hamilton 爵士 [1805—1865] 和德国数学家 Karl Gustav Jacob Jacobi[1804—1851] 发现的. 也许直到 20 世纪初量子

①原文误为 $F(X(s,t),Y(s,t),P(s,t),Q(s,t),U(s,t))=0$ (即, (X,Y,P,Q,U) 是特征带). ——译者

力学的出现, Hamilton-Jacobi 理论的非常重大的意义才被人们所认识, 那时发现 (既在理论上也在实验上) 波/粒子对偶不仅仅是数学好奇. 的确, 它构成在原子和亚原子领域中现代物理的主要基础. 在第 8.5 节, 将讨论量子力学并运用 Schrödinger 方程来确定氢原子中的波函数和电子的能量水平. □

我们给出最后一个特殊的例子说明上面的普遍性.

例 4 考虑一介质, 光在其中的速度 $c(x,y)$ 与到 x-轴的距离成比例, 比如 $c(x,y)=y$, $y>0$. 证明由正 y-轴组成的波前是以如下方式运动: 在晚些时候它仍然形成过原点的射线, 且光线 (或相应的粒子轨道) 绘出与 x-轴正交的半圆.

解 此时偏微 (16) 成为 $u_x^2+u_y^2=y^{-2}$. 取 u 在指定的初始波前上为 0; 即, $f(s)=0$, $g(s)=s$, $G(s)=0$ (参看 (8)), 这里 $s>0$. 为了满足 (9) 和 (10), 即 $h(s)^2+k(s)^2-g(s)^{-2}=0$ 和 $0=G'(s)=h(s)f'(s)+k(s)g'(s)=k(s)$, 置 $k(s)=0$ 和 $h(s)=s^{-1}$. 取 $F(x,y,u,p,q)=\frac{1}{2}(p^2+q^2-y^{-2})$, 则特征方程组 (12) 成为

$$\frac{dX}{dt}=P,\quad \frac{dY}{dt}=Q,\quad \frac{dU}{dt}=P^2+Q^2,\quad \frac{dP}{dt}=0,\quad \frac{dQ}{dt}=-Y^{-3},$$

初始条件为

$$X(s,0)=0,\quad Y(s,0)=s,\quad U(s,0)=0,$$

$$P(s,0)=h(s)=s^{-1},\quad Q(s,0)=k(s)=0.$$

因此,

$$P(s,t)=\frac{1}{s}\quad 和\quad X(s,t)=\frac{s}{t}.$$

由 $\frac{dY}{dt}=Q$ 和 $\frac{dQ}{dt}=-Y^{-3}$, 得 $-Y^{-3}dY=QdQ$, 于是 $Y^{-2}=Q^2+s^{-2}$. 则 $\frac{dY}{dt}=Q=\pm\sqrt{Y^{-2}-s^{-2}}$ 或 $\pm Y(1-s^{-2}Y^2)^{\frac{1}{2}}dY=dt$. 对它积分, 并利用 $Y(s,0)=s$, 得

$$\mp s^2\sqrt{1-s^{-2}Y^2}=t\quad 或\quad Y(s,t)=\sqrt{s^2-t^2s^{-2}}.$$

因 $Y(s,t)=\sqrt{s^2-t^2s^{-2}}=\sqrt{s^2-X(s,t)^2}$, 所以光线的轨道是与 x-轴正交的半圆. 由 $\frac{dU}{dt}=P^2+Q^2=Y^{-2}=s^{-1}(1-t^2s^{-4})^{-1}$, 得

$$U(s,t)=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+ts^{-2}}{1-ts^{-2}})=\tanh^{-1}(ts^{-2}).$$

因 $ts^{-2}=\frac{X(s,t)}{\sqrt{X(s,t)^2+Y(s,t)^2}}=\cos\theta$, 利用极坐标 $\theta=\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 得

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+ts^{-2}}{1-ts^{-2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=\ln\cot(\frac{1}{2}\theta)=\tanh^{-1}(\cos\theta).$$

特别, 在时刻 τ 的波前 (即 $u(x,y)=\tau$) 是射线 $\theta=\cos^{-1}\tanh\tau=2\cot^{-1}(e^{\tau})$. 作为一个顺带结果, 注意到对每个固定的 s, 参数化曲线 $X(s,t)=s^{-1}t$, $Y(s,t)=\sqrt{s^2-t^2s^{-2}}$ 是质量为 1 的粒子在时刻 t 的位置, 在该粒子上施与具有势为 $-\frac{1}{2}y^{-2}$ 的作用力 (或加速度)$-\nabla(-\frac{1}{2}y^{-2})=-y^{-3}\mathbf{i}$. 此时粒子的初始位置是 $(0,s)$, 初始速度为 $s^{-1}\mathbf{i}$. 因此, 最初这颗粒子的总能 (动能加势能) 是 $\frac{1}{2}(s^{-1})^2-\frac{1}{2}s^{-2}=0$. 在任意时刻 t, 总能是 $\frac{1}{2}(P^2+Q^2-Y^{-2})$, 容易计算其与 t 无关恒为 0. 这是能量守恒的例子. 注意到在时刻 t 之后, 开始于正 y–轴的粒子系统不在一射线上. 确实, 开始于 $(0,s)$ 的粒子在时刻 $t=s^2$ 以无穷速度击中 x–轴. 在时刻 t, 具有 $s^2>t$ (即 $t^2/x^2>t$ 或 $0<x<\sqrt{t}$) 的粒子在曲线 $y=\sqrt{t^2x^{-2}-x^2}$ 上. 在下面的图 1 中, 标绘出了 $t=-3,-2.5,\cdots,2.5,3$ 的这些曲线. 也标绘出了 $\tau=-3,-2.5,\cdots,2.5,3$ 的波前 (由原点发出的射线). 自然, 各个粒子, 也就是光线, 在半圆上运行. 然而当穿过给定的点时, 光线的速度是对应的粒子穿过这点的速度的倒数. □

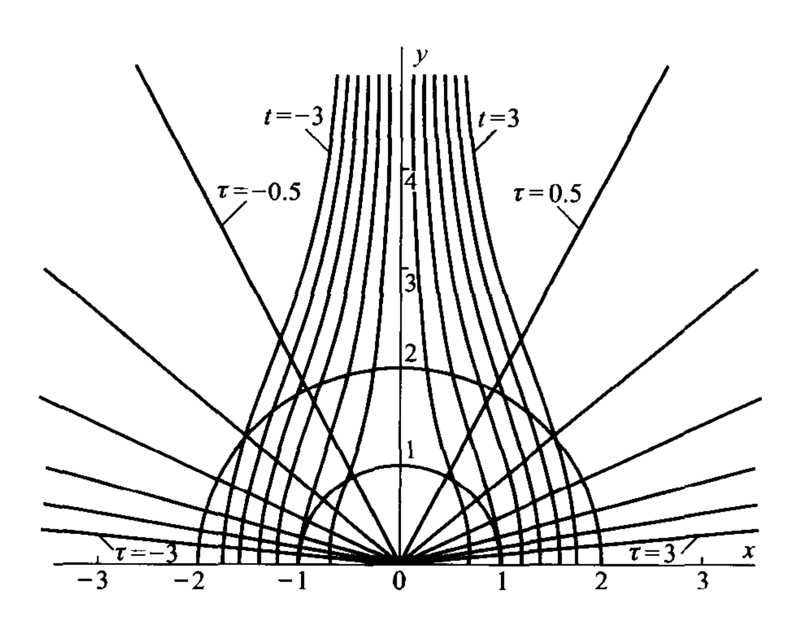


图 1

第三章 热方程

热可经传导、对流和辐射传递. 在传导中，热 (分子运动或振动) 由于邻近的分子相碰撞而局部传递. 由于对流, 热经一即时的流从一个区域带到另一个区域. 还有, 红外电磁波产生热辐射. 这里, 限定讨论热传导. 在一个均匀的固体热传导材料中，时刻 t 在点 (x, y, z) 的温度 $u(x, y, z, t)$ 非常近似地服从热传导方程 $u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$, 其中 k 是衡量该材料传导性能的正常数. 函数 u 也可看作不带流动的液体中化学物品或染料的浓度, 于是热传导方程常称为**扩散方程**. 在这章, 考虑一维的热流 $u_t = ku_{xx}$, 其中 $u = u(x, t)$. 在分类定理中 (参看第 1.2 节), 这个偏微是常系数抛物偏微的一个例子, 它具有一般抛物方程的主要特征. 在第 3.1 节, 用物理定律导出 $u_t = ku_{xx}$, 并解答最简单的初边值问题. 在第 3.2 节中建立了解的唯一性和最大值原理, 还讨论解的变化与初边值变化的关系. 虽然给出了最大值原理的一个详细证明, 但在第一次阅读时可先略去. 第 3.3 节专门讨论与时间无关的边界条件. 在第 3.4 节, 小心地激发和运用 Duhamel 方法来处理非齐次热方程 $(u_t - ku_{xx} = h(x, t))$ 和依赖于时间的边界条件.

§3.1 热方程推导及标准初边值问题的求解

下面, 由物理原理, 即能量守恒以及热从热的区域流向冷的区域的事实来推

导热方程. 必须注意到, 当说到它温度是位置和时间的 C^2 函数时, 讨论的温度概念是在理想意义下的. 一小块物体的温度 (以 Kelvin 标度来度量的绝对温度) 与在这块物体中分子的平均动能成比例. 因此, 温度是统计学概念."某一点的温度" 的概念是一种数学理想化, 它可能通过"当区域变得更小, 分子的容积 (更迅速)减少, 而分子数却在增加时"取极限得到. 热从热的区域流向冷的区域的法则 (即, 本质上是热力学第二定律) 是在统计意义下的, 这是指这个法则可能被违反, 只不过可能性微乎其微; 在上述的数学上理想极限中违反的概率趋于零. 数学理想化的成功显然归于事实: 分子与日常物品, 比方用来测量温度的温度计的尖端相比是非常小. 至少, 我们是在默许数学理想化假设下来进行热方程的推导.

考虑一根由某种导热材料做成的线或杆, 除了在 $x = 0$ 和 $x = L$ 的端点的可能外, 它与外界绝热.

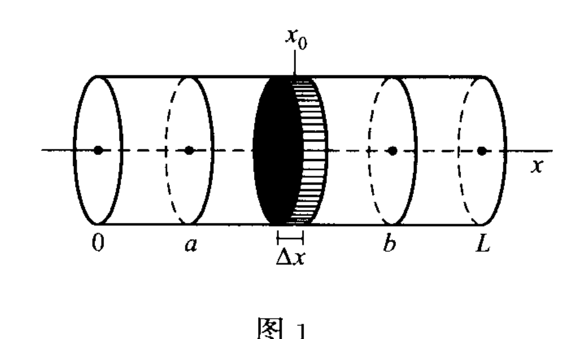


图 1

假设在每个时刻每个截面温度是常数, 记 $u(x,t)$ 是在时刻 t 在截面 x 处的温度. 让计量体系随意, 使得 $u(x,t)$ 可以是 Fahrenheit (华氏) 计量单位、Centigrade (摄氏) 计量单位或 Kelvin 计量单位. 引入下面常量:

> D=杆的密度 (即单位体积质量),
> C=杆的比热容 (即把单位质量升高单位温度所需的能),
> L=杆的长度,
> A=截面的面积.

考虑杆在某点 $x = x_0$ 附近厚度为 $\triangle x$ 的薄片 (参看图 1). 该薄片的质量为 $DA(\triangle x)$. 因此把该薄片的温度从 0 升到 $u(x_0,t)$ 所需的能 $\approx u(x_0,t)CDA(\triangle x)$, 如 $u(x_0,t) < 0$, 则这是负数, 意味着须放出能量来降低温度. 令 $\triangle x \to 0$ 并对 $x = a$ 和 $x = b$ 之间所有薄片的能量求和, 得到在时刻 t 杆从 $x = a$ 到 $x = b$ 这

部分热能的如下表达式:

$$E(t) = \int_a^b CDAu(x,t)dx. \tag{1}$$

实验上发现热能从较热的区域流向较冷的区域, 且热流比率与区域间的距离除温差 (即温度梯度) 成比例. 用定量术语来说, 热能以正方向传过在 $x = a$ 处的截面的比率为

$$-KA(\frac{\partial u}{\partial x})_{x=a} \quad 或 \quad -KAu_x(a,t), \tag{2}$$

其中 $K > 0$ 为某个常数, 称为杆中物质的**热传导率**. 注意到若 $u_x(a,t) < 0$, 则 $x = a$ 左边的温度大于 $x = a$ 右边的温度, 因此 (2) 应该是 (而且是) 正的. 热流比率与温度梯度 $u_x(a,t)$ 成比例.

由于假设杆的外部弯曲曲面是绝热的, 所以热能能进入杆的 $x = a$ 和 $x = b$ 之间部分的唯一途径是在 $x = a$ 和 $x = b$ 处的截面. (假设没有诸如化学反应和辐射的内部热源.) 于是, 在杆这部分热能的净变化率等于热能在端点 $x = a$ 处进入的变化率减去在端点 $x = b$ 处出去的变化率. 利用 (2), 换句话说, 有

$$\begin{aligned} E'(t) &= -KAu_x(a,t) - (-KAu_x(b,t)) \\ &= KAu_x(x,t)|_a^b = \int_a^b KA\frac{\partial}{\partial x}[u_x(x,t)]dx, \end{aligned} \tag{3}$$

其中最后的式子是根据微积分的基本定理,$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. 这里假设 u 是 C^2 的. 另一方面, 也可通过 (1) 在积分号下关于 t 求导 (参看附录 3) 得到 $E'(t)$:

$$E'(t) = \int_a^b CDAu_t(x,t)dx. \tag{4}$$

利用 (3) 和 (4), 得

$$\int_a^b CDAu_t(x,t)dx = E'(t) = \int_a^b KAu_{xx}(x,t)dx.$$

用 CDA 相除并定义 $k = K/CD$(k 称为杆中物质的**热的扩散率**), 得

$$\int_a^b [u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t)]dx = 0. \tag{5}$$

因 $[a,b]$ 是 $[0,L]$ 的任意子区间, 由此得

$$u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0. \tag{6}$$

确实, 若 (6) 在某点 x_0 不成立, 则若选 $[a,b]$ 是在 x_0 附近足够小的区间, 使得 (5) 中的被积函数在 $[a,b]$ 上不为零, 这样 (5) 将不成立.

偏微 $u_t = ku_{xx}$ 是 (一维) **热方程**. 我们已经证明 (在数学理想化的限制条件下) $u(x,t)$满足这个方程.

例 1 (基本源解) 热方程 $u_t = ku_{xx}$ 的一个很重要的解是

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{\frac{-x^2}{4kt}}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{7}$$

在任一固定的时间 $t > 0$, (7) 在 xu–平面上的图像 (参看图 2) 是一铃形的, 概率论中 Guass 分布的正态曲线. 随着 t 的增加, 图像铺展开来且高度减小, 图形和 x–轴之间面积总是保持为 1.

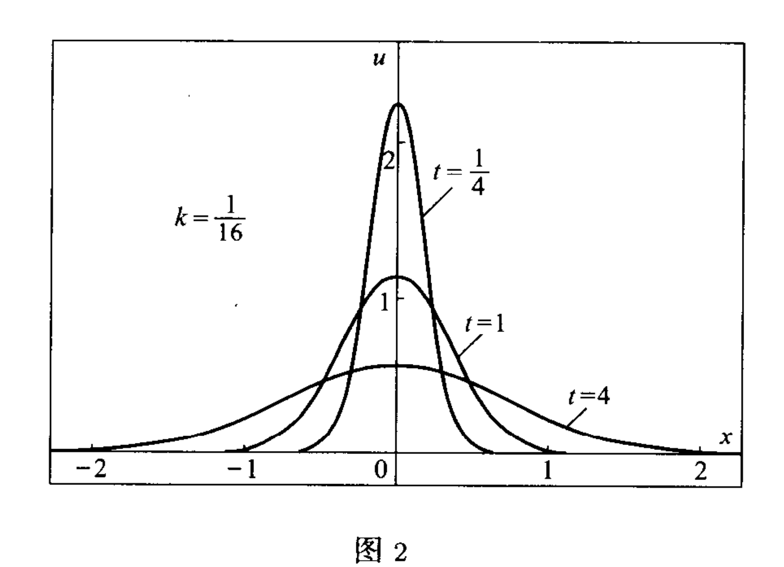


图 2

的确, 利用统计学中的标准结果 (在第 7.1 节的例 6 中也证明了)$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$ $(a > 0)$, 得 $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = 1$, 于是在这无限杆 $(-\infty < x < \infty)$ 的总热能是个常数, 与 t 无关. 随着 $t \to 0$, 注意到温度分布 $u(x,t)$ 的图像, 作为 x 的函数在 $x = 0$ 附近变更陡峭的峰. 确实, 解 (7) 描绘了由于在 $t = 0$ 时集中在 $x = 0$ 处的初始热源导致的温度的演化. 在第七章, 将用 Fourier 变换法来得到这个解

(也可参看习题 2 和 13). 现在, 利用对数求导法来验证 (7) 确实是解. 注意到

$$\ln u = -\frac{1}{2}\ln 4\pi k - \frac{1}{2}\ln t - \frac{x^2}{4kt}.$$

因此, $\frac{u_x}{u} = -\frac{x}{2kt}$ 或 $u_x = -\frac{x}{2kt}u$.

则, $u_{xx} = -\frac{1}{2kt}u - \frac{x}{2kt}u_x = -\left(\frac{1}{2kt} - \left(\frac{x}{2kt}\right)^2\right)u$,

而 $\frac{u_t}{u} = -\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4kt^2} = -k\left(\frac{1}{2kt} - \left(\frac{x}{2kt}\right)^2\right)$. 于是, $u_t = ku_{xx}$. □

注记 (概率考虑) 基于热流的统计学基础, 由于初始集中的热源产生的温度 (7) 具有标准的 Guass 正态 (铃形) 分布不是无法预料的. 的确, 根据集中在 $x = 0$ 的热源的随机扩散, (7) 的一个纯统计学的推导在习题 13 中完成. 想法是: 若在该热源中的粒子允许在一个正规的时间间隔长度 $\triangle t$ 中随机地向左或向右移动 $\triangle x$ 的距离, 则当 $\triangle t \to 0$ 时, 只要 $\frac{1}{2}\triangle x^2 = k\triangle t$, 在时刻 t 的粒子密度将是具有形式 (7) 的正态分布. □

一个初边值问题

物理直觉使我们相信, 若在杆上 $(0 \leqslant x \leqslant L)$ 指定初始温度分布 $u(x,0)$ 且在端点指定温度 $u(0,t)$ 和 $u(L,t)$, 则在任意的 (x,t) $[0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0]$, 温度 $u(x,t)$ 应该能确定. 换句话说, 对 "适当好的" 给定函数 $A(t)$, $B(t)$ 和 $f(x)$, 期望下面的问题有唯一的解:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t) = A(t), \quad u(L,t) = B(t); \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x). \end{aligned} \tag{8}$$

这里, D.E. 表示 "微分方程", B.C. 表示 "边界条件"(即, 在端点 $x = 0$ 和 $x = L$ 的条件), 以及 I.C. 表示 "初始条件" (即, 在 $t = 0$ 的温度分布). 在第 3.2 节, 证明 "初边值问题"(8) 最多只有一个解. 以几何术语来说, 我们寻求定义在 xt–平面半无限带 $(0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0)$ 上的 C^2 函数 $u(x,t)$, 使得在带上满足该 D.E., 且在带的边界具有指定的值, 如图 3 所示. 可以把 $u(x,t)$ 的图像想象为这条带上的曲面, u- 轴指离书页. 则在任意时刻 t_0 的温度分布可通过在 xtu- 空间中取平面 $t = t_0$ 与 u 的图像的垂直切片获得.

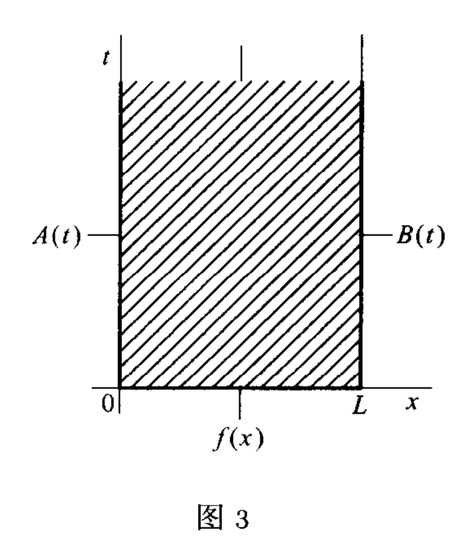


图 3

分离变量

以找出 D.E. $u_t = ku_{xx}$ 的所有乘积解 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 来开始求解过程, 其中 X 是 x 的函数, 而 T 是 t 的函数. 为此, 我们利用了在第 1.3 节引入的 "分离变量" 法. 随后考虑 B.C. 和 I.C.. 现把 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入 $u_t = ku_{xx}$ 并分离变量, 得

$$u_t = ku_{xx} \quad \Rightarrow \quad X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c,$$

c 为某个常数, 因为一个 t 的函数和一个 x 的函数只有当这两个函数都为常数时才能相等 (参看第 1.3 节的例 10.). 则得两个常微

$$T'(t) - kcT(t) = 0, \tag{9}$$

$$X''(x) - cX(x) = 0. \tag{10}$$

有三种情形: $c < 0$, $c > 0$, $c = 0$. 当 $c < 0$ 时设 $c = -\lambda^2$ 以及当 $c > 0$ 时设 $c = \lambda^2$ 是方便的, 这里 $\lambda > 0$ 是某个常数.(假设 $\lambda < 0$, 或简单地 $\lambda \neq 0$ 也是可以的, 但为了以后方便我们取 $\lambda > 0$.) 乘积解 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 可通过解这三种情形的熟悉的常系数常微 (9) 和 (10) 得到 (参看第 1.1 节). 最后的结果

是

情形 1 $(c=-\lambda^2<0)$:

$$u(x,t)=e^{-\lambda^2kt}(c_1\sin(\lambda x)+c_2\cos(\lambda x)). \tag{11}$$

情形 2 $(c=\lambda^2>0)$:

$$u(x,t)=e^{\lambda^2kt}(c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}). \tag{12}$$

情形 3 $(c=0)$:

$$u(x,t)=c_1x+c_2. \tag{13}$$

注记 $u_t=ku_{xx}$ 的每个乘积解是形式 (11),(12) 和 (13) 之一. 然而, 不是 $u_t=ku_{xx}$ 的每个解都是乘积解. 的确, 例 1 中的解 (7) 就不是乘积解. 另外, 由叠加原理, 可通过用各种数 λ, c_1 和 c_2 组成上述乘积解的线性组合来得到齐次线性偏微 $u_t=ku_{xx}$ 的其他解, 但这样的解不总是乘积解. 例如, $e^{-kt}\sin x+e^{-4kt}\sin(2x)$ 是解, 但它不能表示为一个 x 的函数乘一个 t 的函数. 再者, 不是 $u_t=ku_{xx}$ 的每个解都是乘积解的线性组合. 的确, 任一 (11),(12) 和 (13) 这些解的线性组合在 $t=0$ 有定义, 而解 (7) 却不是. 因此, 解 (7) 不可能是乘积解的一个线性组合. 然而, 就如我们将要看到的, 对于在有限杆上大多数的初边值问题, 解 (如果存在的话) 可以表示为乘积解的线性组合 (可能是无穷的). □

求解最简单的初边值问题

热方程最简单的初边值问题是下面标准的问题, 其中要求 $u(x,t)$ 在一个包含带 $0\leqslant x\leqslant L$, $t\geqslant 0$ 的 "开" 区域上具有 C^2 延拓 (参看本节结束的注记):

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).\end{aligned} \tag{14}$$

这里, 杆的两端保持在 0 度 (比方, 如果计量单位是摄氏度, 可把两端浸泡在冰水里). 通过更换温标, 可使任一温度 (绝对零度以上) 等于某个新标量的零度.

现在的任务是求出该 D.E. 的所有乘积解, 且还满足 B.C.. 随后, 来面对 I.C.. 没有满足 B.C. 的情形 3 的非零乘积解 ($u(x,t) = c_1x + c_2$, 参看 (13)). 的确, $0 = u(0,t) = c_1 \cdot 0 + c_2$ 意味着 $c_2 = 0$, 又 $0 = u(L,t) = c_1L + c_2 = c_1L$ 表明 $c_1 = 0$. (在任意时间, 情形 3 乘积解的图像是 xu–平面中的直线, 而穿过 (0,0) 和 $(L,0)$ 的唯一的直线是 x–轴.) 也没有形式 (12)(情形 2) 的非零乘积解. 确实, 利用 (12),

$$0 = u(0,t) = e^{\lambda^2 kt}(c_1e^0 + c_2e^0) = e^{\lambda^2 kt}(c_1 + c_2) \Rightarrow c_2 = -c_1$$

和

$$0 = u(L,t) = e^{\lambda^2 kt}(c_1e^{\lambda L} - c_1e^{-\lambda L}) = e^{\lambda^2 kt}c_1e^{-\lambda L}(e^{2\lambda L} - 1).$$

因此, $c_1 = 0$, 因 $e^{2\lambda L} - 1 > 0$, 从而 $c_2 = -c_1 = 0$. 于是, 获得满足 B.C. 的非零的乘积解的唯一希望寄托在情形 1 的解 (11) 上. 我们有

$$0 = u(0,t) = e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0) = e^{-\lambda^2 kt}c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

和

$$0 = u(L,t) = e^{-\lambda^2 kt}c_1 \sin(\lambda L). \tag{15}$$

取 $c_2 = 0$ 是迫不得已, 但希望避免在 (15) 中取 $c_1 = 0$, 不然将只是得到又一个 0 解. 为了避免这种情况, 注意到 c_1 可以不为零, 但只有当 λ 取的满足 $\sin \lambda L = 0$ 时. 因 $\sin z = 0$ 当且仅当 z 是 π 的一个整数倍, 则对 (正)λ 的选取是 $\lambda L = n\pi$ 或 $\lambda = n\pi/L$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. 于是, (14) 的 D.E. 满足 B.C. 唯一的乘积解是下面无穷多个乘积解族中的成员的常数倍

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi/L)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{16}$$

由于 D.E. 是线性和齐次的, 所以可应用叠加原理得到任意有限项, 比如 N 项的线性组合

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-(n\pi/L)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{17}$$

是 D.E. 的一个解, 其中 $b_1, b_2, \cdots$ 是任意常数. 还注意到 (17) 满足 B.C. $u(0,t)=0$ 和 $u(L,t)=0$. 的确, 因这些条件是齐次和线性的, 所以叠加原理可用于这种 B.C..(更容易地, 可直接验证 B.C..)

现来考虑 (14) 的 I.C.. 如在 (17) 中令 $t=0$, 得

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{18}$$

如碰巧 (14) 中 I.C. 的 $f(x)$ 是具有 (18) 右端的形式, 则由 (17) 给出的 $u(x,t)$ 将是问题 (14) 的解. 换句话说, 我们有

命题 1 设 $b_1,\cdots,b_n$ 是给定的常数. 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = k u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

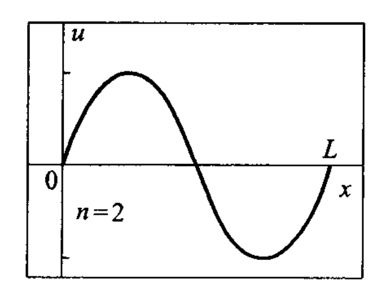
的解由下面给出

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N} b_n e^{-(n\pi/L)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{20}$$

注意到当 $t\to\infty$ 时, 所有的指数 $-(n\pi/L)^2kt$ 趋于 $-\infty$, 从而当 $t\to\infty$ 时所有的项都趋于零. 因此, 当 $t\to\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$, 杆的温度分布最终趋于零, 这是加在两端的温度. 各项趋于零的速度是不同的, 因为指数的大小与 n 有关. 具有大的 n 的项衰减得更迅速. 这在物理上是合理的, 因为热流比率与温度梯度成比例, 并且具分布 $\sin(\frac{n\pi x}{L})$ 的热区域和冷区域之间的温度梯度与 n 成比例 (即, $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 的梯度是 $n\cdot(\pi/L)\cos\frac{n\pi x}{L}$). 这由图 4 来说明.

例 2 求下面问题的解

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = 2u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0 \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0 \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0)=5\sin(2x)-30\sin(3x). \end{aligned} \tag{21}$$



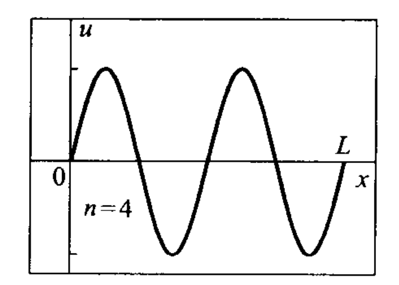


图 4

解 由于已知命题 1, 所以可立刻写出一个解. 确实, 这时 $L = \pi$, $k = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 5$, $b_3 = -30$ 以及 $N = 3$. 把这些数代入 (20), 得

$$u(x,t) = 5e^{-8t}\sin(2x) - 30e^{-18t}\sin(3x). \tag{22}$$

第二项的振幅与第一项的振幅之比是 $30e^{-18t}/(5e^{-8t}) = 6e^{-10t}$. 因此, 虽然在 $t = 0$ 时第二项 "支配" 了第一项, 但最终第二项与第一项相比是很小的 (例如, 考虑 $t = 10$). 注意到, 在 (22) 或更一般地在 (20) 中, $u(x,t)$ 是简单地通过从 $f(x)$ 插入适当的 t 的指数衰减函数得到的. 指数中的乘 $-kt$ 的常数总是在正弦元素中 x 的系数的平方, 即 $(n\pi/L)^2$. 因此不必去计算每项的 n 的值. □

注记 利用命题 1, 这个例子是容易解答的, 但假设你在进行一场闭卷考试且记不起命题 1 了, 通过完成下面步骤你应该仍能解答出这个问题. 这些步骤适合于具有齐次和线性的 D.E. 和 B.C. 的多种问题:

1. 用分离变量确定 D.E. 的乘积解.
2. 求出那些满足 B.C. 的乘积解.
3. 构成步骤 2 中的乘积解的一个线性组合, 使得满足 I.C. .

大多数教师会要求你证明你能详细地完成这些过程.

例 3 (一绝热环形金属丝内的热流) 求解下面问题, 杆长是 $2L$, 从 $x = L$ 到 $x = -L$.

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad -L \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0 \\ &\text{B.C.} \quad u(-L,t) = u(L,t), \quad u_x(-L,t) = u_x(L,t) \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = \left(\cos\tfrac{\pi x}{L}\right)^3. \end{aligned} \tag{23}$$

解 注意到 B.C. 要求在端点 $x = \pm L$ 温度相等以及温度的梯度也相等. 这正好当杆被弯成环形并把端点相连时会发生的情况. 因此该问题可看作一绝热环形金属丝内的热流问题. 为了解这个问题, 注意到, 由分离变量, D.E 的乘积解, 像前面一样, 可求得具有 (11),(12) 或 (13) 形式. 须确定哪个乘积解满足 B.C.. 在情形 1(参看 (11)), 由第一个 B.C., 得

$$e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \sin\ (-\lambda L) + c_2 \cos(-\lambda L)) = e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \sin(\lambda L) + c_2 \cos(\lambda L))$$
$$\Rightarrow 2e^{-\lambda^2 kt} c_1 \sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow c_1 \sin(\lambda L) = 0.$$

关于第二个 B.C., 先注意到

$$u_x(x,t) = e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \lambda \cos(\lambda x) - c_2 \sin(\lambda x)).$$

则由第二个 B.C., 得

$$e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \lambda \cos\ (-\lambda L) - c_2 \lambda \sin(-\lambda L)) = e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \lambda \cos(\lambda L) - c_2 \lambda \cos(\lambda L))$$
$$\Rightarrow 2e^{-\lambda^2 kt} c_2 \sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\lambda L) = 0.$$

因此, 得取 c_1 和 c_2 为零, 除非取 λ 使得 $\sin(\lambda L) = 0$, 即 $\lambda = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 于是, 在情形 1, 得到下列乘积解族 (已分别用 b_n 和 a_n 来替换 c_1 和 c_2 了, 因为这些常数与 n 有关):

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi/L)^2 kt}[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}], \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{24}$$

在习题 5, 要求读者证明情形 2(参看 (12)) 满足 B.C. 的唯一乘积解是零解. 在情形 3(参看 (13)), 其中 $u(x,t) = c_1 x + c_2$, 我们有

$$\begin{cases} u(-L,t) = u(L,t) \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -c_1 L + c_2 = c_1 L + c_2 \\ c_1 = c_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\ 任意 \end{cases}.$$

因此, 在情形 3, $u(x,t) = c_2$ 是唯一 "幸存的" 乘积解. 在解族 (24) 中令 $n = 0$ 能包括这些常数乘积解; 注意 $u_0(x,t) = e^0[a_0 \cos 0 + b_0 \sin 0] = a_0$. 根据关于线性和齐次 D.E. 和 B.C. 的叠加原理, 得到满足 D.E. 和 B.C. 的一个相当一般的解 (不是通解), 即

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} e^{-(n\pi/L)^2 kt}\left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right]. \tag{25}$$

至于 I.C., 注意到当 $t=0$ 时,(25) 成为

$$u(x,0)=a_0+\sum_{n=1}^{N}[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}]. \tag{26}$$

为了求出 (23) 的解, 必须证明 $[\cos\frac{\pi x}{L}]^3$ 能表示成 (26) 的形式. 这可利用下面的三角公式达到

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta&=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\\ \cos\alpha\sin\beta&=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],\\ \sin\alpha\sin\beta&=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].\end{aligned} \tag{27}$$

由这些公式, 得 $[\cos\alpha]^3=\cos\alpha[\cos\alpha\cos\alpha]=\cos\alpha\frac{1}{2}[\cos(2\alpha)+\cos 0]=\frac{1}{2}[\cos\alpha\cos(2\alpha)]+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{1}{4}[\cos(3\alpha)+\cos(-\alpha)]+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{1}{4}\cos(3\alpha)+\frac{3}{4}\cos\alpha$. 因此,

$$\left(\cos\frac{\pi x}{L}\right)^3=\frac{3}{4}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{4}\cos\frac{3\pi x}{L},$$

对照 (26), 有 $a_0=0$, $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{4}$, $b_1=b_2=b_3=0$ 以及 $N=3$. 由 (25), 则得问题 (23) 的一个解, 即

$$u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-(\pi/L)^2kt}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{4}e^{-(3\pi/L)^2kt}\cos\frac{3\pi x}{L}.$$ □

例 3 里包含了下面结果的证明, 该结果在一个环形金属丝内的热传导情形时是命题 1 的相对应的命题.

命题 2 设 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ 和 $b_1, \cdots, b_N$ 为给定常数. 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -L\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant 0\\ &\text{B.C.}\quad u(-L,t)=u(L,t),\quad u_x(-L,t)=u_x(L,t)\\ &\text{I.C.}\quad u(x,0)=a_0+\sum_{n=1}^{N}[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}]\end{aligned} \tag{28}$$

的解由下面给出

$$u(x,0)=a_0+\sum_{n=1}^{N}e^{-(n\pi/L)^2kt}[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}]. \tag{29}$$

注意到当 $t \to \infty$ 时 (29) 趋于常数 a_0. 这个常数是这环形金属丝内的平均温度. 的确, 积分 (29) 的两边, 得

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x,t)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} a_0 dx = a_0,$$

因为所有其他的项积分为零, 即

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}|_{-L}^{L} = 0.$$

这个平均温度与 t 无关, 这符合物理意义, 因为没有热从一根绝热圆形金属丝中逸出 (即, 热从 $x = L$ 处穿出, 重新又在 $x = -L$ 处进入). 当 $t \to \infty$ 时温度分布趋于它的常数均值物理上也是合理的.

注记 从到目前为止我们的处理方法中产生了一些重要的问题. 最主要的是如果初始温度分布 $u(x,0) = f(x)$ 不具有在命题 1 或命题 2 中的形式时该怎么来做. 的确, 不是每个连续函数具有这种形式, 因为正弦和余弦函数的一个线性组合是 C^∞ 的 (即, 无穷次可微), 而连续函数可以有尖点, 在其上导数不存在. 然而, 确实证明了 (Rudin(1976), p. 190) 任一定义在闭区间 $[-L, L]$ 上的连续函数 $f(x)$ 且有 $f(-L) = f(L)$, 能以任一精度地被下面形式的函数来逼近

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N}[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}], \tag{30}$$

这种逼近的意义是: 通过取 N 足够大且取适当的常数 a_n 和 b_n, 使得 (30) 在 $[-L, L]$ 上的图像能任意地接近 $f(x)$ 的图像. 确实, 对于 "适当好的" 函数 $f(x)$, 将给出 a_n 和 b_n 的表示公式, 并给出得到所需要的精度的数 N 大小的估计. 这在第四章利用 Fourier 级数 (参看第 4.1 节的定理 2) 来完成. 在应用中, 初始温度分布 $f(x)$ 只是在某个实验误差之内是可知的. 因此, 通过用形如 (30) 的和以这种误差来逼近 $f(x)$, 用 (30) 来代替 $f(x)$ 就不会引起显著的误差, 然后命题 2 给出令人满意的解, 几乎就像任何人都会认为的那样. 在第 3.2 节, 将证明由命题 1 和命题 2 给出的解是唯一的, 正如物理直觉所揭示的. 而且, 还证明了用形如 (30) 的和在一个实验误差之内来逼近初始温度, 则解的误差不会超过这个实验误差.

我们还要提及在本章经常发现这样的要求: $u(x,t)$ 是在一个闭带 (包括边界) 上的解意味着 $u(x,t)$ 在一个更大的开带上 (参看第 1.2 节开始后面的一些定义) 具有 C^2 延拓. 这个要求使得在第 3.2 节中的一些证明变得容易 (例如, 第

3.2 节的定理 1). 在第七章 (参看第 7.4 和 7.5 节) 我们放宽了这个要求, 只强调在指定开区域热方程的 C^2 解在满足初边值条件的方式下连续延拓到边界 (但不必延拓到外面).

概要 3.1

1. 热方程: 在热传导介质中, 没有电流和辐射, 关于温度 $u(x,t)$ 的一维热方程是偏微 $u_t = ku_{xx}$. 正常数 k 是热的扩散率, 它度量介质的热的传导性. 这个偏微由两个物理原理导出, 即能量守恒以及热能流比率与温度的梯度成比例.

2. 基本源解: 热方程 $u_t = ku_{xx}$ 的基本源解 $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{\frac{-x^2}{4kt}}$ ($t>0$, x 任意) 反映了由初始集中在 $x=0$ 的热源的热能的扩散. 它不是乘积解的和 (参看下面的 4). 对给定的时刻 t, u 在 xu–平面上的图像是一正态概率曲线, 它随着 t 的增加伸展开去, 但 $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = 1$ 与 t 无关.

3. 初边值问题: 令 $A(t)$, $B(t)$ 和 $f(x)$ 是 "得体的" 函数. 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0;\\ &\text{B.C.}\quad u(0,t)=A(t),\quad u(L,t)=B(t);\\ &\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)\end{aligned}\qquad (*)$$

是初边值问题的一个例子. 物理直觉表明这个 D.E. 有唯一的满足 B.C.(边值条件) 和 I.C.(初始条件) 的解. 唯一性的证明在第 3.2 节给出.

4. 乘积解: 用分离变量法来确定 (*) 中的 D.E. 所有的乘积解 $u(x,t) = X(x)T(t)$. $u_t = ku_{xx}$ 的每个乘积解具有下列形式之一, 其中 c 是 "分离常数", $\lambda > 0$,

情形 1 $(c = -\lambda^2 < 0)$: $\quad u(x,t) = e^{-\lambda^2 kt}(c_1\sin(\lambda x) + c_2\cos(\lambda x))$.

情形 2 $(c = \lambda^2 > 0)$: $\quad u(x,t) = e^{\lambda^2 kt}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$.

情形 3 $(c = 0)$: $\quad u(x,t) = c_1 x + c_2$.

5. 某些初边值问题的解: 下面的命题 1(适用于两端保持为 0 度的杆) 和命题 2(适用于环形金属丝) 是由通过求 D.E. 的那些分别满足齐次线性 B.C 的乘

积解 (参看上面的 4), 然后利用叠加原理来满足 I.C. 得到的. 这个过程可用来求解多种具齐次线性 B.C. 的初边值问题.

命题 1 令 $b_1, \cdots, b_N$ 是给定常数. 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\end{aligned}$$

的解由下面给出

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-(n\pi/L)^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

命题 2 令 a_0, $a_1, \cdots, a_N$ 和 $b_1, \cdots, b_N$ 是给定常数. 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx}, \quad -L \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(-L,t) = u(L,t), \quad u_x(-L,t) = u_x(L,t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}]\end{aligned}$$

的解由下面给出

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} e^{-(n\pi/L)^2 kt} [a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}].$$

练习 3.1

1. 设 $u(x,t)$ 是 $u_t = ku_{xx}$ 的解. 证明下面事实成立:

(a) 对于常数 a, x_0 和 t_0, 函数 $v(x,t) = u(ax - x_0, a^2t - t_0)$ 满足 $v_t = kv_{xx}$.

(b) 对任意常数 k', 函数 $v(x,t) = u(x, (\frac{k'}{k})t)$ 满足 $v_t = k'v_{xx}$.

(c) 函数 $v(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{-x^2}{4kt}) \cdot u(\frac{x}{t}, -\frac{1}{t})$ 满足 $v_t = kv_{xx}$.

2. 不用命题 1 求解例 2 中的问题. 即, 求满足 D.E. 和 B.C. 的乘积解, 然后运用叠加原理来满足 I.C..

3. 利用命题 1 求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = 2u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3, \quad t \geqslant 0\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 为下面情形:

(a) $f(x)=4\sin\dfrac{2\pi x}{3}-\sin\dfrac{5\pi x}{3}$ (b) $f(x)=5\sin(4\pi x)+2\sin(10\pi x)$

(c) $f(x)=\sin^3\dfrac{\pi x}{3}$ (d) $f(x)=-9\cos\left(\dfrac{\pi}{6}(2x+3)\right)$

(e) $f(x)=3\cos\left(\dfrac{8\pi x}{3}-\dfrac{1}{2}\pi\right)-3\cos\left(\dfrac{8\pi x}{3}+\dfrac{1}{2}\pi\right)+\sin(5\pi x)$.

4. (**基本源解的推导**). 令 $u(x,t)=Db(t)f(b(t)^2x^2)$, 其中 D 为某个正常数, b 和 f 为正函数, 且有 $\int_{-\infty}^{\infty}Df(x^2)dx=1$.

(a) 证明对所有的 t, $\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx=1$, 于是 $b(t)$ 被确定.

(b) 假设 $u_t=ku_{xx}$ 以及当 $t\to0^+$ 时 $b(t)\to\infty$, 证明

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{\frac{-x^2}{4kt}}.$$

提示 把 $u(x,t)$ 的表示式 $b(t)f(b(t)^2x^2)$ 代入 $u_t=ku_{xx}$ 并取 $x=0$ 得到一个关于 $b(t)$ 的常微, 由此得 $b(t)=(4k\alpha t)^{-\frac{1}{2}}$, 其中 $\alpha=-f'(0)/f(0)>0$. 证明如 $y=b(t)^2x^2$, 则 $f'(y)+\alpha f(y)=-2y(f''(y)+\alpha f'(y))$. 因此, 对于 $g(y)=f'(y)+\alpha f(y)$, 有 $g(y)=-2yg'(y)$. 解出 $g(y)$, 然后得出 $f(y)=Ce^{-\alpha y}$.

5. 证明满足环形金属丝 B.C.(23) 的唯一的情形 2 乘积解 $u(x,t)=e^{\lambda^2kt}(c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x})$ 是零解.

6. 求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\quad t\geqslant0\\&\text{B.C.}\quad u(-\pi,t)=u(\pi,t),\quad u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t)\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 为下面情形:

(a) $f(x)=5\cos x+3\sin(8x)$ (b) $f(x)=\frac{1}{2}+\cos(2x)-6\sin(2x)$

(c) $f(x)=4+\cos^2(3x)$ (d) $f(x)=6\sin x-7\cos(3x)-7\sin(3x)$

(e) $f(x)=(\sin x+2\cos x)^2$.

7. (a) 证明对 $u_t=ku_{xx}$ 的任一形如 $u(x,t)=e^{rx+st}$ 的特解, 必有 $s=kr^2$, 其中 r 和 s 是常数.

(b) 设 $u(x,t)=u_1(x,t)+iu_2(x,t)$ 是 $u_t=ku_{xx}$ 的复解. 则证明实部和虚部 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 也都是解. (注意到由定义 $u_t=(u_1)_t+i(u_2)_t$, 以及若 a, b, c 和 d 都是实数, 则 $a+ib=c+id$ 当且仅当 $a=c$ 和 $b=d$.)

(c) 注意到 (a) 中的 r 可以是复数, 利用 (b) 和 $e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)$ 证明由下面 r 的值得到所标示的解 (其中 λ 是常数).

(i) $r=\pm i\lambda$: $e^{-k\lambda^2 t}\cos(\lambda x),\ \pm e^{-k\lambda^2 t}\sin(\lambda x)$.

(ii) $r=\pm\lambda$: $e^{\pm\lambda x}e^{k\lambda^2 t}$.

(iii) $r=\lambda(1\pm i)$: $e^{\lambda x}\cos(\lambda x+2k\lambda^2 t),\ \pm e^{\lambda x}\sin(\lambda x+2k\lambda^2 t)$.

8. (a) 考虑问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad x\geqslant 0,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=\cos(\omega t).\end{aligned}\qquad(*)$$

这是一个半无限杆 ($x\geqslant 0$) 的热传导问题, 它的端点 (在 $x=0$ 处) 服从周期温度变化 $u(0,t)=\cos(\omega t)$. 利用习题 7(c)(iii) 求出该问题具有以下两个附加性质的解:

(P1) 当 $x\to\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$,

(P2) $u(x,t+\frac{2\pi}{\omega})=u(x,t)$ (即, $u(x,t)$ 关于时间是周期的).

(b) 证明若 (P1) 或 (P2) 略去的话,(*) 的解是不唯一的.

(c) 假设 $\omega=\frac{\pi}{2}$ 和 $k=\frac{\pi}{4}$, 粗略地绘出当 $t=0,1,2,3,4$ 时温度分布在 xu–平面上的图像, 注意 $u(x,t)=0$ 的地方.

(d) 证明在任一固定时间 t, $u(x,t)$ 的相继两个局部极大之间的距离, 比如 x_1 和 x_2, 是 $2\pi\sqrt{\frac{2k}{\omega}}$, 并证明不论 k 和 ω 是什么正数, 比 $u(x_2,t)/u(x_1,t)$ 是 $e^{-2\pi}\approx .00187$.

9. (a) 假设杆的周围绝热有故障, 在每一小薄片上热以与该薄片内温度成比例的比率通过绝热层溢出. 证明温度 $u(x,t)$ 则服从方程 $u_t=ku_{xx}-hu$, 其中 $h>0$ 为某个常数.

(b) 证明若 $w(x,t)$ 满足 $w_t=kw_{xx}$, 则 $u(x,t)=e^{-ht}w(x,t)$ 满足 $u_t=ku_{xx}-hu$.

(c) 求下面问题的解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx}-hu,\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant 0\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{N}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}.\end{aligned}$$

10. 在热方程的推导中, 证明若 K, D 和 C 是 x 的得体的函数, 则得到偏微 $C(x)D(x)u_t=\frac{\partial}{\partial x}(K(x)u_x)$.

11. (a) 假设在一个实体球内的温度只依赖于实体到中心的距离 r(即,$u=u(r,t)$). 通过利用半径为 r 的球面的表面积等于 $4\pi r^2$ 这个事实, 证明 $u_t=kr^{-2}(r^2u_r)_r=k(u_{rr}+2r^{-1}u_r)$.

提示 利用 $E(t)=\int_a^b CDu(r,t)4\pi r^2dr$ 和 $E'(t)=K(4\pi b^2u_r(b,t)-4\pi a^2u_r(a,t))$.

(b) 由令 $v(r,t)=r\cdot u(r,t)$, 推得对于 $r>0$, $u_t=kr^{-2}(r^2u_r)_r$ 等价于 $v_t=kv_{rr}$. 于是, $v_t=kv_{xx}$ 的任一解产生至少对 $r>0$ 有效的该球内的径向对称的热流 $u(x,t)=v(x,t)/r$.(关于球面上的热流的进一步信息可参看第 8.3 节.)

12. 设 u_0 和 u_1 是常数, 定义 (对 $t>0$)

$$u(x,t)=u_1+(u_0-u_1)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}x/\sqrt{kt}}e^{-y^2}dy. \qquad (*)$$

(a) 利用下面微积分的结果来验证 $u_t=ku_{xx}$ $(t>0)$

$$\frac{d}{dz}\left(\int_0^{f(z)}g(y)dy\right)=g(f(z))\frac{df}{dz}.$$

(b) 利用结果 $\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, 证明对任意的 $x>0$, $\lim_{t\to 0^+}u(x,t)=u_0$, 然而 $u(0,t)=u_1$. 这意味着 (*) 是半无限杆 $(0\leqslant x<\infty)$ 的温度分布, 这时在端点 $x=0$ 赋有温度 u_1, 初始温度是常数 u_0. 换言之, $u(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x<\infty,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=u_1,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=u_0,\quad x>0,\end{aligned}$$

其中 $u(x,0^+)=\lim_{t\to 0^+}u(x,t)$, $x>0$. 注意到该解不能连续地延拓到 $(0,0)$, 除非 $u_0=u_1$. (这个解可用来估计在地面一个急剧的温度变化 $u_0\to u_1$ 之后地球在地面下深度为 x 处的温度.)

13. 假设一从原点出发的粒子, 在时间间隔 $\triangle t$ 内它有相同的机会向左或右移动 $\triangle x$ 距离.

(a) 令 $n>0$ 是一个整数, 设 m 是整数, 使得 $-n\leqslant m\leqslant n$ 以及 $n-m$ 是偶数. 通过计算粒子在 n 个时间间隔 $\triangle t$ 内能移动一段净长度为 $m\triangle x$ 的方式的数量来证明在时间 $t=n\triangle t$, 粒子在 $x=m\triangle x$ 的概率为

$$\frac{n!(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{2}(n+m))!(\frac{1}{2}(n-m))!}. \qquad (*)$$

(b) 对大的 n, 利用 Stirling 公式 $n!\approx\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$, 推导 (*) 近似地等于

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^n}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(n+m)}(\frac{1}{2}(n+m))^{\frac{1}{2}(n+m+1)}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(n-m)}(\frac{1}{2}(n-m))^{\frac{1}{2}(n-m+1)}}\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}(\frac{n}{n+m})^{\frac{1}{2}(n+m+1)}(\frac{n}{n-m})^{\frac{1}{2}(n-m+1)}\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}(1+\frac{m}{n})^{-\frac{1}{2}(n+m+1)}(1-\frac{m}{n})^{-\frac{1}{2}(n-m+1)}\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}(1-(\frac{m}{n})^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}(1+\frac{m}{n})^{-\frac{1}{2}m}(1-\frac{m}{n})^{\frac{1}{2}m}\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}(1-(\frac{x}{t})^2(\frac{\triangle t}{\triangle x})^2)^{-\frac{1}{2}t/\triangle t-\frac{1}{2}}(1+(\frac{x}{t})(\frac{\triangle t}{\triangle x}))^{-\frac{1}{2}x/\triangle x}\end{aligned}$$

$$\cdot\left(1-\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{\triangle t}{\triangle x}\right)\right)^{\frac{1}{2}x/\triangle x}(\triangle t)^{\frac{1}{2}}. \tag{**}$$

(c) 注意到若 $\triangle t$ 与 $(\triangle x)^2$ 成比例, 比如 $(\triangle x)^2 = 2k\triangle t$, 我们得到 $\triangle x$ 阶数的确切密度. 则通过 (**) 用 $2\triangle x$ 除, 然后令 $\triangle t \to 0$, 证明得到基本源解 $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{\frac{-x^2}{4kt}}$.

提示 回忆一下 $\lim\limits_{z\to\infty}(1+\alpha z)^{1/z} = e^{\alpha}$. 注意到用 $2\triangle x$ 除 (代替用 $\triangle x$ 除), 因为在可能的值 $x = m\triangle x$ 之间的间距是 $2\triangle x$, 因 $n-m$ 必为偶数.

§3.2 唯一性和最大值原理

在前节的命题 1 和命题 2 中, 我们求得杆的两端保持 0 度以及环形金属丝的标准初边值问题的解. 本节证明这些求得的解事实上是唯一的解. 没有这个唯一性, 理论就失去它的预言作用. 为建立唯一性我们研究两种方法. 第一种方法 (参看定理 1 的证明) 比第二种方法更直接, 第二种方法是基于最大值原理. 然而第二种方法提供更好的结果, 如对初值条件作微小的改变, 则任一解将只稍微变化一点. 这就允许人们用易处理的函数去逼近初值条件, 不会对解产生显著的偏差. 因实际上无法确切知道初值条件, 所以这个 "稳定性" 在应用中是绝对重要的.

定理 1(唯一性定理) 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是下面问题的 C^2 解,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=a(t),\quad u(L,t)=b(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $a(t)$, $b(t)$ 和 $f(x)$ 是给定的 C^2 函数. 则对所有的 $0\leqslant x\leqslant L$ 和 $t\geqslant 0$, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$.

证明 令 $v(x,t) = u_1(x,t)-u_2(x,t)$. 需要证明 $v(x,t)\equiv 0$. 注意到 $v(0,t) = u_1(0,t)-u_2(0,t) = a(t)-a(t) = 0$, $v(L,t) = b(t)-b(t) = 0$, 而 $v(x,0) = u_1(x,0)-u_2(x,0) = f(x)-f(x) = 0$. 因 D.E. 是线性和齐次的, 所以据叠加原理, $v = u_1 - u_2$ 满足该 D.E.. 因此 $v(x,t)$ 是下面问题的一个 C^2 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad v_t = kv_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad v(0,t)=0,\quad v(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad v(x,0)=0.\end{aligned}\tag{2}$$

我们知道 $v(x,t)\equiv 0$ 是 (2) 的一个解, 但必须证明这是唯一的一个解. 我们已把 (1) 的唯一性证明化为更简单的问题 (2) 的唯一性的证明. 令 $v(x,t)$ 是 (2) 的解, 定义

$$F(t)=\int_0^L [v(x,t)]^2dx, \quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

因 $F(t)$ 是一个非负的 (平方) 函数的积分, 所以有 $F(t)\geqslant 0$. 若 $F(t)=0$, 则 $v(x,t)$ 必对所有的 x, $0\leqslant x\leqslant L$ 都等于零.(一个连续非负函数的积分是正的, 除非该函数恒为零.) 因此, 如能证明对所有的 $t\geqslant 0$, $F(t)=0$, 则 $v(x,t)\equiv 0$, 这样就完成了证明. 注意到由 (2) 的 I.C., 得

$$F(0)=\int_0^L [v(x,0)]^2dx=0. \tag{4}$$

已知 $F(t)\geqslant 0$. 因此, 须证明 $F(t)$ 是不增的 (即, $F'(t)\leqslant 0$), 从而得出 $F(t)\equiv 0$. 为证 $F'(t)\leqslant 0$, 先对 (3) 积分号下求导.(附录 3 的 Leibniz 法则允许我们这么做, 因 $v(x,t)$ 是 C^2.)

$$\begin{aligned}F'(t)&=\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}([v(x,t)]^2)dx=2\int_0^L v(x,t)\cdot v_t(x,t)dx\\&=2\int_0^L v(x,t)\cdot kv_{xx}dx \quad (\text{由 D.E.}).\end{aligned} \tag{5}$$

应用分部积分 ($\int_a^b g(x)h'(x)dx=g(x)h(x)|_a^b-\int_a^b g'(x)h(x)dx$), 其中 (对固定的 t)$g(x)=v(x,t)$ 以及 $h(x)=v_x(x,t)$. 则 (5) 成为

$$F'(t)=2\big(kv(x,t)v_x(x,t)|_0^L-\int_0^L k[v_x(x,t)]^2dx\big). \tag{6}$$

因为由 (2), $v(L,t)=0$ 和 $v(0,t)=0$, 则第一项为 0. 现注意到 $-k[v_x(x,t)]^2\leqslant 0$, 由此 $F'(t)\leqslant 0$. 于是, $F(t)$ 绝不会是增加的. 因由 (4), $F(0)=0$ 以及 $F(t)\geqslant 0$, 所以唯一的可能是 $F(t)\equiv 0$. 作为另一种推导, $F(t)=F(t)-F(0)=\int_0^t F'(s)ds\leqslant 0$ 以及 $F(t)\geqslant 0$ 隐含 $F(t)\equiv 0$. 于是 (如上面提及), $v(x,t)\equiv 0$, 即 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. □

注记 (1) 定理 1 的证明所用的方法也可用于证明热方程满足其他类型边界条件 (以及初始条件) 解的唯一性. 将在第 3.3 节在一些细节上考虑这些其他的 B.C. 以及它们物理上的重要性. 由于已经熟悉环形金属丝的 B.C.(参看 3.1 节中的例 3), 所以在下面的例 1 中用该方法来证明这种情形解的唯一性.

(2) 定理 1 的证明还隐含着 $u(x,t)$ 对初值有**平方平均连续依赖性**. 我们说到这种连续依赖性是指以下断言.
若 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 满足 (1) 的 D.E. 和 B.C., 则

$$F(t)=\int_0^L (u_1(x,t)-u_2(x,t))^2dx \leqslant \int_0^L (u_1(x,0)-u_2(x,0))^2dx = F(0). \quad (7)$$

的确, 如同定理 1 的证明 (参看 (6)), 对所有的 t, 有 $F'(t)\leqslant 0$, 于是 $F(t)\leqslant F(0)$. 不等式 (7) 表明若初始温度分布是接近的, 是在它们的差的平方的积分是微小的这样的意义下 (即在平方平均的意义下), 则在任一后面的时刻, 这些分布至少是如前这样接近 (也是在平方平均的意义下). □

例 1 叙述和证明环形热传导问题 (参看第 3.1 节的例 3) 唯一性定理.

解 在这种情形唯一性定理可叙述如下:
设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是下面问题的 C^2 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -L\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0\\&\text{B.C.}\quad u(L,t)=u(-L,t),\quad u_x(-L,t)=u_x(L,t)\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).\end{aligned} \quad (8)$$

则对所有的 $-L\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0,\ u_1(x,t)=u_2(x,t)$. □

证明 令 $v=u_1-u_2$, 并注意到 v 满足 (8) 中的 D.E. 和 B.C., 且 $v(x,0)=f(x)-f(x)=0$. 定义 $F(t)=\int_{-L}^L[v(x,t)]^2dx$, 注意到 $F(0)=0$ 和 $F(t)\geqslant 0$. 如定理 1 的证明, 只需证明 $F'(t)\leqslant 0$ 即可 (为什么?). 由 (6) 中的计算, 得

$$F'(t)=2\big(v(x,t)v_x(x,t)|_{-L}^L-\int_{-L}^L k[v_x(x,t)]^2dx\big)$$

由 B.C., 端点项可去掉, 于是 $F'(t)\leqslant 0$. □

注记 作为定理 1 和例 1 的结果, 现在知道第 3.1 节的命题 1 和命题 2 的初边值问题的解实际上是满足给定 B.C 和 I.C. 的唯一解. □

最大值原理及其推论

唯一性当然是一个至关重要的性质, 它在指定的条件下有着明确结果的物理过程的数学描述中是必不可少的. 然而, 有一个更强的性质, 这是关于这些过程成功的数学模型常常具备的性质, 即关于指定条件微小改变的 "稳定性" 或 "连续性". 假设对初始温度分布和边界值作微小的改变 (比如, 由实验无法觉察的量). 若解出现大的量 (实验上可觉察) 的变化, 则 (尽管有唯一性) 我们的理论

就失去它的预测价值. 如这种情况不会发生. 则称 (不严谨地) 模型具有连续地随指定条件变化 (或是稳定) 的解. 不等式 (7) 给出了某种弱意义的稳定性. 即, 当在初始温度分布上有一个微小的平方平均形变时, 在任意后面时刻的温度分布具有微小的平方平均形变. 然而, 仅因为一个函数, 比如 $g(x)$, 具有一个微小的平方平均 (即,$\int_0^L (g(x))^2 dx$ 是微小的), 这得不出 $g(x)$ 对所有在 $[0, L]$ 中的 x 都是微小的. 例如, 令 n 是任一满足 $10^{-3n} < L$ 的整数, 设 $g(x) = 10^n$, $0 \leqslant x \leqslant 10^{-3n}$ 以及 $g(x) = 0$, $10^{-3n} < x \leqslant L$. 则尽管有事实 $\int_0^L g(x)^2 dx = 10^{-3n} \cdot 10^{2n} = 10^{-n}$, 我们有 $g(x) = 10^n$, $0 \leqslant x \leqslant 10^{-3n}$. 更一般地, 除了在它的图像的尖齿处, 取 $g(x)$ 为零. 不管这种尖齿有多高, 我们总能取尖齿足够狭窄, 使得 $\int_0^L g(x)^2 dx$ 如希望的那样微小. 于是, 即使两个温度分布差的平方平均是微小的, 不能得出这个差在任意点是微小的. 为了补救在 (7) 中的这种不足, 且为了证明对杆中所有的点都是同样有效的稳定性的类型, 要运用定理 2 中叙述的最大值原理. 然而, 鉴于最大值原理的众多推论和应用, 把它的证明放在本节的末尾给出, 到那时会有关于证明的充裕的想法.

定理 2(最大值原理) 设 $u(x,t)$ 是下面问题的 C^2 解 (最多只有一个)

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t = k u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0 \quad (k > 0) \\
&\text{B.C.} \quad u(0,t) = a(t), \quad u(L,t) = b(t) \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中 $a(t)$, $b(t)$ 和 $f(x)$ 是给定的 C^2 函数. 设 T 是任意固定的未来时间. 记 M 是初始温度的最大值, 令 A 和 B 是端点 $x = 0$ 和 $x = L$ 在时间间隔从 $t = 0$ 到 $t = T$ 期间温度的最大值, 即

$$
A = \max_{0 \leqslant t \leqslant T}\{a(t)\}, \quad B = \max_{0 \leqslant t \leqslant T}\{b(t)\} \text{ 和 } M = \max_{0 \leqslant x \leqslant L}\{f(x)\}.
$$

令 $\overline{M} = \max\{A, B, M\}$(即, $\overline{M}$ 是最大一个). 则对所有满足 $0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant t \leqslant T$ 的 x 和 t,

$$
u(x,t) \leqslant \overline{M}. \tag{10}
$$

注记 以几何的术语, 最大值原理表明若问题 (9) 的解在 xtu–空间如图 1 所标绘, 则曲面 $u = u(x,t)$ 在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 上三个截面 $x = 0$, $x = L$, $t = 0$ 中之一上达到它的最高点. □

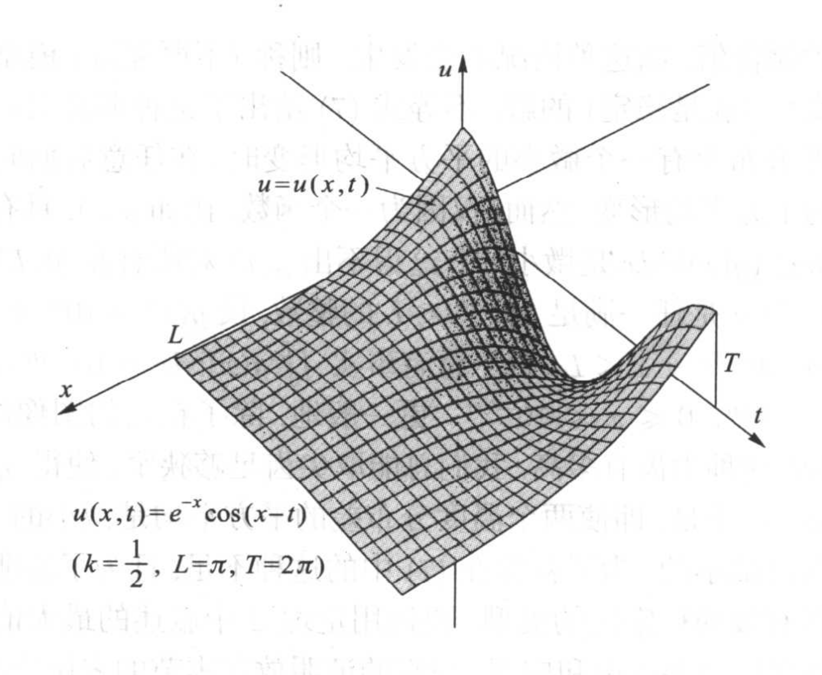


图 1

由物理的观点, 最大值原理说明在任意时刻 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 在杆内任意点 x 的温度不超过初始温度分布的最大值或在时间间隔 $[0,T]$ 期间两端点指定温度的最大值. 对那些有很好的物理直觉人来说, 不会对这个结果感到惊讶, 因为他们通常不会认为热会集中在杆内, 而是认为热是扩散的. 热 "回避" 自己, 喜欢流到较冷的区域. 同理, 寒冷 "回避" 自己. 的确, 由最大值原理易得最小值原理:

推论 (最小值原理)　设 $u(x,t)$ 是问题 (9) 的 C^2 解, 令

$$a = \min_{0\leqslant t\leqslant T}\{a(t)\}, \quad b = \min_{0\leqslant t\leqslant T}\{b(t)\}$$

以及 $m = \min\limits_{0\leqslant x\leqslant L}\{f(x)\}$. 记 $\underline{m} = \min\{a,b,m\}$, 对所有满足 $0 \leqslant x \leqslant L, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$ 的 x 和 t, 有

$$\underline{m} \leqslant u(x,t).$$

证明　设 $v(x,t) = -u(x,t)$. 若分别以 $-a(t)$, $-b(t)$ 和 $-f(x)$ 来替换 $a(t)$, $b(t)$ 和 $f(x)$, 则 $v(x,t)$ 满足问题 (9). 现不难验证

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\{-a(t)\} = -\min_{0\leqslant t\leqslant T}\{a(t)\} = -a,$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\{-b(t)\} = -b \text{以及} \max_{0\leqslant x\leqslant L}\{-f(x)\} = -m.$$

于是, 对 $v(x,t)$ 运用最大值原理, 得 $v(x,t) \leqslant \max\{-a,-b,-m\} = -\min\{a,b,m\} = -\underline{m}$. 则 $v(x,t) \leqslant -\underline{m}$, 乘 -1, 得反向不等式 $u(x,t) = -v(x,t) \geqslant \underline{m}$, 正是所期望的. □

例 2 利用最大值和最小值原理得出

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = 9u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3, \quad t \geqslant 0 \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0 \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = 6\sin\tfrac{\pi x}{3} + 2\sin(\pi x) \end{aligned} \tag{11}$$

的解 $u(x,t)$ 满足不等式 $0 \leqslant u(x,t) \leqslant 4\sqrt{2}$.

解 这里 $k=9$, $L=3$ 以及初始温度分布具有第 3.1 节命题 1 的形式. 因此 (11) 的 (唯一解) 是

$$u(x,t) = 6e^{-\pi^2 t}\sin\frac{\pi x}{3} + 2e^{-9\pi^2 t}\sin\pi x. \tag{12}$$

由此, 得 $-8 \leqslant u(x,t) \leqslant 8$(为什么?), 但我们必须比这个做得更好. 通常可以利用微积分 (例如, 令 $u_t(x,t)=0$ 和 $u_x(x,t)=0$ 同时解出 x 和 t) 来确定该函数确实在带形 $0<x<3$, $t>0$ 内的局部极大点、极小点或鞍点. 求解这些方程或证明无解不是件容易事.(的确, 在带形内有一个临界点 (参看习题 14).) 然而, 即使做了这些, 那仍然还得去检验在带形边界上的最大值和最小值. 最大值最小值原理使我们免去了检验严格在带形内的极值的工作, 因为这些原理表明热方程解的最大值和最小值 (直到任一给定时刻) 自动地在边界上达到. 读者也许尝试去证明 u 的最大值必在 $t=0$ 时发生, 因为 (12) 中的这些项似乎对所有的 x 都是减少的. 事实上, 在 $x=\frac{3}{2}$ 处, 温度在 $t=0$ 时是增加的:

$$u_t(\frac{3}{2},0) = -6\pi^2\sin\frac{\pi}{2} - 18\pi^2\sin\frac{3\pi}{2} = 12\pi^2 > 0. \tag{13}$$

因此, 仅仅因为这些项中的振幅是减少的, 不能得出 $u(x,t)$ 的值是减少的. 于是, 如果没有最大值最小值原理, 就得被迫去寻求 $t>0$ 的局部最大值和最小值. 然而, 利用最大值原理, 我们知道, 在带形中, $u(x,t)$ 不会超过在 xt–平面中在边界 $x=0$, $x=3$, $t=0$ 上的最大值. 对于 $x=0$ 或 $x=3$, 注意到 $u(0,t)=0$ 和 $u(3,t)=0$. 为求 $u(x,0)$ 的最大值和最小值, 对 $f(x) = 6\sin\frac{\pi x}{3} + 2\sin(\pi x)$ 求导:

$$f'(x) = 2\pi(\cos\frac{\pi x}{3} + \cos(\pi x)) = 4\pi\cos\frac{2\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3},$$

其中用了 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))\cos(\frac{1}{2}(\alpha-\beta))$. 因此, 在区间 $[0,3]$ 内, 只当 $x=\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$ 时, $f'(x)=0$. $f(x)$ 的图像在图 2 中展示. 于是, f 的最大值是

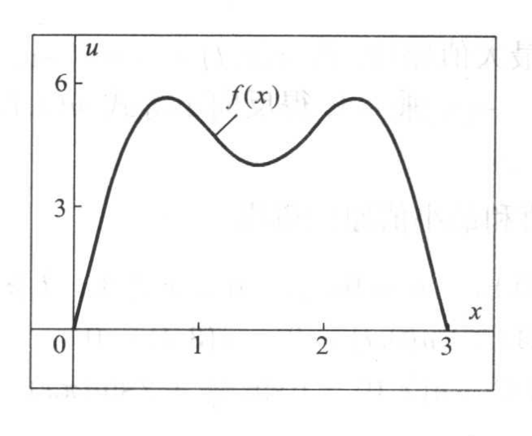


图 2

$f(\frac{3}{4}) = f(\frac{9}{4}) = 4\sqrt{2}$. 在点 $x = \frac{3}{2}$, f 有局部最小值 $f(\frac{3}{2}) = 4$. 在 $x = \frac{3}{2}$ 处的温度开始时(随着热流入该局部最小) 将增加 [参看 (13)], 这是没什么可感到惊讶的. $u(x,t)$ 在边界 $x=0$, $x=3$, $t=0$ 上的最大值是 $4\sqrt{2}$, 而在这些边界上的最小值是 0. 因此, 由最大值原理, 对所有的 $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant t$, 有 $u(x,t) \leqslant 4\sqrt{2}$, 而由最小值原理, 对所有的 $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant t$, 有 $u(x,t) \geqslant 0$, 正如所期望的. 由 (12) 可知, 当 $t \to \infty$ 时 $u(x,t) \to 0$, 且对大的 t, $u(x,t)$ 很接近 $6e^{-\pi^2 t}\sin\frac{\pi x}{3}$. $u(x,t)$ 在 xtu–空间的图像在图 3 中展示. □

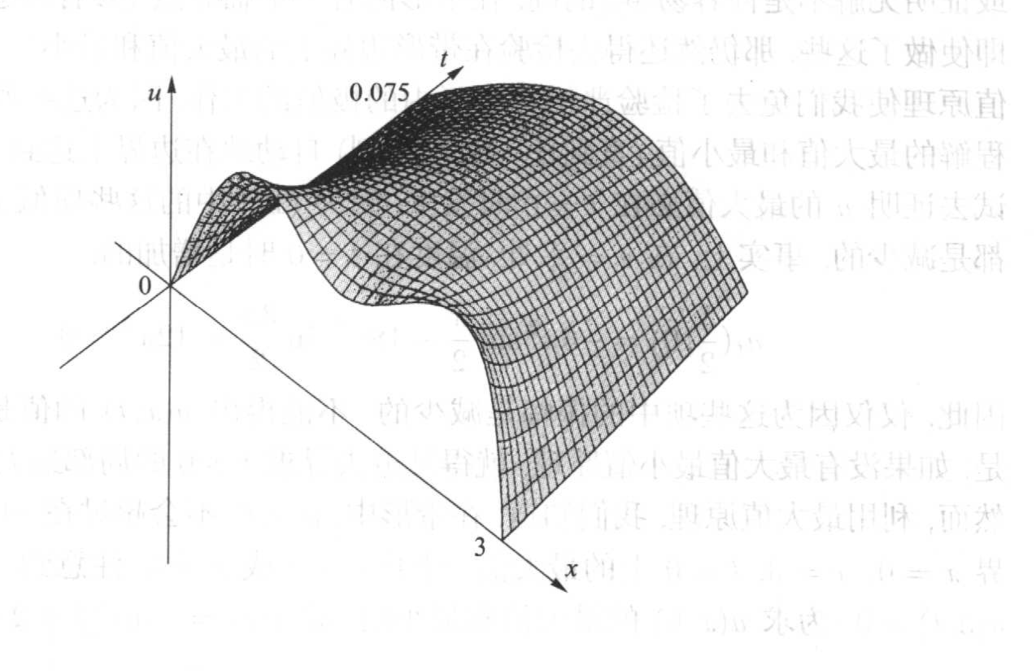


图 3

下面定理表明, 如果热方程的两个初边值问题在杆内每点具有接近的初始温度分布, 直到时刻 T 具有接近的指定边值, 则对每一时刻 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$, 在杆

中所有点上, 对应的这些解 (如它们存在的话) 必至少也是那样接近. 这是解关于边界条件和初始条件连续依赖性的重要性质, 这在本节的开始有过讨论. 利用最大值原理容易证明这个结果.

定理 3(关于 I.C. 和 B.C. 的连续依赖性) 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 分别是下面各个问题的 C^2 解 $(0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0)$

$$\begin{array}{llll} \text{D.E.} & u_t = ku_{xx} & \text{D.E.} & u_t = ku_{xx} \\ \text{B.C.} & \begin{cases} u(0,t) = a_1(t) \\ u(L,t) = b_1(t) \end{cases} & \text{B.C.} & \begin{cases} u(0,t) = a_2(t) \\ u(L,t) = b_2(t) \end{cases} \\ \text{I.C.} & u(x,0) = f_1(x) & \text{I.C.} & u(x,0) = f_2(x). \end{array} \tag{14}$$

若对某个 $\epsilon \geqslant 0$, 有

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant \epsilon,\ 0 \leqslant x \leqslant L,$$

以及 $|a_1(t) - a_2(t)| \leqslant \epsilon$ 和 $|b_1(t) - b_2(t)| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant t \leqslant T$,
则 $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \epsilon,\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T$.

证明 令 $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. 则 $v_t = kv_{xx}$ 且有

$$|v(x,0)| = |f_1(x) - f_2(x)| \leqslant \epsilon, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ \text{和}$$

$$|v(0,t)| = |a_1(t) - a_2(t)| \leqslant \epsilon,\ |v(L,t)| = |b_1(t) - b_2(t)| \leqslant \epsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

因此, v 在边界 $t = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant L)$ 和 $x = 0,\ x = L$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 上的最大值不会大于 ϵ, 而 v 在这些边界上的最小值不会小于 $-\epsilon$. 于是, 由最大值最小值原理, 得结果:

$$-\epsilon \leqslant v(x,t) \leqslant \epsilon \text{ 或 } |u_1(x,t) - u_2(x,t)| = |v(x,t)| \leqslant \epsilon. \qquad \square$$

注记 注意到当 $\epsilon = 0$ 时,(14) 中的问题恒同, 且有结论 $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant 0$ (即, $u_1 = u_2$). 因此, 唯一性结果定理 1 是定理 3 的特殊情形, 可通过令 $\epsilon = 0$ 获得. 定理 3 和最大值原理的证明是与定理 1 的证明完全不同. 对某些读者, 这似乎直觉上是显然的: 如果某个初边值问题具有唯一解, 则如果初始条件或边界条件有微小的改变, 那么解也只有微小的变化. 为了说明这种情况不总是对的, 我们给出下面的反例.

例 3　对任意给定的常数 $\alpha > 0$, 考虑关于 $u(x,t)$ 的问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad (1-t)u_t = u, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;\\ &\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0;\\ &\text{I.C.}\quad u(x,0) = \alpha x(2-x).\end{aligned} \tag{15}$$

证明不论常数 α 如何小, 解随着 $t \to 1^-$ 将变大.

解　对任意固定的 x, 该偏微是一个分离的常微, 即 $u^{-1}du = (1-t)^{-1}dt$, 且通解是 $u(x,t) = f(x)/(1-t)$, $f(x)$ 是一个 C^1 函数. 由于 $f(x) = u(x,0) = \alpha x(2-x)$, 所以问题 (15) 的唯一解是 $u(x,t) = \alpha x(2-x)/(1-t)$. 特别, $u(1,t) = \alpha/(1-t)$, 若 $\alpha > 0$, 即使 $\alpha = 10^{-9}$, 它随着 $t \to 1^-$ 时变得任意大. 注意到 u 的初始值和边界值的最大值是 α, 因此对问题 (15) 的解没有最大值原理.　□

最大值原理的证明

在最大值原理的叙述中, 假设用更一般的偏微 $u_t = ku_{xx} - c$ 来替换 D.E., 这里 $c \geqslant 0$ 是一固定的常数. 把由此得出的定理称为**广义的最大值原理**, 或简记为 **GMP**. 虽然我们最初兴趣是在 $c = 0$ 的情形, 但我们将先对 $c > 0$ 这种更容易的情形证明 GMP, 这在物理上对应于均匀的热沿着杆损失. 然后通过细致地考虑当 $c \to 0^+$ 的极限来处理 $c = 0$ 的情形. 假设 $u(x,t)$ 满足 D.E. $u_t = ku_{xx} - c$, $c > 0$. 令 M_0 是 u 在图 4 中闭矩形 R($0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$) 的最大值.

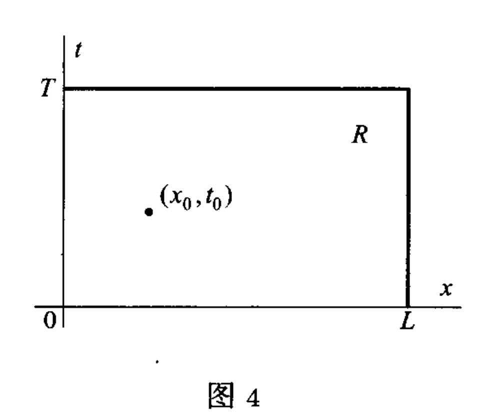


图 4

附录 4 中的最大值最小值定理确保了 M_0 的存在性. 显然 $M_0 \geqslant \overline{M}$, 因 $\overline{M}$(由定义) 是 u 在 R 的两边和底边上的最大值, 但需要证明 $M_0 = \overline{M}$. 设 (x_0, t_0) 是 R 内的点, 使得 $u(x_0, t_0) = M_0$. 假设 $0 < x_0 < L$ 和 $0 < t_0 \leqslant T$, 不然 $M_0 = \overline{M}$(为什么?), 则定理得证. 然而, 将证明这个假设导出矛盾, 于是这个假设准不成立,

因此得出结论 $M_0=\overline{M}$. 注意到 $u(x,t_0)$ 作为在开区间 $(0,L)$ 上 x 的函数, 在 x_0 处有最大值, 所以有 $u_x(x_0,t_0)=0$. (如果 x_0 是端点的话将没有这个结论.) 另外, 由于 $u(x,t_0)$ 的图像在 x_0 处不可能是向上凹的 (为什么不是?), 所以一定有 $u_{xx}(x_0,t_0)\leqslant 0$. 利用这个事实以及方程 $u_t=ku_{xx}-c$, 得

$$u_t(x_0,t_0)=ku_{xx}(x_0,t_0)-c\leqslant -c. \tag{16}$$

因此, $u_t(x_0,t_0)<0$. 于是, 比 t_0 稍小点的 $\hat{t}$(回忆起 $t_0>0$), 有 $u(x_0,\hat{t})>u(x_0,t_0)=M_0$, 导出矛盾 (为什么?). 于是, 假设 $0<x_0<L$ 和 $t_0>0$ 必不成立, 所以在 $c>0$ 的情形时 GMP 已经得证. $c=0$ 的情形的证明如下. 令 u 是在 R 上 $u_t=ku_{xx}$ 的解. 由令 $v(x,t,c)=u(x,t)-ct$ 定义了一个三个变量的函数 v. 注意到 $v_t=u_t-c=ku_{xx}-c=kv_{xx}-c$, 这表明对每个固定的 c, $v(x,t,c)$ 满足方程 $v_t=kv_{xx}-c$. 因此, 由已经对 $c>0$ 证明的 GMP, 得知 v 的最大值在 R 的两边或底边上一点, 设为 (x_c,t_c) 上出现, (即, $x_c=0$ 或 $x_c=L$ 或 $t_c=0$). 另外, 由于 $\overline{M}$(据定义) 是 u 在 R 的两边和底边上的最大值, 所以有

$$v(x_c,t_c,c)=u(x_c,t_c)-c\cdot t_c\leqslant \overline{M}-c\cdot t_c\leqslant \overline{M}, \tag{17}$$

因为 $c\cdot t_c\geqslant 0$. 如 (x,t) 是 R 中任意一点, 则

$$u(x,t)=\lim_{c\to 0^+}[u(x,t)-ct]=\lim_{c\to 0^+}v(x,t,c). \tag{18}$$

由于 $v(x,t,c)\leqslant v(x_c,t_c,c)$(为什么?) 以及由 (17) $v(x_c,t_c,c)\leqslant \overline{M}$, 所以 $v(x,t,c)\leqslant \overline{M}$. 因此, 由 (18), $u(x,t)$ 是 $\leqslant \overline{M}$ 的数的极限, 于是对 R 中任意的 (x,t),$u(x,t)\leqslant \overline{M}$. □

注记 也有关于 $u_t=ku_{xx}-c$ 的解的广义最小值原理, 但这里 $c\leqslant 0$, 而不是 $c\geqslant 0$. 于是, 只有在 $c=0$ 的情形, 最小值和最大值原理都成立. 应该注意到, 虽然最大值原理表明在 R 上热方程的解的最大值必在 R 的两边或底边出现, 但这并未排除最大值也能在 R 的严格内部出现的可能性. 确实, 任一常数解具有这种性质. 有一个强最大值原理, 它隐含着如果最大值确实出现在 R 的严格内部, 比如在 (x_0,t_0), 其中 $0<x_0<L$ 和 $t_0>0$, 则该解对 $t\leqslant t_0$ 必为常数. 对于是由乘积解的有限和表示的解, 这反过来隐含了该解处处为常数 (为什么?). 在习题后的补充中, 我们简述了强最大值原理的一个 "初等" 证明, 这只是对深思熟虑的读者提供的. □

概要 3.2

1. 唯一性定理 (参看定理 1): 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是下面问题的 C^2 解, 其中 $a(t)$, $b(t)$ 和 $f(x)$ 是给定的 C^2 函数,

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_t = ku_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0; \\ \text{B.C.} & u(0,t) = a(t), \quad u(L,t) = b(t); \\ \text{I.C.} & u(x,0) = f(x). \end{array} \tag{S1}$$

则对所有满足 $0 \leqslant x \leqslant L$ 和 $t \geqslant 0$ 的 x 和 t, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

2. 最大值原理 (参看定理 2): 令 $u(x,t)$ 是 S1 的 C^2 解. 令 $T > 0$ 并令 $\overline{M}$ 表示 u 在矩形 R: $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 的两边 ($x = 0$ 和 $x = L$) 或底边的最大值. 则对所有的 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $u(x,t) \leqslant \overline{M}$. 类似地, 最小值原理 (参看定理 2 的推论) 断言, 如 $\underline{m}$ 表示 u 在矩形 R 的两边或底边的最小值, 则对所有的 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\underline{m} \leqslant u(x,t)$.

3. 关于 I.C. 和 B.C 的连续依赖性: 最大值最小值原理的一个结论是 (S1) 的解 $u(x,t)$ 连续地依赖于初始条件和边界条件 (参看定理 3). 定理 1 的证明方法提供了这个结果的弱形式: 在每一时刻 $t > 0$, 两个温度分布的差的平方平均 (参看 (7)) 不超过该平方平均在初始的值, 只要这两个分布在 t 之前在两端具有相同的值.

练习 3.2

1. (a) 令 $v(x,t)$ 是 $v_t = kv_{xx}$ $(0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0)$ 的任一 C^2 解, 且满足 B.C. $v(0,t) = 0$ 和 $v(L,t) = 0$ (没有初始条件). 证明对任意 t_1, t_2, $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$,

$$\int_0^L [v(x,t_2)]^2 dx \leqslant \int_0^L [v(x,t_1)]^2 dx. \tag{*}$$

提示 令 $F(t) = \int_0^L [v(x,t)]^2 dx$, 如定理 1 的证明那样去证明 $F'(t) \leqslant 0$. 然后注意到 $F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F'(t)dt \leqslant 0$(为什么?).

(b) 解释为什么结论 (*) 当 B.C. 以任一下面的 B.C. 组替换时仍然成立:

$$\text{B.C.}\begin{cases} v_x(0,t)=0, \\ v_x(L,t)=0; \end{cases} \quad \text{B.C.}\begin{cases} v_x(0,t)=0, \\ v(L,t)=0; \end{cases}$$

$$\text{B.C.}\begin{cases} v_x(0,t)=h\cdot v(0,t)\ [\text{其中 } h>0], \\ v(L,t)=0. \end{cases}$$

2. 对下面问题叙述和证明唯一性定理

$$\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx};$$

$$\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=a(t),\quad u_x(L,t)=b(t);$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).$$

提示 利用定理 1 证明的方法. 作为另一种证法, 在习题 1 中对 $v=u_2-u_1$ 以及 $t_1=0$ 和 $t_2=t$ 利用 (*).

3. 利用最大值最小值原理推断问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0;$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=\sin x+\frac{1}{2}\sin(2x)$$

的解 u 满足 $0\leqslant u(x,t)\leqslant \frac{3}{4}\sqrt{3},\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0$.

4. 把习题 3 中的 I.C. 换成 $u(x,0)=5\sin(3x)-3\sin(5x)$. 求最小的常数 D 和最大的常数 C, 使得对所有的 $0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0,\ C\leqslant u(x,t)\leqslant D$.

提示 $\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))\sin(\frac{1}{2}(\alpha-\beta))$.

5. 假设 Joe 在习题 3 的初始温度分布中加入项 $\frac{1}{10}x^3(\pi-x)^3$. 假设他能求得该新问题的解, 证明对任意的 $0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0$, 这个解与原问题解的偏差最多为 $\pi^6/640$.

提示 应用定理 3, 注意到 $|f_1(x)-f_2(x)|=|\frac{1}{10}x^3(\pi-x)^3|$.

6. 考虑下面问题, 其中 $\alpha>0$,

$$\text{D.E.}\quad u_t=2u_{xx},\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=-\alpha,\quad u_x(2,t)=0;$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=-\alpha x(1-\frac{1}{4}x).$$

(a) 通过用形式为 $u(x,t)=Ax^2+Bx+Ct$ 的函数去试验, 推断 $u(x,t)=\alpha x(\frac{1}{4}x-1)+\alpha t$ 是需要的解 (由习题 2 是唯一的).

(b) 取 α 的两个值, 设为 α_1 和 α_2, 如 (a) 部分, 令 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 为对应的解. 证明 $|u_1(x,0)-u_2(x,t)| \leqslant |\alpha_1-\alpha_2|$, 并注意到 $|(u_1)_x(0,t)-(u_2)_x(0,t)| \leqslant |\alpha_1-\alpha_2|$ 和 $|(u_1)_x(2,t)-(u_2)_x(2,t)| = 0 \leqslant |\alpha_1-\alpha_2|$.

(c) 若定理 3 类似的结果 (对于这里的 B.C.) 是对的话, 那将有 $|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \leqslant |\alpha_1-\alpha_2|$. 然而, 去验证事实上当 $t \to \infty$ 时, $|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \to \infty$. 因此, 在这个问题中 α 的微小变化将导致解对于大的 t 产生大的变化.

注记 按物理上来说, B.C.$u_x(0,t) = -\alpha$ 意味着热能以与 α 成比例的常数比率通过端点 $x=0$ 施于杆上, 因为通过 $x=x_0$ 的热流是 $-KAu_x(x_0,t)$(参看第 3.1 节的 (2)). 端点 $x=2$ 处是绝热的 (即, 没有热流). 因此, 杆中的热当 $t\to\infty$ 时以与 α 成比例的常数比率增加. □

7. (比较结果). 令 B 表示矩形 $R:\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T$ 在底边 $(t=0)$ 或两边 $(x=0$ 和 $x=L)$ 上的点组成的集合.

(a) 令 C 是个常数. 由最大值原理推断: 如 $u(x,t)$ 是 $u_t = ku_{xx}$ 在 R 上的 C^2 解, 且对 R 中的 $(\bar{x},\bar{t})$, $u(\bar{x},\bar{t}) \leqslant C$, 则对 R 中所有的 (x,t), $u(x,t) \leqslant C$.

(b) 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是热方程 $u_t = u_{xx}$ 在 R 上两个 C^2 解, 证明若对所有的 B 中的 $(\bar{x},\bar{t}), u_1(\bar{x},\bar{t}) \leqslant u_2(\bar{x},\bar{t})$, 则对 R 中所有的 $(x,t), u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t)$.

提示 对 $u = u_1 - u_2$ 和 $C = 0$ 利用 (a) 部分.

8. 考虑长度为 π 的杆, 两端保持为零度. 若初始温度为 $u(x,0) = [\sin x]^7$, 则证明对所有的 $0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \geqslant 0,\ u(x,t) \leqslant e^{-kt}\sin x$.

提示 对 $u(x,t) - e^{-kt}\sin x$ 应用最大值原理或利用习题 7(b), 注意到 $r^7 \leqslant r,\ 0 \leqslant r \leqslant 1$. 别费心去实际上找出该精确解!

9. 为了证明下面关于端点绝热的 (其中与 u_x 成比例的热流为 0) 最大值原理, 解释定理 2 (最大值原理) 的证明 (就在概要的前面) 哪些需要做些修改:
设 u 是下面问题的 C^2 解

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = 0,\quad u_x(L,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x).
\end{aligned}
$$

则

$$u(x,t) \leqslant M \equiv \max_{0\leqslant x\leqslant L}\{f(x)\}.$$

提示 关于 $u_t = ku_{xx} - c\ (c>0)$ 具有绝热端点的广义最大值原理的证明中, 为了得到矛盾, 仍然可假设最大值在 (x_0,t_0) 发生, 其中 $t_0 > 0$, 但不可假设 $0 < x_0 < L$, 因这时必须排除 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = L$ 的可能性. 然而, 该 B.C. 帮了我们的忙!

10. 由习题 9 的最大值原理推导对应的最小值原理.

11. 利用习题 9 给出习题 2 另一个唯一性的证明.

提示 先证明 $u_1 - u_2 \leqslant 0$, 然后证明 $u_2 - u_1 \leqslant 0$.

12. 利用习题 9 和 10, 证明下述具有定理 3 形式的结果. 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 分别是下面各个问题的解 (其中 $0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0$):

$$\begin{array}{llll} \text{D.E.} & u_t = ku_{xx}; & \text{D.E.} & u_t = ku_{xx}; \\ \text{B.C.} & \begin{cases} u_x(0,t) = 0, \\ u_x(L,t) = 0; \end{cases} & \text{B.C.} & \begin{cases} u_x(0,t) = 0, \\ u_x(L,t) = 0; \end{cases} \\ \text{I.C.} & u(x,0) = f_1(x). & \text{I.C.} & u(x,0) = f_2(x). \end{array}$$

其中 $|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant \epsilon$. 则对所有的 $0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0,\ |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \epsilon$.

13. 叙述和证明关于环形金属丝 (参看第 3.1 节中的 (28)) 的最大值原理.

提示 在 $u_t = ku_{xx} - c\ (c > 0)$ 的广义最大值原理的证明中, 注意到若 u 的最大值在 (x_0, t_0) 处发生, 其中 $t_0 > 0$ 且 $x_0 = \pm L$, 则 $u_x(\pm L, t_0) = 0$ (为什么?).

14. (a) 在例 2 中, 求出唯一的时间 $t_0 > 0$, 使得 $u(\frac{3}{2}, t)$ 最大.

(b) 对 (a) 部分的时间 t_0, 证明 $u(x, t_0)$ 只当 $x = \frac{3}{2}$ 时为最大.

(c) 利用最大值原理证明, 尽管有 (a) 和 (b) 部分, 在任一正方形区域 $|x - \frac{3}{2}| \leqslant \epsilon$, $|t - t_0| \leqslant \epsilon\ (\epsilon > 0)$, 有不同于 $(\frac{3}{2}, t_0)$ 的点 (x,t), 使得 $u(x,t) \geqslant u(\frac{3}{2}, t_0)$. (不管正方形的大小和位置, 经由热方程不变的变换; 参看第 3.1 节的习题 1, 在正方形上热方程的最大值原理成立.)

(d) 这里来证明 $(\frac{3}{2}, t_0)$ 甚至不是 $u(x,t)$ 的局部最大值. 对 $t < t_0$, 令 $x(t)$ 是在 $[0,3]$ 中满足 $u_x(x(t),t) = 0$ 最左边的点. 证明 $\cos\left(\frac{\pi}{3}x(t)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3 - e^{8\pi^2 t}}$, $t \leqslant t_0$. 有 $\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_x(x(t),t)x'(t) + u_t(x(t),t) = ku_{xx}(x(t),t)$ (为什么?). 通过直接计算来证明 $u_{xx}(x(t),t) < 0$, $t < t_0$. 为什么这表明 $u(x(t),t) > u(\frac{3}{2}, t_0), 0 < t < t_0$? 则为什么 $(\frac{3}{2}, t_0)$ 不是 u 的局部最大值?

关于强最大值原理的补充

在强最大值原理 (参看下面的定理) 的证明中出现的关键函数族是

$$w(x,t) = \exp(-B(x^2 + \alpha^2 t^2)) - \exp(-Br^2), \quad \alpha,\ B,\ r > 0 \text{是常数}. \qquad (*)$$

注意到对所有的 (x,t), $-1 \leqslant w(x,t) \leqslant 1$, 且 $w > 0$ 只在椭圆 $x^2+\alpha^2t^2=r^2$ 内部成立, 该椭圆内切于矩形 $-r \leqslant x \leqslant r$, $-r/\alpha \leqslant t \leqslant r/\alpha$. 此时

$$w_x = \exp(-B(x^2+\alpha^2t^2))(-2Bx),$$

$$w_{xx} = \exp(-B(x^2+\alpha^2t^2))4B^2x^2 - \exp(-B(x^2+\alpha^2t^2))2B$$

和

$$w_t = \exp(-B(x^2+\alpha^2t^2))(-2B\alpha^2t).$$

因此,

$$kw_{xx} - w_t = 2B(k(2Bx^2-1)+\alpha^2t)\exp(-B(x^2+\alpha^2t^2)).$$

于是, 只对 $t > -(k/\alpha^2)(2Bx^2-1)$ 时有 $kw_{xx}-w_t>0$. 由 $kw_{xx}-w_t=0$ 定义的曲线是抛物线 $t=-(k/\alpha^2)(2Bx^2-1)$, 它开口向下, 顶点是 $(0,k/\alpha^2)$, 在其上曲率为 $4kB/\alpha^2$(参看图 5). 注意到, 若 $r/\alpha > k/\alpha^2$, 顶点严格地在椭圆内部. 如 $\alpha > 2k/r$, 也将有这种情形, 后面就假设这个条件. 通过考虑函数 $w(x-x_0,t-t_0)$ 可把椭圆的中心移到任一点 (x_0,t_0).

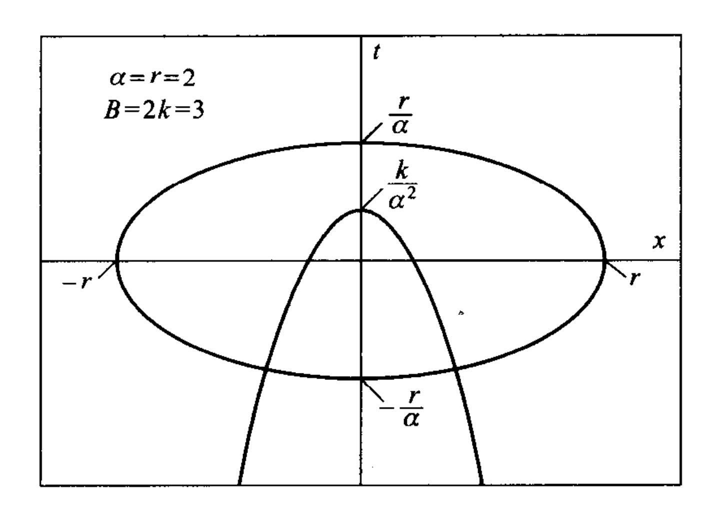


图 5

引理 令 u 是在闭矩形 R 上热方程 $u_t=ku_{xx}$ 的解, 该矩形包含形如 $(x-x_0)^2+\alpha^2(t-t_0)^2 \leqslant r^2$ 的椭圆区域 E 作为它的内部, 除了可能最上面的点 $(x_0,t_0+\frac{r}{\alpha})$ 不在其中. 假设 $\alpha > \frac{2k}{r}$. 若 u 在 R 中的最大值, 记为 M, 在 E 的边界上某点 P 达到, 则最大值也在由点 $(x_0,t_0+\frac{k}{\alpha^2})$[严格在椭圆内, 因 $\frac{r}{\alpha} > \frac{k}{\alpha^2}$] 出发到最低点 $(x_0,t_0-\frac{r}{\alpha})$ 的垂直线段上的某点 Q 达到.

证明 不失一般性假设 $(x_0,t_0)=(0,0)$. 对任意常数 $\epsilon>0$, 令 $v=u+\epsilon w$, 其中 w 由 $(*)$ 定义. 对于 R 中不属于 E 的点 P', 有 $v(P')=u(P')+\epsilon w(P')<M$, 而 $v(P)=M$, 因 $w(P)=0$. 因此, v 的最大值是在 E 中的某点 Q_1. 在 Q_1 处, 有 $v_{xx}\leqslant 0$ 和 $v_t\geqslant 0$(为什么?). 所以在 Q_1, $kw_{xx}-w_t=(kv_{xx}-v_t)/\epsilon\leqslant 0$. 因此, Q_1 必在 E 和抛物区域 $t\leqslant -(k/\alpha^2)(2Bx^2-1)$ 的交集中, 记这个交集为 J. 注意到 $v(Q_1)\geqslant v(P)=u(P)=M$. 得 $u(Q_1)=v(Q_1)-\epsilon w(Q_1)\geqslant v(Q_1)-\epsilon\geqslant M-\epsilon$. 令 $\epsilon\to 0$, 得到 (参看附录 4 的 Bolzano-Weierstrass 定理): 在 J 中存在一点 Q_0, 使得 $u(Q_0)=M$. 通过加大常数 B, 可使抛物线无限制的狭窄, 从而迫使在从 $(0,k/\alpha^2)$ 到 $(0,-r/\alpha)$ 的线段上存在一点 Q, 使得 $u(Q)=M$. □

定理 (强最大值原理) 令 u 是在矩形 R $(0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ 上热方程的解. 若 u 在 $(\bar{x},T)$ 处取到最大值, $0<\bar{x}<L$, 则 u 在 R 中必为常数.

证明 令 $M=u(\bar{x},T)$. 首先证明: 对所有的 t, $0\leqslant t\leqslant T$, $u(\bar{x},t)=M$. 假设不然, 对某个 t_1, $0\leqslant t_1<T$, $u(\bar{x},t_1)<M$. 设 t_2 是最小的大于 t_1 的数, 使得 $u(\bar{x},t_2)=M$ (即 $t_2=\inf\{t|t>t_1,\ u(\bar{x},t)=M\}$; 参看附录 4). 如引理那样选一个椭圆区域 E, 使得 $(\bar{x},t_2)$ 是 E 的顶部点, $(\bar{x},t_3)$[①]是底部点, 其中 $t_1<t_3<t_2$. 引理表明, 存在某点 $(\bar{x},t_4)$[②], $t_3\leqslant t_4<t_2$, 使得 $u(\bar{x},t_4)=M$[③]. 这与 t_2 的选取矛盾. 注意到相同的论证方法表明: 若在 R 内严格地在 $x=0$ 和 $x=L$ 之间某点 P 处取到最大值 M, 则 u 在 R 中所有 P 下面的点都取值 M. 现如引理那样取一椭圆 E, 它与直线 $t=T$, $x=\bar{x}$ 和 $x=\delta$ 相切, 其中 $0<\delta<\bar{x}$(参看图 6). 因该椭圆的底部点在 $t=T-\frac{1}{2}(\bar{x}-\delta)/\alpha$ 的水平高度, 所以通过取 α 足够大, 可限制该椭圆在一个任意细的形如 $T-d\leqslant t\leqslant T$, $d>0$ 的带形中. 通过允许 δ 可在 0 和 $\bar{x}$ 之间变化, 我们可利用引理以及上述的观察来确定 u 在所有的点 (x,t) 都取值 M, 其中 $\frac{1}{2}\bar{x}<x\leqslant\bar{x}$ 和 $t\leqslant T-d$. 然后令 $d\to 0^+$ 并利用 u 的连续性, 得到: 对 $\frac{1}{2}\bar{x}<x\leqslant\bar{x}$ 和 $0\leqslant t\leqslant T$, 有 $u(x,t)=M$. 类似地, 通过考虑在 $x=\bar{x}$ 右边的椭圆, 可证对于 $\bar{x}\leqslant x\leqslant\bar{x}+\frac{1}{2}(L-\bar{x})$ 和 $0\leqslant t\leqslant T$, 有 $u(x,t)=M$. 同理, 利用在 $x=0$ 和 $x=\frac{1}{2}\bar{x}$ 之间以及在 $x=\bar{x}+\frac{1}{2}(L-\bar{x})$ 和 $x=L$ 之间的椭圆, 可把 u 取值 M 的区域延拓到矩形 $\frac{1}{4}\bar{x}\leqslant x\leqslant\bar{x}+\frac{3}{4}(L-\bar{x})$, $0\leqslant t\leqslant T$. 反复重复这个过程, 得到 u 必在整个 R 取常值. (注意到 u 的连续性使得我们得出在 R 的两条边 $x=0$ 和 $x=L$ 上也取值 M.) □

---

①原文误为 (x_0,t_3).——译者

②原文误为 (x_0,t_4).——译者

③原文误为 $u(x_0,t_4)$.——译者

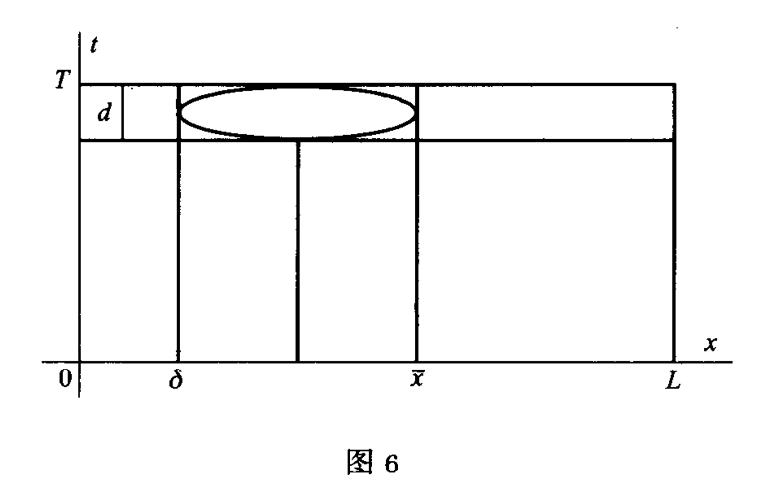


图 6

§3.3 时间无关的边界条件

由第 3.1 节中的方程 (2) 回忆起: 热量 (每单位时间) 沿正方向通过 $x = a$ 处截面为 $-KAu_x(a,t)$, 其中 $K > 0$ 是热传导率, A 是该截面面积. 因此, 通过在 $x = 0$ 或 $x = L$ 上指定 u_x, 对热能传过杆的端点的变化率加上条件. 特别, 条件 $u_x(0,t) = 0$ 意味着没有热流过端点 $x = 0$, 换句话说, 该端点是**绝热的**. 如果要求这些端点是绝热的或保持 0 度, 则有四组可能的边界条件:

$$
\text{(a)} \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0; \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} u_x(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0; \end{cases}
$$
$$
\text{(b}'\text{)} \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u_x(L,t) = 0; \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} u_x(0,t) = 0, \\ u_x(L,t) = 0. \end{cases} \tag{1}
$$

前面, 在第 3.1 节已考虑过 (a). 在情形 (b) 和 (b′), 一个端点是绝热, 而另一个则保持 0 度. 我们将相当详细地讨论 (b), 但把对 (b′) 的考虑留作习题 (另一种做法, 通过把杆转过来把 (b′) 转换成 (b), 于是把端点对换). 我们已经建立了具 (a), (b) 或 (c)B.C. 以及某个 I.C. 的热方程解的唯一性 (参看第 3.2 节的习题 2 和 11). 先考虑情形 (c), 这时杆与外界完全隔绝.

例 1 对适当的初始分布 $f(x)$, 求下面问题的解

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \ 0 \leqslant x \leqslant L, \ t \geqslant 0; \\
&\text{B.C.} \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0; \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x).
\end{aligned} \tag{2}
$$

解 利用在第 3.1 节中对 (14) 用过的同样的过程. 换句话说, 求出 D.E. 满足 B.C. 的乘积解, 然后为了满足 I.C., 利用叠加原理, 通过组成这些乘积解的线性组合得到该 D.E. 和 B.C. 的其他解. 不管 B.C. 和 I.C., D.E. 的乘积解可由分离变量法求得. 在第 3.1 节 (最终) 以三种情形完成了这个过程. 对情形 1(参看第 3.1 节的 (11)), 有

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)), \tag{3}$$

$$u_x(x,t) = e^{-\lambda^2 kt}(c_1 \lambda \cos(\lambda x) - c_2 \lambda \sin(\lambda x)). \tag{4}$$

在 (4) 中取 $x = 0$, 得到 $u_x(0,t) = \lambda e^{-\lambda^2 kt} c_1$. 因 $\lambda > 0$, 所以由 (2) 的第一个 B.C., 只能取 $c_1 = 0$. 在 (4) 中取 $x = L$, 有

$$u_x(L,t) = -\lambda e^{-\lambda^2 kt} c_2 \sin(\lambda L).$$

由第二个 B.C., 这必为零. 避免 $c_2 = 0$(只生成平凡解 $u = 0$) 的唯一办法是选 λ 使得 $\sin(\lambda L) = 0$. 因此, $\lambda L = n\pi$ 或 $\lambda = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 于是, 得到一族 [情形 1]D.E. 和 B.C. 的乘积解: 对 $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$u_n(x,t) = a_n e^{-(n\pi/L)^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{5}$$

在习题 1 中, 要求读者验证: 在情形 2(参看第 3.1 节中的 (12)), D.E. 和 B.C. 没有非零解. 情形 3(参看第 3.1 节中的 (13))D.E. 和 B.C. 有简单但仍重要的解, 即常数解 $u(x,t) = c_2$. 通过简单地令 $n = 0$ 是 n 的一个可能的值把这个解包括在解族 (5) 中; 注意到 $\cos 0 = 1$. 由叠加原理, 得 (线性, 齐次)D.E. 和 B.C. 更一般的解

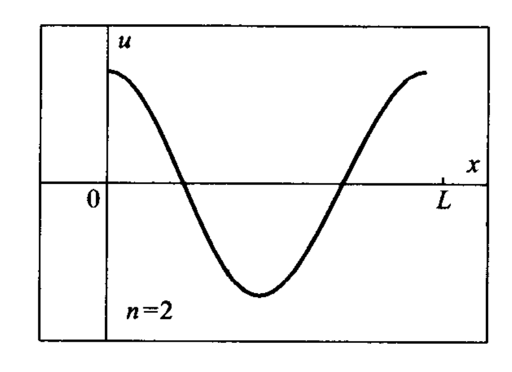
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-(n\pi/L)^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{6}$$

为了用这个解满足 I.C., 需要

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{7}$$

因此, 如 $f(x)$ 具有这种形式, 则问题 (2) 的解由 (6) 给出. 在第四章将证明, 任一 “合理的好” 函数 $f(x)$ 可在任意精度下被形如 (7) 的和来逼近. 以实用的术语来说, 那我们可简单地假设 $f(x)$ 具有这种形式, 因为 $f(x)$ 只在某种实验误差之内是可知的. □

注记 注意到乘积解 (5), 除了 $n=0$ 的情形, 当 $t\to\infty$ 时都趋于 0. 由于在指数中 n^2 的因子, (6) 中具有较大 n 值的那些项衰减得更迅速. 这是所预料的, 因为在热区域和冷区域之间的温度梯度 n 越大就越大, 如图 1 所示那样:



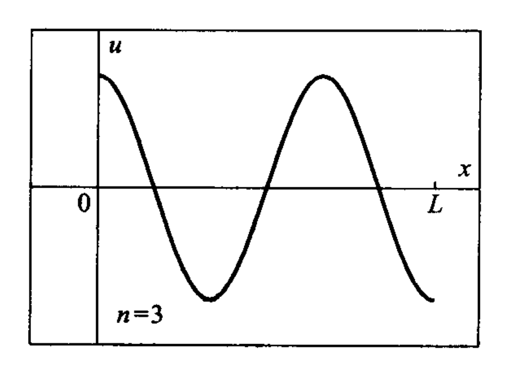


图 1

由 (6), 得

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=a_0. \tag{8}$$

换句话说, 绝热的杆温度分布最终趋于常数, 该常数是初始温度的平均 (由习题 2, 或是任一后面时刻). □

例 2 对适当的初始分布 $f(x)$, 求下面问题的解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\ 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned} \tag{9}$$

其中在端点 $x=0$ 是绝热的而在端点 $x=L$ 保持 0 度.

解 我们还是求 D.E 满足 B.C. 的乘积解. 在情形 1 (参看第 3.1 节的 (11)), 有例 1 的 (3) 和 (4), 如前, 由第一个 B.C., 得 $c_1=0$. 然而, 由第二个 B.C., 得

$$0=u(L,t)=e^{-\lambda^2kt}c_2\cos(\lambda L). \tag{10}$$

为避免取 $c_2=0$, 必须取 λ 满足 $\cos(\lambda L)=0$. 因 $\cos z=0$ 当且仅当 z 是 $\pi/2$ 奇数倍, 所以 (10) 只当

$$L\lambda=(2n+1)\frac{\pi}{2}\quad 或\quad \lambda=\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

(记住 $\lambda > 0$.) 可以验证在情形 2 和 3 时 (参看第 3.1 节的 (12) 和 (13)) 没有满足这里的 B.C. 的非零乘积解. 因此, 一个完全的乘积解族由下面给出

$$u_n(x,t) = d_n \exp\left[\frac{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 kt}{L^2}\right] \cos\left[\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right], \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

由叠加原理, 有更一般的解

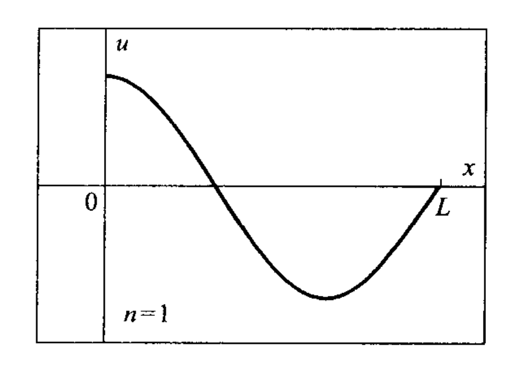
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} d_n \exp\left[\frac{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 kt}{L^2}\right] \cos\left[\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right], \tag{11}$$

当

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{N} d_n \cos\left[\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right] \tag{12}$$

时, 它是问题 (9) 的唯一解. □

注记 (11) 中所有的项当 $t \to \infty$ 时趋于零. 物理上的理由是热会经不绝热的端点 $x = L$ 传过. (11) 的第一项 ($n = 0$) 以与 $\exp(-\frac{1}{4}\pi^2 kt/L^2)$ 成比例的变化率衰减, 该衰减率比两端都保持 0 度情形 (参看第 3.1 节) 所对应的衰减率 $\exp(-\pi^2 kt/L^2)$ 要慢. 在第四章, 将证明: 任一 "适当好的" 函数 $f(x)$ 可任意接近地由形如 (12) 的和逼近. 另外, 存在支配 (9) 的解的最大值原理, 使得解不会由于近似初始温度分布而受到过度干扰 (参看习题 11). (11) 中的项的典型图像由图 2 所示. □



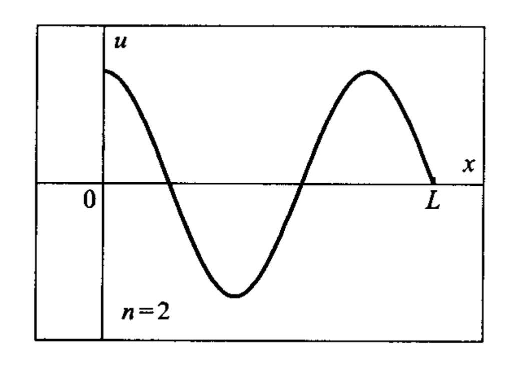


图 2

非齐次边界条件

在例 1 和例 2[或在方程 (1)] 中的 B.C. 是齐次的, 这种情况可用叠加原理来组成 D.E. 和 B.C. 更一般的解. 现我们致力于 B.C. 不都是齐次的情形, 但仍

然还是与时间无关的.

> 求解的方法是先求出 D.E. 和 B.C. 的一个特解, 然后 (该特解) 加上相应的具齐次 B.C. 问题的解.

前面已经用过这常规的想法. 这种方法用下面例子来阐明.

例 3 对任意的实常数 a 和 b 以及适当的函数 $g(x)$, 求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = a,\quad u(L,t) = b;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = g(x).\end{aligned} \tag{13}$$

解 先寻求 D.E. 和 B.C. 的特解 $u_p(x,t)$. 因为任一特解都行, 所以最好争取简单的. 一个情形 3 的乘积解 (参看第 3.1 节的 (13))$u_p(x,t) = cx + d$ 确实是特解, 如果选取 c 和 d 使得满足 B.C.:

$$a = u_p(0,t) = c \cdot 0 + d = d,$$

$$b = u_p(L,t) = cL + d = cL + a.$$

因此,$d = a$ 和 $c = (b-a)/L$, 以及

$$u_p(x,t) = \frac{(b-a)x}{L} + a, \tag{14}$$

即满足 D.E. 也满足 B.C.. 现考虑**相应的齐次问题**(即, 具齐次 D.E. 和齐次 B.C.)

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad v_t = kv_{xx},\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad v(0,t) = 0,\quad v(L,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad v(x,0) = g(x) - u_p(x,0).\end{aligned} \tag{15}$$

若 $g(x) - u_p(x,0)$ 具有 $\sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ 的形式, 则能解出这个问题, 得 (参看第 3.1 节的命题 1)

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-(n\pi/L)^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{16}$$

现令 $u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t)$. 容易验证 $u(x,t)$ 满足问题 (13). 的确, 由叠加原理, $u(x,t)$ 满足 D.E., 且有

$$\begin{aligned}&\text{B.C.}\begin{cases}u(0,t) = u_p(0,t) + v(0,t) = a + 0 = a,\\u(L,t) = u_p(L,t) + v(L,t) = b + 0 = b;\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = u_p(x,0) + v(x,0) = u_p(x,0) + g(x) - u_p(x,0) = g(x).\end{aligned} \tag{17}$$

注意到, 当组成相应的齐次问题 (15) 时, $g(x)$ 必须减去 $u_p(x,0)$. 不然的话在 (17) 中就不会消去 $u_p(x,0)$, 且 $u(x,0)=g(x)$ 将不成立. □

例 4 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\ 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=L;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=x+3\sin\tfrac{2\pi x}{L}.\end{aligned}\tag{18}$$

解 能求出 D.E. 和 B.C. 具有形式 $u_p(x,t)=cx+d$ 的特解. 由 B.C., 得 $0=u(0,t)=c\cdot 0+d=d$ 和 $L=u(L,t)=cL$. 因此, $d=0$, $c=1$ 以及 $u_p(x,t)=x$. 相应的齐次问题是

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad v_t=kv_{xx},\ 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad v(0,t)=0,\quad v(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad v(x,0)=x+3\sin\tfrac{2\pi x}{L}-x=3\sin\tfrac{2\pi x}{L},\end{aligned}\tag{19}$$

它的解是 $v(x,t)=3e^{-4\pi^2kt/L^2}\sin\frac{2\pi x}{L}$. 则问题 (18)[①]的解是

$$u(x,t)=u_p(x,t)+v(x,t)=x+3e^{-4\pi^2kt/L^2}\sin\frac{2\pi x}{L}.$$ □

注记 读者或许最好不要去死记公式 (14), 而应该考虑具有形式 $cx+d$ 的特解, 然后利用 B.C. 求出这些常数. 理由是该公式只可运用于 (13) 的 B.C., 对其他的 B.C., 我们得到其他的特解. 例如,

如 $u_x(0,t)=a$ 和 $u(L,t)=b$, 则 $u_p(x,t)=a(x-L)+b$. □

例 5 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=2u_{xx},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=1,\quad u(1,t)=-1;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=x+\cos^2\frac{3\pi x}{4}-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

解 来检验形如 $u_p(x,t)=cx+d$ 的特解. 由第一个 B.C., 得 $c=1$, 而由 $u_p(1,t)=1+d$, 据第二个 B.C., 得 $d=-2$. 于是, $u_p(x,t)=x-2$. 相应的齐次

①原文误为 (19).——译者

问题是

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad v_t = 2v_{xx},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad v_x(0,t) = 0,\quad v(1,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad v(x,0) = [x + \cos^2 \frac{3\pi x}{4} - \frac{5}{2}] - (x-2)\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}.
\end{aligned}$$

由例 2, 得 $v(x,t) = \frac{1}{2}e^{-9\pi^2 t/2}\cos\frac{3\pi x}{2}$, 于是

$$u(x,t) = x - 2 + \frac{1}{2}e^{-9\pi^2 t/2}\cos\frac{3\pi x}{2}.$$ □

注意到例 3, 例 4 和例 5 中的特解是不依赖时间的, 或以通常的专用术语, 是**稳态的**.

> 热方程 $u_t = ku_{xx}$ 的任一稳态解具有 $cx+d$ 的形式 (为什么?).

在例 3,例 4 和例 5 中, 解 $u(x,t) = u_p(x,t)+v(x,t)$ 是 D.E. 和 B.C. 的稳态特解与(相应的齐次问题的) 解 $v(x,t)$ 之和, $v(x,t)$ 是**瞬时的**, 当 $t\to\infty$ 时 $v(x,t)\to 0$. 因此, 在这些例子中, 当 $t\to\infty$ 时

$$u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t) \to u_p(x,t)$$

(即, 当 $t\to\infty$ 时, 解 u 趋于稳态解). 然而, 对某些类型的 B.C., 没有稳态特解, 如下例所揭示的.

例 6 对给定的实常数 a 和 b, 以及适当的函数 $f(x)$, 解下面问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = a,\quad u_x(L,t) = b;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x).
\end{aligned}\tag{20}$$

解 首先注意到 B.C. 表明在端点 $x=0$ 热以变化率 $u_x(0,t)=a$ 流出 (参看第 3.1 节的 (2), 这时 $KA=1$) 且在端点 $x=L$ 热以变化率 $u_x(L,t)=b$ 流入. 如 $b>a$, 则热能以常率加入杆中. (如 $b<a$, 则杆以常率损失热能.) 因此, 不能指望 D.E. 和 B.C. 的一个稳态解, 除非出现 $a=b$. 的确, 令 $u_p(x,t)=cx+d$, 则

B.C. 表明 $c=a$ 和 $c=b$, 除了 $a=b$, 这是不可能的. 下一个最简单的特解形式是

$$u_p(x,t)=ct+h(x), \tag{21}$$

其中 c 是常数, $h(x)$ 是 x 的函数, 这种特解反映这样的事实: 热能以常率变化. 常数 c 和函数 $h(x)$ 可由 D.E. 和 B.C. 确定. 的确, 计算表明

$$c=(u_p)_t=k(u_p)_{xx}=kh''(x)\ \Rightarrow h''(x)=\frac{c}{k}\ \Rightarrow h(x)=\frac{c}{2k}x^2+dx+e,$$

其中 d 和 e 是常数. 由 B.C. 得

$$\begin{cases} a=(u_p)_x(0,t)=h'(0)=d, \\ b=(u_p)_x(L,t)=h'(L)=\frac{cL}{k}+d. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=a, \\ c=\frac{(b-a)k}{L}. \end{cases}$$

于是, 得到下面 (20) 的 D.E. 和 B.C. 的特解 (为简单起见, 已取 $e=0$):

$$u_p(x,t)=\frac{b-a}{L}kt+\frac{b-a}{2L}x^2+ax=\frac{b-a}{L}(kt+\frac{1}{2}x^2)+ax. \tag{22}$$

相应的齐次问题是

$$\begin{aligned} &\text{D.E.}\quad v_t=kv_{xx},\ 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0; \\ &\text{B.C.}\quad v_x(0,t)=0,\quad v_x(L,t)=0; \\ &\text{I.C.}\quad v(x,0)=f(x)-u_p(x,0)=f(x)-\left(\frac{b-a}{2L}x^2+ax\right). \end{aligned}$$

如果 $f(x)-u_p(x,0)$ 具有形式 $\sum_{n=0}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$, 则得解

$$\begin{aligned} u(x,t)&=u_p(x,t)+v(x,t) \\ &=u_p(x,t)+\sum_{n=0}^{N}a_n e^{-(n\pi/L)^2kt}\cos\tfrac{n\pi x}{L}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $u_p(x,t)$ 由 (22) 给出. □

第三类边界条件

可以提出许多其他类型的边界条件. 例如, $u(0,t)-u_x(L,t)=1$, $u_x(0,t)-[u(0,t)]^2=0$ 或更一般地,

$$F(u(0,t),u(L,t),u_x(0,t),u_x(L,t))=0,$$

其中四个变量函数 F 可任意选取. 即使是局限在那些具有某些物理相关的边界条件, 这样的边界条件都多得我们没有时间和篇幅或耐心去处理. 然而, 我们将考虑另外一类 B.C., 这类 B.C. 具有重要的物理关联性, 即

$$\text{B.C. } u_x(0,t) - cu(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) + c'u(L,t) = 0, \tag{24}$$

其中 c 和 c' 是常数 (在应用中通常是正的). 注意到当 $c \to 0$, 第一个 B.C. 变成 $u_x(0,t) = 0$, 而当 $c \to \infty$, 得 $u(0,t) = 0$(对第二个 B.C. 类似). B.C.(24) 称为**第三类边界条件**. 像 $u(0,t) = 0$ 和 $u_x(0,t) = 0$ 这样的边界条件分别称为**第一类B.C.** 和**第二类B.C.**; 因此, 它们是第三类 B.C. 的极限情形. 本质上, 由于完全绝热和完全热接触 (例如, 通过外界介质保持一端在 0 度) 在实际中难以达到, 就产生了 B.C.(24). 为了更确切地理解这种情况, 来考虑端点 $x = 0$ 附近的图 (参看图 3):

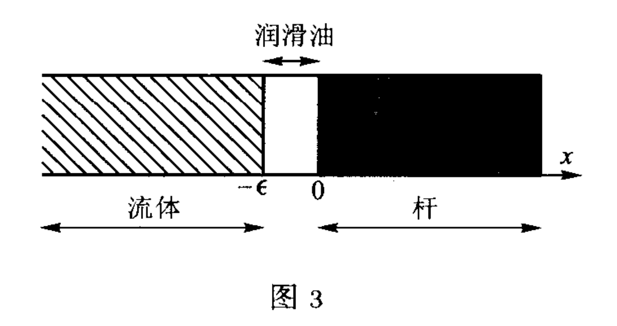


图 3

区域 $x < -\epsilon$ 由某种流动良好且保持 0 度的流体占据, 而小区域 $-\epsilon \leqslant x \leqslant 0$ 由某种中间物质 (比如润滑油, 氧化物或不完全绝热物) 占据. 假设这个物质与杆和流体处于完全热接触, 使得 $u(x,t)$ 在接合点 $x = -\epsilon$ 和 $x = 0$ 处连续. 为了穿过 $x = 0$ 处的热能流量用 $x = 0$ 的两边来度量是相同的, 温度梯度必须服从一个跳跃, 使得

$$k_1 u_x(0^-,t) = k u_x(0^+,t), \tag{25}$$

其中 k_1 是中间物质的扩散常数 (k 是杆的扩散常数). 由于假设经由 $x = -\epsilon$ 损失的热立刻就被流动的流体带走, 有 $u(-\epsilon,t) = 0$. 如 $u(0,t)$ 是常数, 则最终在 $[-\epsilon, 0]$ 导致稳态的温度分布. 的确, 瞬时的项以 $\exp(-\pi^2 k_1 t/\epsilon^2)$ 衰减. 如果 ϵ 小, 使得 $k_1\pi^2/\epsilon^2 \gg 1$ 这种衰减就特别迅速. 如 $u(0,t)$ 不是常数, 但变化得相当慢, 则仍然可认为解在区间 $[-\epsilon, 0]$ 将会相当接近一个线性 (稳态) 分布, 即, 当 $k_1\pi^2/\epsilon^2 \gg 1$ 时,

$$u(x,t) \approx \frac{x+\epsilon}{\epsilon} u(0,t), \quad -\epsilon < x \leqslant 0.$$

则 $u_x(0^-,t)\approx\frac{1}{\epsilon}u(0,t)$, 且由 (25), 得 (在有效的近似下)

$$u_x(0^+,t)-\frac{1}{\epsilon}(\frac{k_1}{k})u(0,t)=0, \tag{26}$$

这是 (24) 的第一个 B.C., 其中 $c=\frac{1}{\epsilon}(k_1/k)$. 如 $\frac{1}{\epsilon}(k_1/k)$ 是小量 (比如由于与 k_1 比较, k 是大量), 则在杆的端点 $x=0$ 处的行为犹如是绝热的. 如 $\frac{1}{\epsilon}(k_1/k)$ 是大量, 则在杆和流体之间存在封闭的热接触 (即, $u(0,t)\approx 0$, 其中 0 度是流体的温度). 在另一端点 $x=L$, 施行类似的分析. 于是

$$u_x(L^-,t)+\frac{1}{\epsilon}(\frac{k_1}{k})u(L,t)=0, \tag{27}$$

由于导数改变符号. 当然, 在端点 $x=L$ 处 k_1 和 ϵ 可能不同, 于是在 (24) 中的 c' 和 c 不必相等, 但在这种物理意义下 c 和 c' 确实是正的. 对于 B.C.(24), 要求出具情形 1 乘积解 (参看第 3.1 节的 (11)) 的 λ 不总是容易的. 在习题中, 要求读者去验证 λ(这里 $\lambda>0$) 须满足

$$(cc'-\lambda^2)\sin(\lambda L)+(c+c')\lambda\cos(\lambda L)=0. \tag{28}$$

假设 c 和 c' 非负. 首先注意到 $\lambda=\sqrt{cc'}>0$ 是 (28) 的解当且仅当 $\cos(\sqrt{cc'}\cdot L)=0$ (即,$\sqrt{cc'}=(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}$, 对某个 $n=1,2,3,\cdots$). 如果一个解 λ 不是这种形式, 则 $(cc'-\lambda^2)\cos(\lambda L)\neq 0$, 然后用它除 (28) 的两边, 得

$$\tan(\lambda L)=\frac{(c+c')\lambda}{\lambda^2-cc'}. \tag{29}$$

这个方程的 (正) 解 λ 可粗略地由出现在 (29) 两边 λ 的函数的图像的交点确定. 如 $\tan(\lambda L)=\infty$(即, $\cos(\lambda L)=0$) 和 $\lambda=\sqrt{cc'}$, 那么这个例外的解也必须包括进去. 实际上, 这只不过是 (29) 两边的函数图像趋向一条公共的垂直渐进线的情形 (即, 它们 "相交" 于 ∞). 例如, 如 $c=c'=\pi/2$ 以及 $L=1$, 则 $\tan\lambda$ 和 $\pi\lambda/(\lambda^2-\frac{1}{4}\pi^2)$ 的图像如图 4 所示.

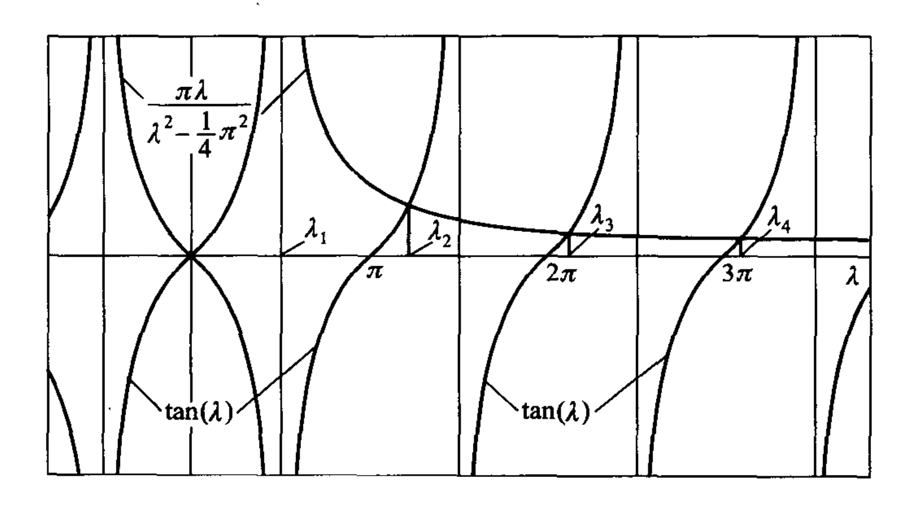


图 4

其中, $\lambda_1 = \pi/2$ 对应交点在无穷远处. 在 $\lambda = 0$ 处的交点未考虑, 因为已假设 $\lambda > 0$.

注记　大家可想象一下 c 或 c' 为负的物理情形. 例如, 考虑一根浸没在一介质中的杆, 在该介质中有一生成热的化学 (或原子核) 反应, 以与附近温度成比例的变化率产生热. 则可能发生介质靠近杆的热的端点那部分实际上会生成热流, 以与该端的温度呈正比的变化率进入杆. 在这种情形, 很可能有随时间是指数增长的情形 2 的乘积解, 可能导致熔化或爆炸 (参看习题 9, (c) 和 (d) 部分). □

概要 3.3

1. 绝热端点:　条件 $u_x(0,t) = 0$ 表示在杆的端点 $x = 0$ 没有热流入. 即, 该端点是绝热的. 如杆的每个端点或是绝热或是保持 0 度, 则有四组可能的 (齐次) 边界条件 (参看例 1 和例 2):

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{(b}'\text{)}\quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)}\quad \begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) = 0. \end{cases}$$

2. 非齐次B.C.:　对形式 $u(0,t) = a$(或 $u_x(0,t) = a$) 和 $u(L,t) = b$(或 $u_x(L,t) = b$) 的 B.C., 其中 a 和 b 是常数, 可用下面的方法. 首先, 求出 D.E. 和

B.C. 一个特解 $u_p(x,t)$. 然后所要求的解是

$$u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t),$$

其中 $v(x,t)$ 是相应的具齐次 B.C. 和修正过由 $v(x,0) = u(x,0) - u_p(x,t)$ 给出的 I.C. 的问题的解. 作为说明, 可见例 3, 例 4, 例 5 和例 6.

对于上述形式的 B.C., 除了 $u_x(0,t) = a$ 和 $u_x(L,t) = b$ 的情形, D.E. $u_t = ku_{xx}$ 和 B.C. 将有形如 $u_p(x,t) = cx + d$ 的特解, 其中 c 和 d 是常数. 则当 $t \to \infty$ 时, 解 $u(x,t)$ 将趋于该稳态 (即, 与时间无关) 解, 因 $v(x,t) \to 0$. 当 $u_x(0,t) = a$ 和 $u_x(L,t) = b$, 且 $a \neq b$ 时, D.E. 和 B.C. 没有稳态的特解, 而是如下的

$$u_p(x,t) = \frac{b-a}{L}(kt + \frac{1}{2}x^2) + ax,$$

它关于时间 t 以常率变化. 这是由于热经由端点非零的净流入或流出 (参看例 6).

3. 第三类 B.C.: 在许多不同类型的 B.C. 中, 第三类边界条件, 即

$$u_x(0,t) - cu(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) + c'u(L,t) = 0$$

在物理应用中是重要的, 其中 c 和 c' 是正常数. D.E. 和 B.C. 有非平凡的乘积解的 λ 值的确定不总是容易的. λ 的近似值可由作图或用数值计算获得.

练习 3.3

1. 证明: 对 (2) 的 D.E. 和 B.C., 没有具形式 $e^{k\lambda^2 t}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$(即, 在第 3.1 节中情形 2 的乘积解 (12)) 的非零的乘积解.

2. (a) 仅通过积分证明例 1 的解 (6) 具有性质: 对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)dx = a_0. \tag{*}$$

这个性质对于杆中的热能说明了什么?

(b) 不用解 (6), 对 $\frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)dx$ 在积分号下关于 t 求导, 利用热方程, 微积分基本定理以及 B.C. 来证明 (a) 部分 (*) 中的积分是与 t 无关的常数.

3. (a) 求出下面问题的 D.E. 和 B.C. 的所有乘积解

D.E. $u_t = ku_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \ t \geqslant 0;$

B.C. $u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0;$

I.C. $u(x,0) = f(x).$

(b) 如 $f(x)=\sum_{n=0}^{N}c_n\sin[\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}]$, $N\geqslant 0$ 为某个整数, 求解该问题.

4. 利用习题 3 求解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=-1,\quad u_x(1,t)=1;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=x+\sin\frac{3\pi x}{2}-1.\end{aligned}$$

5. 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=5u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant 10,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=2,\quad u_x(10,t)=3;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=\frac{1}{20}x^2+2x+\cos(\pi x).\end{aligned}$$

6. 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=a,\quad u_x(L,t)=b;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=bx+a.\end{aligned}$$

7. 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=2,\quad u(\pi,t)=4;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=4-2\pi+2x+7\cos\frac{3x}{2}.\end{aligned}$$

8. 为使初边值问题 (20)(具 B.C. $u_x(0,t)=a$ 和 $u_x(L,t)=b$) 的解 $u(x,t)$(如果存在) 具有性质: $\int_0^L u(x,t)dx$ 与 t 无关, 常数 a 和 b 的必要条件是什么? 为什么?

提示 证明 $\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)dx=k(b-a)$(参看习题 2(b)).

9. 考虑问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)-cu(0,t)=0,\quad u_x(L,t)+c'u(L,t)=0,\end{aligned}$$

其中假设 $c,\ c'\geqslant 0$, 这是物理上有关联的情形.

(a) 证明 D.E. 和 B.C. 的情形 1(参看第 3.1 节的 (11)) 乘积解必为如下形式

$$u_n(x,t)=a_ne^{-\lambda_n kt}\left(\cos(\lambda_n x)+\frac{c}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)\right),$$

其中 λ_n 是方程

$$(cc' - \lambda^2)\sin(\lambda L) + (c + c')\lambda\cos(\lambda L) = 0 \quad (\text{参看}(28))$$

的第 n 个正根.

(b) 证明 D.E. 和 B.C. 没有情形 2(参看第 3.1 节的 (12)) 的解并且只当 $c = c' = 0$ 时有情形 3(参看第 3.1 节的 (13)) 的乘积解.

提示 证明在这种情形 λ 必满足 $\lambda(c + c')\cosh(\lambda L) + (\lambda^2 + cc')\sinh(\lambda L) = 0$.

(c) 假设 $c < 0, c' < 0$. 证明此时的 D.E. 和 B.C. 至少存在一个非零的情形 2 乘积解. 不需要实际求出此解显式.

(d) 现假设 $c < 0$ 和 $c' \geqslant 0$. 证明: 若 $c + c' < 0$, 则确实有非零的情形 2 乘积解. 若 $c + c' > 0$, 则有非零的情形 2 乘积解当且仅当 $L > -(c + c')/(cc')$. 当 $c' = -c$ 时, 求出所有的情形 2 乘积解.

10. 对固定的常数 $c > 0$, B.C. $u_x(0^+, t) - cu(0, t) = 0$ 可通过在端点 $x = 0$ 处注入一层厚度为 ϵ, 热传导率为 k_1 的物质近似达到, 这些常数的选取满足 $\frac{1}{\epsilon}(k_1/k) = c$ (参看 (26)). 解释为什么这种近似当 $\epsilon \to 0$ (于是 $k_1 = kc\epsilon \to 0$) 时将变得越来越精确.

提示 考虑在 $[-\epsilon, 0]$ 上的温度分布, $u(\epsilon, 0) \equiv 0$ 以及 $u(0, t)$ 几乎是常数, 是如何迅速地趋于一个稳态分布. 注意到 $-k_1\pi^2/\epsilon^2 = -ck\pi^2/\epsilon$.

11. 对于在杆的一端是绝热的而另一端具有指定温度的情形, 证明下面的最大值原理.

设 $u(x, t)$ 是下面问题的 C^2 解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.} \quad u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = b(t);\\
&\text{I.C.} \quad u(x, 0) = f(x).
\end{aligned}$$

则对于

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant L}\{f(x)\} \quad \text{和} \quad B = \max_{0 \leqslant t \leqslant T}\{b(t)\},$$

有

$$u(x, t) \leqslant \max\{M, B\},\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

提示 修改在第 3.2 节的末尾广义最大值原理的证明. 利用这样的事实: 若 $v(x, t)$ 在 $(0, t_0)$ 处有最大值, 则由 B.C. $v_x(0, t_0) = 0$, 得 $v_{xx}(0, t_0) \leqslant 0$ (为什么?).

注记 这个结果导出最小值原理以及一个解关于 $f(x)$ 和 $b(t)$ 变化的连续性的定理, 犹如第 3.2 节的定理 3 那样. □

12. (a) 为了证明习题 9 中 (具有第三类 B.C.) 的初边值问题解的唯一性, 仿效第 3.2 节的定理 1 的证明. 解释为什么这个证明失效, 如果不假设 $c > 0$ 和 $c' > 0$ 的话. (然而, 唯

一性可由其他方法得到.)

(b) 证明: 在 (a) 部分, 当 $c>0$ 和 $c'>0$ 时, 初边值问题的解 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 时取到最大值, 如果假设在 $[0,L]$ 中的某个 x, $u(x,0)\geqslant 0$. 给出似乎合理的论证或一个明确的例子来说明如果去掉这个假设的话, 该结论不真.

(c) 当 $c=1$ 和 $c'=-1$ 时, 说明 (用一个明确的例子) 最大温度不必在 $t=0$ 时发生, 即使对 $[0,L]$ 中所有的 x, 有 $u(x,0)>0$ (即, (b) 部分的最大值原理在这种情形不成立).

提示 求出一个情形 2 的乘积解.

§3.4 依赖时间的边界条件和非齐次热方程的 Duhamel 原理

已经证明 (参看第 3.2 节的定理 1) 下面问题至多只有一个 C^2 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=a(t),\quad u(L,t)=b(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).\end{aligned}\tag{1}$$

在第 3.3 节, 当 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是常值函数 (与 t 无关) 以及 $f(x)$ 具有适当形式, 即

$$f(x)=u_p(x,0)+\sum_{n=1}^{N}b_n\sin\frac{n\pi x}{L},\quad u_p(x,0)=(b-a)\frac{x}{L}+a$$

时, 求得了这个问题的解. 就像在 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是常数那样, 可求出满足 (1) 的 B.C. 的形如 $c(t)x+d(t)$ 的函数. 的确, 由 B.C., 得 $a(t)=c(t)0+d(t)=d(t)$ 和 $b(t)=c(t)L+d(t)$, 因此, $d(t)=a(t)$ 和 $c(t)=(b(t)-a(t))/L$. 则由

$$w(x,t)=(b(t)-a(t))\frac{x}{L}+a(t)\tag{2}$$

定义的函数 $w(x,t)$ 满足 (1) 的 B.C.. 然而, $w(x,t)$ 不满足 D.E., 除非 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是常数. 的确,

$$w_t-kw_{xx}=(b'(t)-a'(t))\frac{x}{L}+a'(t).\tag{3}$$

由于这个缘故, 写成 $w(x,t)$ 而不写 $u_p(x,t)$, 后者表示 D.E. 以及 B.C. 的一个特解. 我们仍然可尝试去寻求问题 (1) 具形式 $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ 的解. 函数 $v(x,t)$ 须满足下面相应的具齐次 B.C., 但非齐次 D.E. 问题:

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad v_t - kv_{xx} = -(b'(t) - a'(t))\tfrac{x}{L} - a'(t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0 \\
&\text{B.C.} \quad v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0 \\
&\text{I.C.} \quad v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - (a(0) - b(0))\tfrac{x}{L} - a(0).
\end{aligned} \tag{4}$$

确实, $v = u - w$, 所以由 (3), $v_t - kv_{xx} = u_t - ku_{xx} - (w_t - kw_{xx}) = -(w_t - kw_{xx}) = -(b'(t) - a'(t))x/L - a'(t)$. 而且,$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = a(t) - a(t) = 0$ 和 $v(L,t) = b(t) - b(t) = 0$. 当 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是常数时, 这时的 D.E. 齐次的, 则问题 (4) 是熟悉的. 然而, 一般而言, 我们似乎仅仅把问题 (1) 转化为另一个问题 (4), 也许是个同样困难的问题. 注意到 (4) 是下面一般问题的特殊情形

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad v_t - kv_{xx} = h(x,t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0; \\
&\text{B.C.} \quad v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0; \\
&\text{I.C.} \quad v(x,0) = g(x).
\end{aligned} \tag{5}$$

如果知道如何去求解问题 (5), 那就能求解 (4) 并得到 (1) 的解 $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$. 幸运的是对适当的 $h(x,t)$ 和 $f(x)$ 有求解 (5) 的方法. 这个方法由法国数学家和物理学家 Jean-Marie-Constant Duhamel(1797—1872) 所发现, 他在 1833 年发表了他的解法. 可以对 (5) 做更进一步的简化. 假设 u_1 和 u_2 分别是下列问题的解:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \text{D.E.} \quad (u_1)_t - k(u_1)_{xx} = 0; & \text{(b)} & \text{D.E.} \quad (u_2)_t - k(u_2)_{xx} = h(x,t); \\
& \text{B.C.} \quad \begin{cases} u_1(0,t) = 0, \\ u_1(L,t) = 0; \end{cases} & & \text{B.C.} \quad \begin{cases} u_2(0,t) = 0, \\ u_2(L,t) = 0; \end{cases} \\
& \text{I.C.} \quad u_1(x,0) = g(x). & & \text{I.C.} \quad u_2(x,0) = 0.
\end{array} \tag{6}$$

则读者可容易验证 $v(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ 满足 (5). 关于 u_1 的问题是熟知的, 因此剩下唯一不熟悉的问题是关于 u_2 的具有齐次 B.C. 和 I.C., 但具非齐次

D.E. 的问题. 总结到目前为止所获得的, 我们有

命题 1 问题 (1) 的解由

$$u(x,t) = w(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

给出, 其中 $w(x,t)$ 是 B.C. 的特解 (2), 而 $u_1(x,t)$ 满足 $g(x) = f(x) - w(x,0)$ 的 (6a) 以及 $u_2(x,t)$ 满足 $h(x,t) = -(w_t - kw_{xx}) = -(b'(t) - a'(t))\frac{x}{L} - a'(t)$ 的 (6b).

包含在命题 1 的分解过程对其他热能流在一个端点或两个端点指定的标准问题仍适用, 如同下面举例说明的.

例 1 把问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t) = a(t), \quad u_x(L,t) = b(t); \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x). \end{aligned} \tag{7}$$

分解成下面形式的问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad (u_2)_t - k(u_2)_{xx} = h(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad u_2(0,t) = 0, \quad (u_2)_x(L,t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad u_2(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

解 注意到 $w(x,t) = b(t)x + a(t)$ 满足 (7) 的 B.C.. 令 $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, 有 $v_t - kv_{xx} = u_t - ku_{xx} - (w_t - kw_{xx}) = -b'(t)x - a'(t)$, 则关于 v 的相应的齐次问题是

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad v_t - kv_{xx} = -b'(t)x - a'(t), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad v(0,t) = 0, \quad v_x(L,t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad v(x,0) = f(x) - w(x,0) = f(x) - b(0)x - a(0). \end{aligned} \tag{9}$$

则 $v = u_1 + u_2$, 其中 u_1 满足熟知的问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad (u_1)_t - k(u_1)_{xx} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad u_1(0,t) = 0, \quad (u_1)_x(L,t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad u_1(x,0) = f(x) - b(0)x - a(0). \end{aligned}$$

而 u_2 满足 $h(x,t) = -b'(t)x - a'(t)$ 的 (8). □

Duhamel方法—— 物理背景

现在来引导出用于解答下面问题的 Duhamel 方法, 该问题是在求解 (1) 中产生的主要障碍(参看 (6)(b)):

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t - ku_{xx} = h(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0;\\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

注记 在 (10) 中的非齐次热方程有一个简单的物理解释. 为此, 考虑在第 3.1 节中的热方程推导. 以 CDA (关于它们的定义, 参看第 3.1 节)乘 D.E., 然后在 $[0,L]$ 中的任一子区间 $[a,b]$ 上积分, 得

$$\int_a^b CDA(u_t - ku_{xx})dx = \int_a^b CDA \cdot h(x,t)dx. \tag{11}$$

在热方程的推导中, (11) 的左边是杆在 $[a,b]$ 部分获得的热能的变化率减去通过截面 $x=a$ 和 $x=b$ 的热流净变化率. 在没有任何内在热源 (例如, 化学反应, 电流, 等等) 的情形下, 则 (11) 的左边是 0. 然而, 若有内在热源, 每单位时间在 $[x, x+\triangle x]$ 上产生的热量是 $CDA \cdot h(x,t)\triangle x$, 则 (11) 的右边是由该内在热源在 $[a,b]$ 上产生的热能变化率, 所以有方程 (11). 因 $[a,b]$ 是 $[0,L]$ 中的任意子区间, 则 (11) 中的被积函数必相等, 于是得到 D.E. $u_t - ku_{xx} = h(x,t)$, 其中 $h(x,t)$ 与在时刻 t 的内在热源密度成比例. □

现假设从 $t = -\triangle s$ 到 $t = 0$ 这样一个短暂时间间隔中, 当开启热源 $h(x,0)$ 时杆的温度是 0 度, 然后关闭热源. 在 $t = 0$ 杆中的温度分布将非常接近 $h(s,0)\triangle s$(即, 若 $\triangle s$ 是小量, 则只有小量的热流入). 则在后面时刻 $t \geqslant 0$ 的温度将 $\approx v(x,t)\triangle s$, 其中 $v(x,t)$ 满足问题

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad v_t = kv_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.} \quad v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0;\\
&\text{I.C.} \quad v(x,0) = h(x,0).
\end{aligned}
$$

(注意到 $v(x,t)\triangle s$ 满足该问题, 且具初始温度 $h(x,0)\triangle s$, 因 $\triangle s$ 是常数且问题是线性的.) 更一般地, 如果热源是在时刻 $t = s - \triangle s$ 开启, 在时刻 $t = s$ 关闭,

则该热源对在时间 $t \geqslant s$ 的温度的效应是非常接近 $v(x,t;s)\triangle s$, 其中 s 是固定的参数, $v(x,t;s)$ 满足

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad v_t = kv_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant s; \\ &\text{B.C.} \quad v(0,t;s) = 0, \quad v(L,t;s) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad v(x,s;s) = h(x,s). \end{aligned} \tag{12}$$

则所有这些热源作用在时刻 t 对温度的总效果, 是在 t 之前所有热源作用的积分 (连续叠加), 即

$$\int_0^t v(x,t;s)ds.$$

换言之, 根据物理推理, 得出猜测:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)ds \tag{13}$$

将是 (10) 的解, 只要 $v(x,t;s)$ 是具齐次 D.E. 和 B.C. 的问题 (12) 的解. 后面将证明在某些假设下,(13) 确实是 (10) 的解. 但首先注意到问题 (12) 不是完全熟悉的, 因为初始条件是给在 $t=s$, 而不是给在 $t=0$. 通过求解下面相关的带有在 $t=0$ 的 I.C. 问题, 能容易处理这个困难.

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \tilde{v}_t = k\tilde{v}_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad \tilde{v}(0,t;s) = 0, \quad \tilde{v}(L,t;s) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad \tilde{v}(x,0;s) = h(x,s). \end{aligned} \tag{14}$$

然后验证

$$v(x,t;s) = \tilde{v}(x,t-s;s)$$

满足 (12). 换句话说, 为了得到在 $t=0$ 的 I.C. 来代替 $t=s$ 的 I.C., 只对时间施行了平移. 的确, 大家可以忘记 (12), 用 $\tilde{v}$ 把 (13) 写成下式:

$$u(x,t) = \int_0^t \tilde{v}(x,t-s;s)ds. \tag{15}$$

于是, 问题 (10) 假设性的解 $u(x,t)$ 可通过求解熟知的问题 (14) 和施行积分 (15) 获得. 注意到 (10) 中的棘手的源项 $h(x,t)$, 在问题 (12) 中已经被转移成一个 "无害" 的初始条件. 这就是 Duhamel 方法的精髓, 热源能转化成相应问题的初始条件这样的一般想法称为 **Duhamel原理**. 在给出 Duhamel 原理的数学表述及证明之前, 先考虑一个例子.

例 2 求解下面具有热源分布 $h(x,t)=t\sin x$ 的问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t-ku_{xx}=t\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0.\end{aligned}\tag{16}$$

解 解相应的问题 (14)

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad \tilde{v}_t=k\tilde{v}_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad \tilde{v}(0,t;s)=0,\quad \tilde{v}(\pi,t;s)=0;\\&\text{I.C.}\quad \tilde{v}(x,0;s)=h(x,s)=s\sin x.\end{aligned}$$

这里, s 作为常数对待, 所以易得 $\tilde{v}(x,t;s)=se^{-kt}\sin x$. 根据 (15),(16) 的解是

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\tilde{v}(x,t-s;s)ds=\int_0^t se^{-k(t-s)}\sin x ds\\&=e^{-kt}\sin x\int_0^t se^{ks}ds=(k^{-1}t+k^{-2}(e^{-kt}-1))\sin x.\end{aligned}$$

这是正确的解, 因可直接验证. □

例 3 求解下面问题, 其中热源分布是 $e^{-ct}\sin x$, c 是任意常数. 当 $c\approx 1$ 时会有有趣的事发生吗?

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t-u_{xx}=e^{ct}\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\ t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0.\end{aligned}$$

解 对 $h(x,s)=e^{-ct}\sin x$ 解问题 (14), 得 $\tilde{v}(x,t;s)=e^{-cs}e^{-t}\sin x$. 则由 (15), 得解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\tilde{v}(x,t-s;s)ds=\int_0^t e^{-t}e^{(1-c)s}\sin x ds\\&=\begin{cases}\frac{1}{1-c}(e^{-ct}-e^{-t})\sin x, & c\neq 1,\\ te^{-t}\sin x, & c=1.\end{cases}\end{aligned}$$

当 $t \to \infty$, 有近似行为:

$$u(x,t) \approx \begin{cases} \frac{1}{1-c}e^{-ct}\sin x, & c<1, \\ te^{-t}\sin x, & c=1, \\ \frac{1}{c-1}e^{-t}\sin x, & c>1. \end{cases}$$

当 c 经过 1 时 $u(x,t)$ 的行为会出现质的变化. □

Duhamel 原理的证明

在 Duhamel 原理 (见下面的定理 1) 的严格叙述的证明中, 将用到下面有关对积分的一个积分限作为变量的求导的结果, 且这个变量也是被积函数的一个变量 (参看附录 3).

引理 1 假设 $g(t,s)$ 和 $g_t(t,s)$ 是连续函数. 则

$$\frac{d}{dt}(\int_0^t g(t,s)ds) = g(t,t) + \int_0^t g_t(t,s)ds. \tag{17}$$

证明 设 $H(t,y)$ 由下式定义

$$H(t,y) = \int_0^y g(t,s)ds.$$

来计算 $\frac{d}{dt}H(t,t)$, 因这就是 (17) 的左边. 令 $y(t)=t$, 并注意到

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}H(t,t) &= \tfrac{d}{dt}H(t,y(t)) = H_t(t,t)\tfrac{dt}{dt} + H_y(t,y(t))\tfrac{dy}{dt} \\ &= H_t(t,t) + H_y(t,t). \end{aligned} \tag{18}$$

由 Leibniz 法则 (参看附录 3), 有 $H_t(t,y) = \int_0^y g_t(t,s)ds$. 还有, $H_y(t,y) = g(t,y)$, 因为对上限求导等于被积函数在上限取值 [即, $\frac{d}{dx}\int_0^x f(s)ds = f(x)$]. 于是, $H_y(t,t) = g(t,t)$, $H_t(t,t) = \int_0^t g_t(t,s)ds$, 则由 (18) 得到 (17). □

定理 1 (Duhamel 原理) 假设 $h(x,t)$ 是给定的 C^2 函数, $0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0$. 假设对每个 $s \geqslant 0$, 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad v_t = kv_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant s; \\ &\text{B.C.} \quad v(0,t;s) = 0, \quad v(L,t;s) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad v(x,s;s) = h(x,s). \end{aligned} \tag{19}$$

有 C^2 解 $v(x,t;s)$, 其中 $v(x,t;s)$, $v_t(x,t;s)$ 和 $v_{xx}(x,t;s)$ 关于 s(与 (x,t) 联合) 也是连续的. 则问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t - ku_{xx} = h(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant s; \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

的唯一解由下式给出

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)ds, \tag{21}$$

或等价地, 由 (15) 给出, 其中 $\tilde{v}$ $[v(x,t;s) = \tilde{v}(x,t-s;s)]$ 满足 (14).

证明 由 (21) 定义的函数 $u(x,t)$ 满足 I.C. $u(x,0) = 0$. 它还满足 (20) 的 B.C., 因为 $v(x,t;s)$ 满足 (19) 的 B.C.. 现对 $g(t,s) = v(x,t;s)$ 应用引理 1, 其中 x 固定. 则由 (17), 得

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= v(x,t;t) + \int_0^t v_t(x,t;s)ds \\ &= h(x,t) + \int_0^t kv_{xx}(x,t;s)ds, \end{aligned} \tag{22}$$

其中已经对 $s = t$ 利用了 (19) 的 I.C. 和 (19) 的 D.E.. 如对 (22) 最后的积分运用 Leibniz 法则, 则由 (21) 得 $u_t(x,t) = h(x,t) + ku_{xx}(x,t)$. 由关于 $v(x,t;s)$ 的假设, 得知 (21) 中的 $u(x,t)$ 是 C^2 的 (再由 Leibniz 法则). 有关唯一性, 见习题 10. □

注记 目前我们只知道当函数 $h(x,t)$ 具有下面形式时如何去求解问题 (20) (或 (14))

$$h(x,t) = \sum_{n=0}^{N} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{23}$$

另一方面, 命题 1 中的函数 $h(x,t)$ 由下面给出

$$h(x,t) = -(b'(t) - a'(t))\frac{x}{L} - a'(t), \tag{24}$$

它不具有 (23) 形式. 的确, (24)[①]只在 $a'(t) = b'(t) = 0$ 时 (即, 只在 $a(t)$ 和 $b(t)$ 为常数时) 才在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处为零. 因此, 似乎我们还无法求解问题 (1), 除非 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是常数, 而这种情形已经在第 3.3 节中考虑过. 即使试图把 (24) 中的 $h(x,t)$ 用它的 "Fourier 正弦级数"(包含在第四章) 来表示, 在端点处的困难仍然保留的. 然而, 这种级数表示可以证明得到关于 $0 < x < L$, $t > 0$ 物理上的修正解, 且当 $x \to 0^+$, $x \to L^-$ 和 $t \to 0^+$ 时, 对于适当的好函数 $a(t)$, $b(t)$ 和 $f(x)$, 该解有修正极限值. 为了避免无穷级数解的困难, 人为设计了下面的例子. 的确, 我们加上源, 经转化成相应的具齐次 B.C. 问题后抵消了 (24). 在第四章, 将考虑未经人为设计的问题的形式 Fourier 级数解. □

例 4 求解问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t - ku_{xx} = t(\sin(2\pi x) + 2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = t^2; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = 1 + \sin(3\pi x) - x. \end{aligned} \tag{25}$$

解 满足 B.C. 的一个简单函数是 $w(x,t) = (t^2 - 1)x + 1$. 则 $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, 其中 $v(x,t)$ 满足下面相应的问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad v_t - kv_{xx} = u_t - ku_{xx} - (w_t - kw_{xx}) = t\sin(2\pi x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = 0, \quad v(1,t) = u(1,t) - w(1,t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \sin(3\pi x). \end{aligned}$$

现记 $v = u_1 + u_2$, 其中 u_1 和 u_2 分别满足

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad (u_1)_t - k(u_1)_{xx} = 0; &&\text{D.E.} \quad (u_2)_t - k(u_2)_{xx} = t\sin(2\pi x) \\ &\text{B.C.} \quad u_1(0,t) = 0, \quad u_1(1,t) = 0; &&\text{B.C.} \quad u_2(0,t) = 0, \quad u_2(1,t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad u_1(x,0) = \sin(3\pi x). &&\text{I.C.} \quad u_2(x,0) = 0. \end{aligned}$$

可知 $u_1(x,t) = e^{-9\pi^2 kt}\sin(3\pi x)$ (参看第 3.1 节). 函数 u_2 可由 Duhamel 原理求

[①] 原文误为 (23).——译者

得. 的确, $u_2(x,t)=\int_0^t \tilde{v}(x,t-s;s)ds$, 其中 $\tilde{v}$ 满足下面问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad \tilde{v}_t-k\tilde{v}_{xx}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad \tilde{v}(0,t;s)=0,\quad \tilde{v}(1,t;s)=0;\\
&\text{I.C.}\quad \tilde{v}(x,0;s)=s\sin(2\pi x).
\end{aligned}$$

我们知道 $\tilde{v}(x,t;s)=se^{-4\pi^2kt}\sin(2\pi x)$, 所以

$$\begin{aligned}
u_2(x,t)\ &=\int_0^t se^{-4\pi^2k(t-s)}\sin(2\pi x)ds=e^{-4\pi^2kt}\sin(2\pi x)\int_0^t se^{4\pi^2ks}ds\\
&=(4\pi^2k)^{-2}(4\pi^2kt+e^{-4\pi^2kt}-1)\sin(2\pi x).
\end{aligned}$$

则 (25) 的解由 $u(x,t)=w(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)$ 给出. □

其他边界条件的 Duhamel 原理

Duhamel 原理也可用于 D.E. $u_t-ku_{xx}=h(x,t)$ 和下面三种形式的齐次 B.C. 的问题

$$\begin{cases}u_x(0,t)=0,\\ u(L,t)=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}u(0,t)=0,\\ u_x(L,t)=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}u_x(0,t)=0,\\ u_x(L,t)=0.\end{cases}$$

唯一的区别是函数 $\tilde{v}$ (或 v) 满足相应的 B.C.. 则 Duhamel 原理的证明就像标准情形那样进行. 下面以例子来阐述这些 B.C. 的 Duhamel 原理.

例 5 求解问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t-8u_{xx}=\cos t+e^t\sin\tfrac{x}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\ t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=\sin t,\quad u_x(\pi,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0.
\end{aligned}\tag{26}$$

解 注意到 $w(x,t)=\sin t$ 满足 B.C.. 令 $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$, 得相应的问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad v_t-8v_{xx}=u_t-8u_{xx}-(w_t-8w_{xx})=e^t\sin\tfrac{x}{2};\\
&\text{B.C.}\quad v(0,t)=0,\quad v_x(\pi,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad v(x,0)=0.
\end{aligned}\tag{27}$$

根据 Duhamel 原理能解出这个问题. 自然, 读者不要把这里的 v 与定理 1 中的 v 相混淆. (27) 的解是 $\int_0^t \tilde{v}(x,t-s;s)ds$, 其中 $\tilde{v}$ 满足问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad \tilde{v}_t - 8\tilde{v}_{xx} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad \tilde{v}(0,t;s) = 0, \quad \tilde{v}_x(\pi,t;s) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad \tilde{v}(x,0;s) = e^s \sin\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

由练习 3.3 中的习题 3, 得知 $\tilde{v}(x,t;s) = e^s e^{-2t}\sin\frac{x}{2}$. 则

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= w(x,t) + \int_0^t \tilde{v}(x,t-s;s)ds = \sin t + e^{-2t}\sin\frac{x}{2}\int_0^t e^{3s}ds\\
&= \sin t + \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})\sin\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$ □

例 6 求解下面具绝热端点的非齐次问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t - u_{xx} = (2t+1)\cos(3x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

解 既然端点是绝热的, 运用 Duhamel 原理, 得

$$u(x,t) = \int_0^t \tilde{v}(x,t-s;s)ds,$$

其中 $\tilde{v}$ 满足问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad \tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad \tilde{v}_x(0,t;s) = 0, \quad \tilde{v}_x(\pi,t;s) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad \tilde{v}(x,0;s) = (2s+1)\cos(3x).
\end{aligned}$$

容易验证 $\tilde{v}(x,t;s) = (2s+1)e^{-9t}\cos(3x)$, 因此,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t (2s+1)e^{-9(t-s)}\cos(3x)ds = e^{-9t}\cos(3x)\int_0^t (2s+1)e^{9s}ds\\
&= \frac{1}{81}(18t + 7 - 7e^{-9t})\cos(3x).
\end{aligned}$$ □

概要 3.4

1. 依赖时间的 B.C. 的分解 (命题 1): 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = a(t),\quad u(L,t) = b(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x)\end{aligned}$$

的解由 $u(x,t) = w(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$ 给出, 其中 $w(x,t) = (b(t) - a(t))\frac{x}{L} + a(t)$, $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 分别为下面问题的解:

$$\text{(a)}\ \begin{aligned}&\text{D.E.}\quad (u_1)_t - k(u_1)_{xx} = 0;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u_1(0,t) = 0,\\ u_1(L,t) = 0;\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u_1(x,0) = g(x);\end{aligned}\qquad \text{(b)}\ \begin{aligned}&\text{D.E.}\quad (u_2)_t - k(u_2)_{xx} = h(x,t);\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u_2(0,t) = 0,\\ u_2(L,t) = 0;\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u_2(x,0) = 0,\end{aligned}$$

其中 $g(x) = f(x) - w(x,0)$ 和$h(x,t) = -(b'(t) - a'(t))\frac{x}{L} - a'(t)$.

2. 定理 1 (Duhamel 原理): 假设 $h(x,t)$ 是给定的 C^2 函数, $0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0$. 假设对每个 $s \geqslant 0$, 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad v_t - kv_{xx} = 0,\quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant s;\\&\text{B.C.}\quad v(0,t;s) = 0,\quad v(L,t;s) = 0;\\&\text{I.C.}\quad v(x,s;s) = h(x,s)\end{aligned}$$

有 C^2 解 $v(x,t;s)$, 其中 $v(x,t;s)$, $v_t(x,t;s)$ 和 $v_{xx}(x,t;s)$ 关于 s 也是连续的 (与 (x,t) 联合). 则问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t - ku_{xx} = h(x,t),\quad 0 \leqslant x \leqslant L,\quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0,\quad u(L,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 0.\end{aligned}$$

的唯一解由 $u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)ds$ 给出. (可以是其他类型的齐次 B.C..)

练习 3.4

1. (a) 求下面问题的 D.E. 和 B.C. 具形式 $u_p(x,t) = w(x)$ (即, u_p 是稳态的) 的特解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t - ku_{xx} = h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = a, \quad u(L,t) = b;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x).\end{aligned}$$

(b) 利用 (a) 的结果, 不用 Duhamel 原理求解下面问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t - 2u_{xx} = \sin(3x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 0.\end{aligned}$$

(c) 利用 Duhamel 原理求 (b) 部分的解.

2. 验证如果 $\tilde{v}(x,t;s)$ 满足 (14), 则 $v(x,t;s) = \tilde{v}(x,t-s;s)$ 满足 (12).

3. 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t - u_{xx} = e^{-4t}\cos t\sin(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = \sin(3x).\end{aligned}$$

4. 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t - u_{xx} = t\cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 0.\end{aligned}$$

5. (a) 求下面问题的 D.E. 和 B.C. 的特解 $w(x,t)$

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t - ku_{xx} = h(t), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = a, \quad u_x(L,t) = b;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x),\end{aligned} \tag{$*$}$$

其中 $h(t)$ 是 C^1 的. **提示** 尝试函数 $w(x,t) = c_1x^2 + c_2x + g(t)$.

(b) 证明 $(*)$ 的解由 $u = w + v$ 给出, 其中 w 由 (a) 部分给出, v 是

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad v_t - kv_{xx} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad v_x(0,t) = 0, \quad v_x(L,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad v(x,0) = f(x) - w(x,0)\end{aligned}$$

的解 (如果存在). 于是, 不用 Duhamel 原理可求得 $(*)$.

6. 求解

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t - ku_{xx} = \cos(3t),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = -1,\quad u_x(1,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = \cos(\pi x) + \frac{1}{2}x^2 - x.
\end{aligned}
$$

提示 利用习题 5.

7. 求解

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t - u_{xx} = \frac{xe^t}{\pi} + t\left(2 - \frac{2x}{\pi} + \sin x\right),\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t) = t^2,\quad u(\pi,t) = e^t;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = \frac{x}{\pi} + \sin(2x).
\end{aligned}
$$

8. 求解

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t - 4u_{xx} = e^t \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin t,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t) = \cos t,\quad u_x(\pi,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 1.
\end{aligned}
$$

9. 求解

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t - u_{xx} = x - x^2 + 2t + e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t) = t,\quad u_x(1,t) = -t;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 0.
\end{aligned}
$$

10. 证明如果 D.E. 换为 $u_t - ku_{xx} = h(x,t)$ 的话, 唯一性定理 (参看第 3.2 节的定理 1) 仍然为真. 对其他类型的 B.C. (如 $u_x(0,t) = a(t)$) 唯一性定理是否仍成立?

11. 假设 (10) 的 D.E. 中的 $h(x,t)$ 变化到 $q(x,t)$. 通过对 (14) 运用最大值最小值原理 (并利用 (15)), 证明在时刻 t 对解的改变至多为

$$
t \cdot \max|h(x,s) - q(x,s)|,
$$

其中最大是在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant s \leqslant t$ 上取.

12. 考虑

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0 \leqslant x \leqslant L,\quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t) = a(t),\quad u(L,t) = b(t);\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x),
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是多项式, 设为

$$a(t)=\sum_{i=0}^{n}A_it^i \quad 和 \quad b(t)=\sum_{i=0}^{n}B_it^i.$$

这里我们要证明 D.E. 和 B.C. 有唯一的具形式 $u_p(x,t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(x)t^i$ 的特解, 其中 $F_i(x)$ 是次数不超过 $2(n-i)+1$ 的多项式. 这表明问题 (*) 能转换成关于 $v(x,t)=u(x,t)-u_p(x,t)$ 的具齐次 D.E. 和 B.C. 的问题, 于是这时不必用到 Duhamel 原理.
(a) 把 $u_p(x,t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(x)t^i$ 代入 $u_t=ku_{xx}$ 然后使系数相等, 得出 $F_n''(x)=0$, $kF_{n-1}''=nF_n(x),\cdots$, $kF_{n-i}''(x)=(n-i+1)F_{n-i+1}(x),\cdots$, $kF_0''(x)=F_1(x)$.
(b) 证明 B.C. 隐含 $F_n(x)=(B_n-A_n)\frac{x}{L}+A_n$. 更一般地, 证明 $F_i(x)$ 由 F_{i+1} 和 B.C. 唯一确定. 于是, 由归纳法, $u_p(x,t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(x)t^i$ 是唯一确定的.(为此题我们感谢 Kenneth.)

第四章 Fourier 级数和 Sturm-Liouville 理论

在第三章我们发现只要初始温度能表示成 (在实验误差之内) 满足边界条件的正弦或余弦函数的和, 就容易获得热方程初边值问题的解. 第三章中的问题是特别设计的, 使得根据三角恒等式 $f(x)$ 能写成这种形式. 在本章我们要学习对一有限区间上任意 "适当好的" 函数, 怎样来找出一个适当形式的逼近. 在第五和第六章我们发现 Fourier 级数理论还应用于波方程和 Laplace 方程问题.

在第 4.1 节我们定义一个函数的 Fourier 级数, 并提出这种级数和通常向量相应于一个正交基分解成分量之间的相似性. 第 4.2 节包含了关于 Fourier 级数各种收敛性的叙述和证明. 考虑到实际应用, 我们关注在有限项处截取 Fourier 级数产生的误差. 在第 4.3 节讨论了不同类型的 Fourier 级数 (例如, 余弦级数和正弦级数). 这些级数用来求解初始条件不是在第三章出现的特殊情形时各种边界条件热方程的问题. 在第 4.4 节介绍 Fourier 级数理论的一个推广, 即 Sturm-Liouville 理论. 当杆中的热传导材料具有可变热传导率, 密度, 特定的热能或与温度成比例的热源时, 要用到这种理论. 该理论也可用于波问题, 或更一般地, 它用来分析具齐次边界条件的常微的解, 当应用分离变量时会产生这些常微.

§4.1 正交性和 Fourier 级数定义

在第三章我们发现用以下形式的函数 (取决于 B.C. 的类型) 精确地表示 (比如在实验误差之内) 初始温度分布 $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant L$ 是重要的

$$f(x) \approx \begin{cases} \sum_{n=1}^{N} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} & (1) \\ \sum_{n=0}^{N} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} & (2) \\ \sum_{n=0}^{N} c_n \sin[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}] & (3) \\ \sum_{n=0}^{N} d_n \cos[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}]. & (4) \end{cases}$$

当两个端点保持在 0 时, 形式 (1) 是合适的; 当两个端点都是绝热时, 形式 (2) 是合适的; 当一个端点绝热而另一个端点保持为 0 时, 形式 (3) 和 (4) 是合适的. 我们将集中对 (1) 和 (2) 进行研究, 通过考虑在更大的区间 $[-L, L]$ 上的函数, 这两种形式同时处理起来是很方便的. 的确, 在圆形金属丝上的热传导的情形用的就是这种更大的区间 (参看第 3.1 节中的命题 2). 在那情形中, 需要用函数 $\sin \frac{n\pi x}{L}$ 和函数 $\cos \frac{n\pi x}{L}$ 的线性组合来逼近初始温度. 我们第一个目标是证明函数 $\sin \frac{n\pi x}{L}$ 和 $\cos \frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 可看作定义在 $[-L, L]$ 上的无穷维函数 "空间" 上的正交向量. (1) 和 (2) 中的和是这些 "向量" 的线性组合. 当然, 在三维空间中, 任意向量是三个正交向量的线性组合. 在函数空间中的类似结果要求更多的工作和准备. 因此, 我们将研究如何把函数 $f(x)$ 表示成这种线性组合的问题.

首先考虑以下形式有限和的**三角多项式**

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \text{ 是实数},$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ 和 $b_1, \cdots, b_N$ 是实常数. 随后我们将研究无穷级数形式

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{5}$$

其中
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

和
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

级数 (5) 称为$f(x)$ **的 Fourier 级数**, 它是以杰出的法国数学物理学家 Joseph Fourier(1768—1830) 命名. 在 19 世纪早期, Fourier 从事于热传导理论, 并且在 1822 年发表了他的巨著《*La Thérie Analytique de la Chaleur*》, 在该巨著中, 他大量利用现在冠以他的名字的这种级数. 实际上 Fourier 只从事三角多项式, 历史学家中的多数人的看法似乎 Fourier 对 Fourier 级数的数学理论所做的贡献几乎没有. 的确, 这些级数在更早对 Lenhard Euler(1707—1783), Daniel Bernoulli(1700—1782), Joseph Lagrange (1736—1813) 和其他学者是熟知的.

函数空间中的正交性

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的两个实值连续函数. 定义 f 和 g 的内积是由以下给出的实数 $\langle f, g\rangle$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx. \tag{6}$$

这类似于三维空间的 "点积":

如果 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, 则

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{n=1}^{3} a_nb_n.$$

由于两个函数和的积分等于积分的和, 故有

$$\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle. \tag{7}$$

还有, 对任意实数 c, 有 $\langle cf, g\rangle = c\langle f, g\rangle$, 以及显然的对称性 $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$. 函数 f 的**范数**(或长度) 是

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_{-L}^{L}[f(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

这类似于 xyz 空间中的向量 $\mathbf{a}$ 的长度 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$. 两个函数 f 和 g 称为在 $[-L, L]$ 上**正交**, 如果 $\langle f, g\rangle = 0$.

连续函数族 $f_1, f_2, f_3, \cdots$, 称为是 $[-L, L]$ 上具有**范数平方 L 的正交族**, 如果对任意成员 f_m 和 f_n, 有

$$\langle f_n, f_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{如果} \quad m \neq n \\ L & \text{如果} \quad m = n. \end{cases} \tag{9}$$

在下面的命题 1 中, 利用以下 Green 积分公式的一个推论我们证明了函数族 $\sin\frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 是具范数平方 L 的正交族. Green 公式在后面小节的计算中常会用到.

Green 公式 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的 C^2 函数. 则

$$\int_a^b f''(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)g''(x)dx = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]\big|_a^b \tag{10}$$

证明 由乘积法则, 得

$$\frac{d}{dx}[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] = f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) - f'(x)g'(x) - f(x)g''(x),$$

然后两边从 a 到 b 积分, 得到 (10). □

推论 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $[-L, L]$ 上的 C^2 函数, 并假设 $f(-L) = f(L), f'(-L) = f'(L)$, $g(-L) = g(L)$ 和 $g'(-L) = g'(L)$. 则

$$\langle f'', g\rangle - \langle f, g''\rangle = 0 \quad \text{或} \quad \langle f'', g\rangle = \langle f, g''\rangle. \tag{11}$$

证明 回忆定义 (6) 和应用 Green 公式 (10), 并注意到 f 和 g 在 $x = \pm L$ 的假设, (10) 的右边为零. □

命题 1 函数族 $s_n(x) \equiv \sin \frac{n\pi x}{L}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是在区间 $[-L, L]$ 上具范数平方 L 正交的.

证明 对 $f(x) = s_n(x)$ 和 $g(x) = s_m(x)$ 应用 (11), 注意到 $s_n'' = -(\frac{n\pi}{L})^2 s_n$ 和 $s_m'' = -(\frac{m\pi}{L})^2 s_m$, 得

$$
\begin{aligned}
0 = \langle s_n'', s_m \rangle - \langle s_n, s_m'' \rangle &= \langle -(\frac{n\pi}{L})^2 s_n, s_m \rangle - \langle s_n, -(\frac{m\pi}{L})^2 s_m \rangle \\
&= (\frac{\pi}{L})^2 (m^2 - n^2) \langle s_n, s_m \rangle.
\end{aligned} \tag{12}
$$

因此, 如果 $m \neq n$, 可用 $m^2 - n^2$ 相除得 $\langle s_n, s_m \rangle = 0$. 对 $m = n$, 计算得

$$
\begin{aligned}
\langle s_n, s_m \rangle &= \int_{-L}^{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^{L} \frac{1}{2} [1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}] dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x - \frac{L}{4n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L} \right] \Bigg|_{-L}^{L} = L.
\end{aligned}
$$
□

注意到同样的证明可用来证明函数族 $c_n(x) \equiv \cos \frac{n\pi x}{L}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是在区间 $[-L, L]$ 上具范数平方 L 正交的. 而且与 (12) 相同的计算, 以 c_m 替换 s_m(s_n 保持不变), 得到 $\langle s_n, c_m \rangle = 0$, $n \neq m$. 同样有 $\langle s_n, c_n \rangle = 0$, 因为

$$
\begin{aligned}
\langle c_n, s_n \rangle &= \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2} \sin \frac{2n\pi x}{L} dx = \frac{-L}{4n\pi} \cos \frac{2n\pi x}{L} \Bigg|_{-L}^{L} = 0.
\end{aligned}
$$

因此我们可混排函数族 $s_1, s_2, \cdots$ 和 $c_1, c_2, \cdots$ 得到 $[-L, L]$ 上更大的正交族 $s_1, c_1, s_2, c_2, \cdots$. 前述的正弦或余弦的乘积的积分通过利用第 3.1 节的三角恒等式 (27), 不用 Green 公式也能计算. 然而, 利用 Green 公式的证明容易推广到某些多重积分, 而三角恒等式却不能.

例 1 证明常值函数 $c_0(x) = \cos \frac{0\pi x}{L} = 1$ 与函数族 $s_1, c_1, s_2, c_2, \cdots$ 中的每个成员都正交. 然而, 注意到 c_0 不具有范数平方 L. 通过以适当的常数乘 c_0 来补救这一缺陷.

解 注意到 $\langle c_0, s_n\rangle = \int_{-L}^{L} 1 \cdot \sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$, 且类似地, $\langle c_0, c_n\rangle = 0$, $n = 1,2,3,\cdots$. 因此, 在 $[-L,L]$ 上, c_0 与函数族 $s_1, c_1, s_2, c_2, \cdots$ 的每个成员正交. 另外, 对任意常数 b, 有 $\langle bc_0, bc_0\rangle = b^2\langle c_0, c_0\rangle = b^2\int_{-L}^{L} 1^2 dx = b^2 2L$. 于是, 通过取 $b = \sqrt{1/2}$ 使得 $b^2 = 1/2$, 有 $\langle\sqrt{1/2}c_0, \sqrt{1/2}c_0\rangle = L$. 注意到在 $[-L,L]$ 上 $\sqrt{1/2}c_0$ 仍然与 $s_1, c_1, s_2, c_2, \cdots$ 正交, 因为 $\langle\sqrt{1/2}c_0, s_n\rangle = \sqrt{1/2\langle c_0, s_n\rangle} = 0$, 等等. □

概括前面的分析, 我们有

命题 2 下面的函数族构成了区间 $[-L,L]$ 上具范数平方 L 的正交族:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}c_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ s_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L},\ c_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\ n = 1,2,3,\cdots. \tag{13}$$

注记 我们最终将证明 $[-L,L]$ 上不存在 C^1 函数 (除非是零函数), 它与 (13) 中的所有成员正交 (参看第 4.2 节的习题 11). 因此, 函数族 (13) 不能再扩大. 这表明函数族 (13) 可能充当定义在 $[-L,L]$ 上的无穷维函数 "空间" 的一个正交向量的基. 在 xyz 空间, 有一熟悉的具范数 L 的正交向量基, 即 $\mathbf{e}_1 = \sqrt{L}\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \sqrt{L}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \sqrt{L}\mathbf{k}$. xyz 空间中的任意向量 $\mathbf{v}$ 可写成 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 的一个线性组合, 如 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, v_1, v_2 和 v_3 为某些数. 我们可用 $\mathbf{v}$ 与基向量的点积来表示这些数. 例如, 为求出关于 v_1 的公式, 计算

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 = (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_1 = v_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = v_1\|\mathbf{e}_1\|^2 = v_1 L, \quad \text{所以} \quad v_1 = \frac{1}{L}\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1.$$

一般, $v_n = L^{-1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_n$, $(n = 1,2,3)$, 而且我们发现 v_n 是由这个公式唯一确定的. 下面的结果以及它的证明完全类似. □

定理 1 假设 $f(x)$ 具有以下形式

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{14}$$

则系数 a_n 和 b_n 由以下公式唯一地确定

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\langle f, c_n\rangle, \qquad n = 0, 1, \cdots, N, \tag{15}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\langle f, s_n\rangle, \qquad n = 1, 2, \cdots, N. \tag{16}$$

其中 $s_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$ 和 $c_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$.

证明 用 s_n 和 c_n 我们可把 (14) 写成以下形式

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n c_n + b_n s_n. \tag{14'}$$

(14′) 两边与 c_m (m 固定, $1 \leqslant m \leqslant N$) 取内积, 得

$$\langle f, c_m\rangle = \langle\frac{1}{2}a_0, c_m\rangle + \sum_{n=1}^{N} a_n\langle c_n, c_m\rangle + b_n\langle s_n, c_m\rangle. \tag{17}$$

由正交性 (参看命题 2, (17) 右边除了 $a_m\langle c_m, c_m\rangle$ 所有项为零. 特别, 注意到 $\langle\frac{1}{2}a_0, c_m\rangle = 0$, 因 c_m 与 $[-L, L]$ 上的任意常值函数正交. 因此, (17) 简化成 $\langle f, c_m\rangle = a_m\langle c_m, c_m\rangle = a_m L$, 于是 $a_m = L^{-1}\langle f, c_m\rangle$, $m = 1, 2, 3, \cdots$. 因此, 我们得公式 (16) 和公式 (15), 除了当 $n = 0$ 时. 为处理 $n = 0$, 取 (14′) 与常值函数 $c_0(x) \equiv 1$ 的内积, 得到 $\langle f, c_o\rangle = \langle\frac{1}{2}a_0, c_0\rangle = a_0 L$ 或 $a_0 = \frac{1}{L}\langle f, c_0\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$. □

Fourier 级数——定义和例子

不是每个函数 $f(x)$ 都能写成 (14) 的形式. (14) 的右边是光滑的 (即 C^∞), 但许多函数的图像有跳跃点或角点. 我们会遇到函数 $f(x)$, 关于它的积分 (15) 和 (16) 有无穷多个 n 的值不为零. 在这种情形, $f(x)$ 不能表示为像 (14) 的有限和. 而且, 即使 N 趋于 ∞, 和 (14) 可能不收敛到 $f(x)$, 除非做某些附加的假

设. 在 $N=\infty$ 的情形, 和是 $f(x)$ 在 $[-L, L]$ 上的 Fourier 级数, 定义如下:

定义 (Fourier 级数) 设 $f(x)$ 定义在 $[-L, L]$ 上, 使得积分

$$a_n \equiv \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n=0,1,2,\cdots, \tag{18}$$

和

$$b_n \equiv \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n=1,2,3,\cdots, \tag{19}$$

存在且有限. 则 $[-L, L]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 级数是表示式

$$\text{FS } f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{20}$$

系数 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 称为 f 的 Fourier 系数.

注记 1 注意到没有要求 (20) 中的级数当 x 的值代入时是事实上收敛的. 的确, 在 1930 年, Kolmogorov 给出一个 (Lebesgue 可积) 函数, 它的 Fourier 级数对所有的 x 是发散的. 而且, 存在 $[-L, L]$ 上的连续函数 $f(x)$, 使得对所有的有理数 x, FS $f(x)$ 是发散的. 这些结果的综述, 见 [Coppel]. 当然, 总可改变 $f(x)$ 在任意有限点的值产生许多不同的新函数而不改变 (18) 和 (19) 的积分, 因此不改变 Fourier 级数. 然而, 如果 FS $f(x)$ 对 $[-L, L]$ 中的所有 x 是收敛的, 则它最多收敛到一个函数. 因此, 我们看见如果关于函数没有某些进一步的假设 (例如, 连续性), 则函数不是由 Fourier 级数唯一确定的. □

注记 2 在本书 $f(x)$ 的 Fourier 级数的符号 FS $f(x)$ 是唯一的. 有些书籍未能明确一个函数和该函数的 Fourier 级数之间的区别. 当然, 对 "充分好的" 函数人们希望 FS $f(x)=f(x)$, 但根据注记 1, 不是所有的函数都是这样. 所用的最常见的符号是

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L},$$

其中符号 "$\sim$" 意为 "有 Fourier 级数". 我们没有主张废除这个符号. 然而, 符号 "$\sim$" 有其他的涵义, 即它经常代表 "近似 (或渐进) 相等". 虽然我们的符号不是标准的, 但它至少是不含糊的, 而且是方便的, 因它可免去重写 (20) 中的无穷级数. □

例 2 求函数 $f(x)=x,\ -L\leqslant x\leqslant L$ 的 Fourier 级数.

解 先对 $n\geqslant 1$ 计算 Fourier 系数 a_n.

$$\begin{aligned}a_n &=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}x\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}-\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=0+\frac{L}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}=0,\quad n=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

对 $n=0$, 得 $a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}xdx=\frac{1}{2}L^{-1}x^2|_{-L}^{L}=0$. 因此, 所有的 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为零. 通过注意到被积函数 $x\cos\frac{n\pi x}{L}$ 当 x 以 $-x$ 来替换时改为负值; 即它们是"奇"函数. 对这样的函数从 $-L$ 到 0 的积分抵消从 0 到 L 的积分, 我们也能得到上述结果. 对 b_n, 有

$$\begin{aligned}b_n &=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{-x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}+\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\&=\frac{-2L}{n\pi}\cos(n\pi)+\frac{L}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}=\frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1},\quad n=1,2,3,\cdots,\end{aligned}$$

因 $\cos(n\pi)=(-1)^n$(对 $n=0,1,2,\cdots$ 验证该等式). 于是, 我们得

$$\begin{aligned}\text{FS } f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\\&=\frac{2L}{\pi}\Big[\sin\frac{\pi x}{L}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}-\cdots\Big].\end{aligned}\tag{21}$$

注意到 FS $f(0)=0=f(0)$. 然而, FS $f(\pm L)=0\neq\pm L=f(\pm L)$, 所以 FS $f(x)$ 在 $x=\pm L$ 不等于 $f(x)$. 从第 4.2 节的定理 3 我们将看到 FS $f(x)=f(x)=x,\ -L<x<L$. 因此, 对 $x=\frac{L}{2}$, 有 $\frac{2L}{\pi}[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots]=\frac{L}{2}$, 或等价地, $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$, 这是计算 π 的一个可靠 (但低效率) 的方式. □

在 $(-L,L)$ 中观察 Fourier 级数 (21), 当该级数更多的项加入时, 趋于函数 $f(x)=x$ 的方式是有趣的. 令 $S_N(x)$ 表示 FS $f(x)$ 的前 N 项之和. 在下面的图 1 中, 我们绘出 $S_1(x),S_2(x)$ 和 $S_3(x)$ 与 $f(x)=x$ 相比较. 随着 N 的增加, 逼近变得更好 (例如见图 2 中的 S_{10}). 然而, 逼近在 $x=\pm L$ 处是不佳的, 因 $S_N(\pm L)=0$. 另外, 注意到在区间 $[-L,L]$ 外, $S_N(x)$ 与 x 相去甚远, 因 $S_N(x)$ 是周期的 (即, 对所有的 x, $S_N(x+2L)=S_N(x)$, 但 $f(x)=x$ 不是周期的. 第 4.2 节的结果意味着 FS $f(x)$(或 $S_\infty(x)$) 的图像由以下图 3 给出.

如果 $f(x)$ 定义在 $[0,2L]$ 上, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数由 (20) 定义, 只要 (18) 和 (19) 中的积分区间 $[-L,L]$ 以 $[0,2L]$ 替换. 可定义在任意正长度闭区间上有定义的函数的 Fourier 级数.

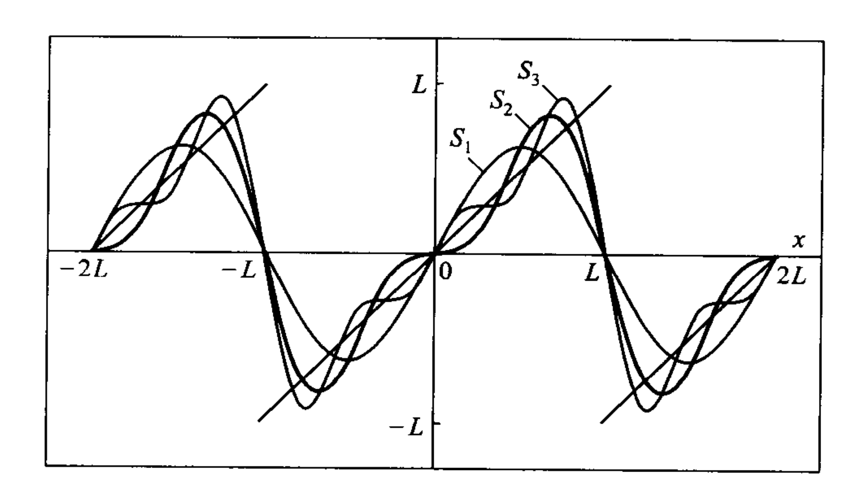


图 1　$f(x)=x,\ -L\leqslant x\leqslant L$ 的 FS $f(x)$ 前三个部分和的图像

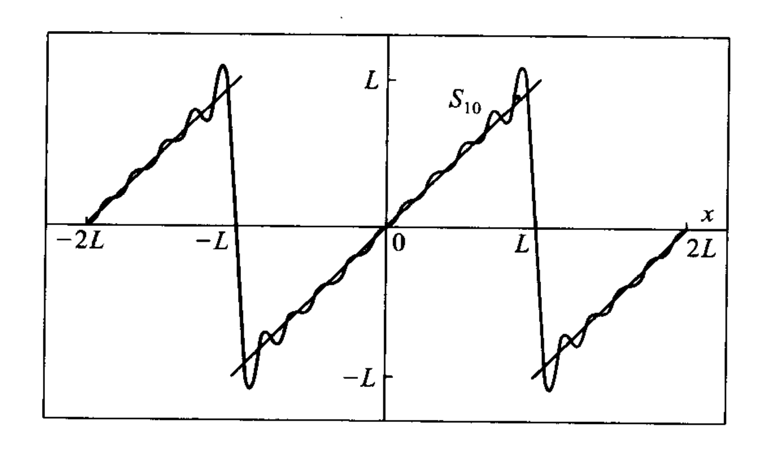


图 2　部分和 $S_{10}(x)$ 的图像

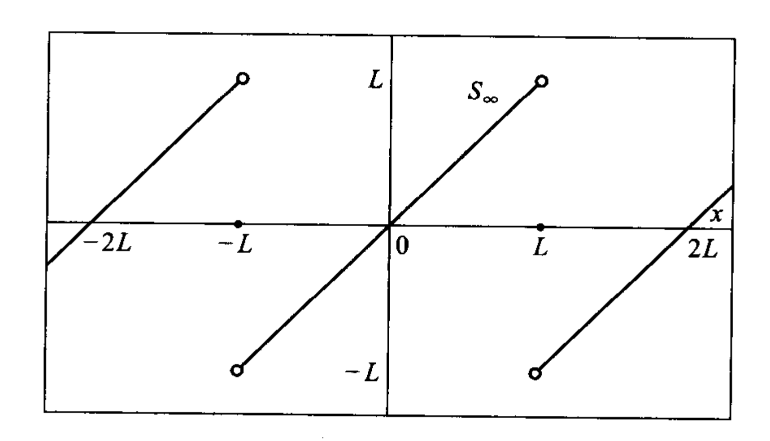


图 3　$S_\infty(x)$ 或 FS $f(x)$ 的图像

例 3　计算定义在区间 $[0,2L]$ 上函数 $f(x)=x$ 的 Fourier 级数.

解 现在 Fourier 系数的积分是从 0 到 $2L$. 因此, 得 $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} xdx = 2L$, 而对 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 有

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} x\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^{2L} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

由此, 得 $a_n = 0,\ n \geqslant 1$. 计算 b_n, 得

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} x\sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^{2L} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{2L}{n\pi}.$$

于是,

$$\text{FS } f(x) = L - \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}. \quad \square \tag{22}$$

注记 例 2 和例 3 表明, 一个函数的 Fourier 级数不仅与函数定义的区间长度有关, 还与区间的位置有关. 可以证明, (22) 的部分和的图像可通过 (21) 的部分和的图像 [例如, 从图 1, 图 2 和图 3) 向上移 L 个单位然后向右移 L 个单位得到. □

例 4 令 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$ $f(x)$ 的图像在图 4 中展示.

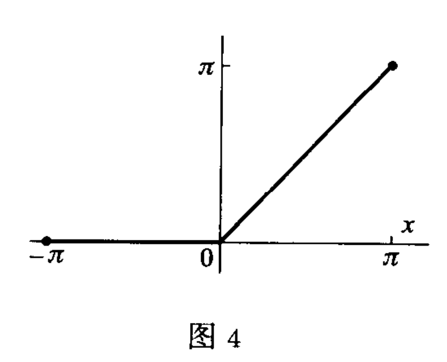


图 4

计算 FS $f(x)$, 注意 $L = \pi$.

解 因 $f(x) = 0,\ -\pi \leqslant x \leqslant 0$, 故有 (对 $n > 0$)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{n\pi}x\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

和

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{-1}{n\pi}x\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

还得单独计算 a_0: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}$. 因此, $\frac{1}{2}a_0 = \frac{\pi}{4}$ 以及

$$\begin{aligned}\text{FS } f(x) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]\cos(nx) + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(nx)\Big) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x + 0\cdot\cos(2x) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \cdots.\end{aligned}$$

第 4.2 节的结果隐含 FS $f(x) = f(x)$, $-\pi < x < \pi$. 于是, 在 $x = 0$ 处, 得

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\Big(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\Big) \quad \text{或} \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \qquad \square$$

注记 在例 4 中, 当取 $x = \pm\pi$ 时 FS $f(x)$ 的正弦项全部为零, 并得 FS $f(\pm\pi) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}[1^{-2} + 3^{-2} + 5^{-2} + \cdots] = \frac{\pi}{2}$, 但 $f(-\pi) = 0$ 和 $f(\pi) = \pi$. 因此, 如同在例 2, 我们发现对 $[-L, L]$ 中的所有 x, FS $f(x)$ 不总是等于 $f(x)$. 然而, 在这些例子中, 等式失效只发生在端点 $\pm L$. 注意到 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 和 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 当 x 由 $-L$ 变到 L 时是不变的. 因此, 对任意函数 f, FS $f(-L) =$ FS $f(L)$, 所以, 除非 $f(-L) = f(L)$, 在两端点我们不可能会有 FS $f(x) = f(x)$. 的确, 在相当一般的情况下, 在第 4.2 节我们证明 FS $f(\pm L) = \frac{1}{2}[f(L) + f(-L)]$. 这是例 2 和例 4 的情形. $\square$

Fourier 级数的收敛性

在对函数 $f(x)$ 的不同的假设下 (例如, 我们已经看到的 $f(-L) = f(L)$ 是一个必要条件), 可以证明对 $[-L, L]$ 中的所有 x, FS $f(x)$ 确实收敛到 $f(x)$. 例如, 在第 4.2 节将证明以下结果.

定理 2 (与第 4.2 节的定理 2 相同) 令 $f(x)$ 是区间 $[-L, L]$ 上的 C^2 函数, 满足 $f(-L) = f(L)$ 和 $f'(-L) = f'(L)$. 设 a_n 和 b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数(参看 (16) 和 (17)), 并令 $M = \max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f''(x)|$. 则对任意 $N \geqslant 1$ 和 $[-L, L]$ 中所有的 x, 有

$$\Big|f(x) - \Big(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big| \leqslant \frac{4L^2M}{\pi^2 N}. \tag{23}$$

注记 (1) 随着 N 变大, (23) 的右边趋于 0, 这意味着 (23) 的左边括号内的和当 N 趋于 ∞ 时收敛到 $f(x)$, 即

$$f(x) = \text{FS } f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{24}$$

(2) 实际上 (23) 告诉我们的比 (24) 要多. 的确,(23) 表明, 为了在一确定的误差之内近似 $f(x)$, 多少 FS $f(x)$ 的项是足够的. 然而, (24) 本身没有包含这种信息. 还注意到 (23) 的右边与 x 无关, 这表明通过取 N 足够大, 能确保对 $[-L, L]$ 中所有的 x 同时误差为微小.

(3) 条件 $f(-L) = f(L)$ 和 $f'(-L) = f'(L)$ 让大家想起圆形金属丝热传导的边界条件 (参看第 3.1 节的例 3). 这些条件确保如果通过 $x = -L$ 与 $x = L$ 相连把区间 $[-L, L]$ 弯曲成圆形, 则在该圆形上的函数 $f(x)$ 的图像是连续的且在等同的结合点 $-L$ 和 L 有确切的切线 (或导数). 为什么出现这种条件的理由可从以下粗略看出. FS $f(x)$ 中的项在下述意义下都是以 $2L$ 为周期的

$$\cos\left[\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right] = \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \cos\frac{n\pi x}{L}$$

和

$$\sin\left[\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right] = \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

因此 FS $f(x+2L) =$ FS $f(x)$, 所以 FS $f(x)$ 是 x 的以 $2L$ 为周期的函数, 假设 FS $f(x)$ 是收敛的话. 特别, FS $f(-L) =$ FS $f(-L+2L) =$ FS $f(L)$, 正如前面我们已注意到的. 因此, 又一次见到, 为使在 $x = \pm L$ 处 FS $f(x) = f(x)$, 必须 $f(-L) = f(L)$. 而且, 如果 FS $f(x)$ 是可微的, 则 $f'(-L) = f'(L)$ 也是一个必要条件. 注意到虽然 $f(x)$ 只在区间 $[-L, L]$ 上指定, 但 FS $f(x)$ 对所有的 x 有定义, 只要它是收敛的. 有时定义 $f(x)$ 的公式 (例如 $f(x) = x$) 对 $[-L, L]$ 外的 x 值仍有意义, 但在 $[-L, L]$ 之外不会有 FS $f(x) = f(x)$, 除非 $f(x)$ 是以 $2L$ 为周期的函数. 注意到以 $2L$ 为周期的函数对应于周长为 $2L$ 的圆周上的函数. 因此, Fourier 级数很自然用来表示周期函数或定义在圆周上的函数. 如我们将看到的, 粗略说来, 函数 $f(x)$ $(-L \leqslant x \leqslant L)$ 当转换到圆周上 (或周期延拓) 时显得越光滑, Fourier 级数收敛到 $f(x)$ 就越迅速. □

例 5 取 $L = 1$ 和 $f(x) = x^3 - x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 应用定理 2 估计 FS $f(x)$ 在误差 0.01 之内逼近 $f(x)$ 所需的项数.

解 首先验证 $f(x)$ 满足定理 2 的假设. 注意到 $f(-1) = f(1) = 0$ 和 $f'(-1) = f'(1) = 2$, 因 $f'(x) = 3x^2 - 1$; 同样, $f''(x) = 6x$ 是连续的 (即 f 是 C^2

的). 现 $M = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f''(x)| = 6$. 根据定理 2, FS $f(x)$ 在第 N 项处截取, 与 $f(x)$ 的误差在 0.01 之内, 只要

$$\frac{4(1)^2\cdot 6}{\pi^2 N} < 0.01 \quad 或 \quad N > \frac{2400}{\pi^2} \approx 243.17.$$

因此取 $N = 244$, 我们将肯定达到期望的精度. □

借助于积分近似的误差估计——更多的例子

例 5 中关于 N 的估计是很保守的, 现在我们将直接证明 5 项就足够了. Fourier 系数 a_n 为零, 因 $f(x) = x^3 - x$ 是奇的 (即 $f(-x) = -f(x)$), 而在下面的例 7, 我们算出 $b_n = (-1)^n \frac{12}{(n\pi)^3}$. 因此, 对 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\text{FS } f(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3}\sin(n\pi x) = x^3 - x, \tag{25}$$

其中最后的等式是由于 (24). 利用 (25) 以及事实 $|(-1)^n \sin(n\pi x)| \leqslant 1$, 有

$$\left|x^3 - x - \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \frac{1}{n^3}\sin(n\pi x)\right|$$

$$= \left|\frac{12}{\pi^3}\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3}\sin(n\pi x)\right| \leqslant \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}. \tag{26}$$

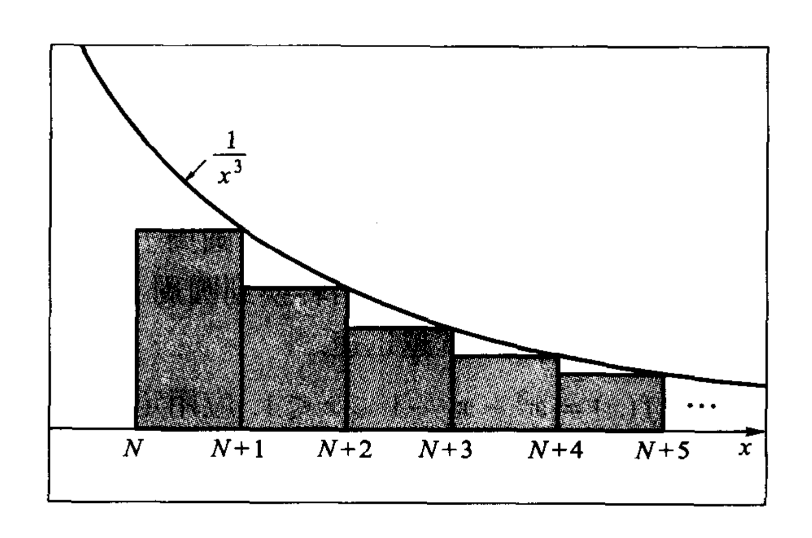


图 5

(26) 中最后的和与图 5 中阴影的矩形的面积和相同, 它不超过曲线下的面积 $\int_N^\infty \frac{1}{x^3}dx$. 因此, 由 (26) 得

$$|x^3 - x - \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \frac{1}{n^3}\sin(n\pi x)| \leqslant \frac{12}{\pi^3}\int_N^\infty \frac{1}{x^3}dx = \frac{6}{\pi^3 N^2}.$$

令 $\frac{6}{\pi^3 N^2} \leqslant 0.01$, 得 $N \geqslant \sqrt{\frac{600}{\pi^3}} \approx 4.4$. 于是 $N = 5$ 足够. 实际上, 精确的数值表表明 $N = 4$ 是足够的, 而且 $N = 3$ 不够. 对函数 $f(x) = x^3 - x$, 我们看到由定理 2 提供的 N 比需要的大得多. 的确, 在很多情形, 如同上面, 利用算出来的 Fourier 系数基于积分比较的直接估计很可能得到比定理 2 中的 (23) 的结果要好. 然而, (23) 仍然是有价值的, 因它得到一个估计, 即使当 Fourier 系数无法计算 (比如, 由于积分太困难). 另外, 有无穷多满足定理 2 假设的 C^2 函数, 要同时对待它们将是不可能的. 定理 2 同时处理所有这些函数.

例 6 计算 $f(x) = x^3$, $-L \leqslant x \leqslant L$ 的 Fourier 级数.

解 用定理 1 的符号, $a_n = L^{-1}\langle c_n, f\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x^3 \cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$, 因被积函数是奇的 (即, 在 x 以 $-x$ 替换下, 它改变为它的负值). 为计算 $b_n = L^{-1}\langle s_n, f\rangle$, 我们要分部积分三次, 是一个相当不愉快的折磨. 然而, 我们将利用 Green 公式的以下形式 (参看 (9))

$$\langle g'', f\rangle = [g'(x)f(x) - g(x)f'(x)]|_{-L}^{L} + \langle g, f''\rangle. \tag{27}$$

现 $b_n = L^{-1}\langle s_n, f\rangle$, 为应用 (27), 用 s_n'' 来表示 s_n(即 $s_n = -(\frac{L}{n\pi})^2 s_n''$). 因此, $b_n = -L^{-1}(\frac{L}{n\pi})^2\langle s_n'', x^3\rangle$. 对 $g(x) = s_n(x)$ 和 $f(x) = x^3$ 应用 (27), 得

$$\begin{aligned}\langle s_n'', x^3\rangle &= [s_n'(x)x^3 - s_n(x)3x^2]|_{-L}^{L} + \langle s_n, 6x\rangle \\ &= \frac{n\pi}{L}c_n(x)x^3|_{-L}^{L} + \langle s_n, 6x\rangle = (-1)^n 2L^2 n\pi - (\frac{L}{n\pi})^2\langle s_n'', 6x\rangle.\end{aligned}$$

再把 (27) 应用到 $\langle s_n'', 6x\rangle$, 得

$$\langle s_n'', 6x\rangle = [s_n'(x)6x - s_n(x)6]|_{-L}^{L} + \langle s_n, 0\rangle = \frac{n\pi}{L}c_n(x)6x|_{-L}^{L} = (-1)^n 12n\pi.$$

因此,

$$\begin{aligned}b_n &= -L^{-1}(\frac{L}{n\pi})^2\langle s_n'', x^3\rangle \\ &= \frac{-L}{n^2\pi^2}\langle s_n'', x^3\rangle = \frac{-L}{n^2\pi^2}((-1)^n 2L^2 n\pi - (\frac{L}{n\pi})^2(-1)^n 12n\pi) \\ &= (-1)^n(\frac{-2L^3}{n\pi} + \frac{12L^3}{n^3\pi^3}) = 2\frac{L^3}{\pi^3}(-1)^n(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}),\end{aligned}$$

和

$$\text{FS } x^3 = 2\frac{L^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{6}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\Big)\sin\frac{n\pi x}{L}. \qquad \square$$

例 7 证明对定义在 $[-1,1]$ 上的 $f(x)=x^3-x$, 有

$$\text{FS } f(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(n\pi x).$$

解 我们在例 2 中计算了 FS x, 在例 6 中计算了 FS x^3. 在这些例子中取 $L=1$, 有 FS $f(x)=$ FS $(x^3-x)=$ FS x^3- FS x, 最后的等式由 $\langle x^3-x,s_n\rangle=\langle x^3,s_n\rangle-\langle x,s_n\rangle$ 得到. 换言之, x^3-x 的 Fourier 级数可由从 FS x^3 减去 FS x 来计算:

$$\begin{aligned}\text{FS }(x^3-x) &= \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{6}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\Big)\sin(n\pi x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(n\pi x)\\ &= \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}\sin(n\pi x).\end{aligned}$$

或者, 利用例 6 基于 Green 公式 (27) 的方法我们可直接来计算 FS (x^3-x). 这比分开计算 FS x^3 和 FS x 容易! 自然, 我们有 $a_n=L^{-1}\langle c_n,x^3-x\rangle=0$, 因 x^3-x 是奇的. 还注意到

$$b_n=\frac{1}{L}\langle s_n,x^3-x\rangle=-\Big(\frac{1}{n\pi}\Big)^2\langle s_n'',x^3-x\rangle\ (L=1),$$

由 (27), 得

$$\begin{aligned}\langle s_n'',x^3-x\rangle &= [s_n'(x)(x^3-x)-s_n(x)(3x^2-1)]|_{-1}^{1}+\langle s_n,6x\rangle\\ &= 0-\Big(\frac{1}{n\pi}\Big)^2\langle s_n'',6x\rangle\\ &= -\Big(\frac{1}{n\pi}\Big)^2\big([s_n'(x)6x-s_n(x)6]|_{-1}^{1}-\langle s_n,0\rangle\big)\\ &= \frac{-1}{n\pi}c_n(x)6x|_{-1}^{1}=-\frac{12}{n\pi}(-1)^n.\end{aligned}$$

因此,

$$b_n=-\Big(\frac{1}{n\pi}\Big)^2\Big(-\frac{12}{n\pi}(-1)^n\Big)=\frac{12}{\pi^3}\frac{(-1)^n}{n^3},$$

正是所需要的. $\square$

概要 4.1

1. 正交性: 定义在 $[-L,L]$ 上的两个函数 f 和 g 的内积由 $\langle f,g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$ 定义, 且 f 的范数为 $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$. 函数族 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 是 $[-L,L]$ 上**具范数平方** L **的正交族**, 如果对任意成员 f_m 和 f_n, 有

$$\langle f_n, f_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{如果} \quad m \neq n, \\ L & \text{如果} \quad m = n. \end{cases}$$

如果

$$c_n(x) \equiv \cos\frac{n\pi x}{L} \quad \text{和} \quad s_n(x) \equiv \sin\frac{n\pi x}{L},$$

则函数族 $\sqrt{1/2}c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \cdots$ 构成 $[-L,L]$ 上具范数平方的正交族 (参看命题 2).

2. Green 公式: 在建立正交性中一个关键结果是 Green 公式:

$$\int_a^b f''(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)g''(x)dx = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]|_a^b.$$

特别, $\langle g'', f\rangle = [g'(x)f(x) - g(x)f'(x)]|_{-L}^{L} + \langle g, f''\rangle$, 对计算 Fourier 系数是很有用的形式 (参看例 6 和例 7).

3. Fourier 级数: 设 $f(x)$ 是定义在 $[-L,L]$ 上的函数, 使得

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = L^{-1}\langle f, c_n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = L^{-1}\langle f, s_n\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{S1}$$

存在且有限. 则 f 在 $[-L,L]$ 上的 Fourier 级数是表示式

$$\text{FS } f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{S2}$$

常数 a_0, a_n 和 b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 称为 f 的**Fourier 系数**.

4. 由 Fourier 级数表示函数: 如果 $f(x)$ 表示成一个**三角多项式**, 比如 (对某个有限整数 $N \geqslant 1$)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{S3}$$

则定理 1 表明 a_n 和 b_n 必是 $f(x)$ 的 Fourier 系数 (S1). 因此, 这样的函数等于它们的 Fourier 级数 (即对三角多项式 f, 有 FS $f(x) = f(x)$). 例 2 和例 4 说明, 存在对 $[-L, L]$ 中的某个 x, FS $f(x) \neq f(x)$ 的函数. 还存在连续函数 $f(x)$, 使得对所有的有理数 x, FS $f(x)$ 是发散的. 然而, 在第 4.2 节中建立的一些结果确保在某些假设下 FS $f(x) = f(x)$. 这些结果之一是

定理 2 (与第 4.2 节的定理 2 相同) 设 $f(x)$ 是区间 $[-L, L]$ 上的 C^2 函数, 使得 $f(-L) = f(L)$和 $f'(-L) = f'(L)$. 令 a_n 和 b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数 (参看 (S1)), 并令 $M = \max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f''(x)|$. 则对任意 $N \geqslant 1$, 对 $[-L, L]$ 中所有的 x, 有

$$|f(x) - (\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})| \leqslant \frac{4L^2M}{\pi^2 N}. \tag{S4}$$

如果一个函数的 Fourier 系数能计算, 且 FS $f(x) = f(x)$, 则满足在一给定的误差之内逼近 $f(x)$ 的 FS $f(x)$ 的项数估计可通过应用积分比较 (参看图 5) 获得. 而且, 这些估计典型地比 (S4) 精确.

注记 Fourier 级数的数学研究的中心问题是: 在什么意义下和在什么条件下 FS $f(x)$ 代表 $f(x)$? 在某些收敛的概念之前就发现了 Fourier 级数. 事实上, Fourier 级数理论激发了各种收敛模式的研究 (如在本书), 也激发了对其他有用的数学概念和结果的研究. 在许多其他专家之中, 有 Abel, Carleson, Dirichlet, Dini, Jordan, Fejér, Hardy, Kolmogorov, Lebesgue, Littlewood 和 Riemann 进行了这些研究. 例如, Riemann 引入了他的积分提供了对 Fourier 系数的方便的表示. 最后, 我们提及在 1966 年 Carleson[见 Acta Math.,**116**(1966), 135~157], 通过证明: 如果 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上任一连续函数, 则 FS $f(x)$ 在除了可用可数个总长度为任意小的区间覆盖的点集之外是处处收敛的 (不必收敛到 $f(x)$), 解决了长时间未解决的公开问题 (在 1913 年由 Lusin 提出的猜测). 直到 1960 年, 有关这个有用且深奥课题进展的标准参考文献是 [Zygmund].

练习 4.1

1. 回忆一下通过利用三角恒等式 (参看第 3.1 节的 (27)), 得到结果 $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$. 证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \cos x dx = \frac{3\pi}{4} \quad 和 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \cos(3x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

提示 利用命题 2 或定理 1.

2. 不计算积分求以下函数的 Fourier 级数.

(a) $f(x) = \cos^2(\pi x)\sin^2(\pi x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

(b) $f(x) = \sin x[\sin x + \cos x]^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$

提示 利用三角恒等式和定理 1, 定理 1 表明对这些函数, 有 FS $f(x) = f(x)$.

3. 假设 $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$ 和 $g(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos\frac{n\pi x}{L}$, a_n 和 α_n, $n = 1, 2, \cdots, N$ 是常数. 证明 $\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx = L\sum_{n=1}^{N} a_n\alpha_n$.

4. 计算以下定义在 $[-L, L]$ 上函数的 Fourier 级数.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ 0, & -L \leqslant x < 0, \end{cases}$ (b) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ -x, & -L \leqslant x < 0. \end{cases}$

5. 令 $f(x) = x^2, \quad -L \leqslant x \leqslant L$.

(a) 用分部积分计算 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

(b) 用 Green 公式, 如在例 6 中所进行的, 重新计算该级数.

6. 由假设 FS $f(x) = f(x) = x^2$, $-L \leqslant x \leqslant L$(习题 5), 得到结果

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

和 (*)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

由这些结果得出

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

和 (**)

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{24}.$$

提示 对 (*), 考虑 $x = 0$ 和 $x = L$. 对 (**),(*) 中的结果相加和相减.

7. 计算 Fourier 级数:

(a) $f(x) = e^x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (b) $f(x) = e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

提示 对 (a), 注意到

$$(1+n^2)\langle f, c_n\rangle = \langle f'', c_n\rangle - \langle f, c_n''\rangle = [f'(x)c_n(x) - f(x)c_n'(x)]|_{-\pi}^{\pi} = \cdots,$$

对 $\langle f, s_n\rangle$ 类似, 其中 $s_n(x) = \sin(nx)$ 和 $c_n(x) = \cos(nx)$. 对 (b) 像 (a) 一样利用 Green 公式, 但是在 $[0, 2\pi]$ 上.

8. 计算函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x < 0 \\ \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ 的 FS $f(x)$.

9. 令 $f(x) = (x^2-1)^2, \ -1 \leqslant x \leqslant 1$.

(a) 利用 Green 公式 (如在例 7) 相对容易计算 FS $f(x)$.

(b) 验证 $f(x)$ 满足定理 2 的假设. 根据定理 2, 为在 0.001 的误差之内逼近 $f(x)$, FS $f(x)$ 的多少项数是足够的?

(c) 利用例 5 后面评注中的方法显著地改进 (b) 中的估计.

(d) 由假设 FS $f(x) = f(x)$(由定理 2 得到) 证明

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

§4.2 Fourier 级数收敛定理

回忆一下为解热方程初边值问题, 我们试图用正弦函数和余弦函数的适当形式的线性组合来逼近初始温度函数. 如果一个函数的 Fourier 级数收敛到该函数, 则通过考虑该 Fourier 级数足够的项数可达到期望的逼近. 我们叙述了一个收敛性结果 (第 4.1 节的定理 2), 它对满足 $f(-L) = f(L)$ 和 $f'(-L) = f'(L)$ 的 C^2 函数 $f(x)(-L \leqslant x \leqslant L)$ 有效. 在本节, 我们证明这个结果以及其他可用于更一般函数的收敛定理. 概略说来, 这更广的类是由 $[-L, L]$ 上除了有限多个点它们的图像有跳跃或有角点的 C^1(即分段 C^1 的) 函数组成. 虽然几乎所有打算利用 Fourier 级数的读者能清楚地理解这些收敛定理的叙述, 但它们的证明 (以及预备性结果的证明) 在应用中未必是非常实用. 然而, 在这些证明中提供了足够的细节, 使得这些证明可被有兴趣的读者理解.

周期函数

在证明收敛定理之前, 我们需要建立一些预备性结果. 先从有关周期函数和

周期延拓的一些事实开始.

> **定义** 对所有 x 有定义的函数 $g(x)$ 称为(**周期为** $2L$ **的**) **周期函数**, 如果对所有的 x, 有 $g(x+2L)=g(x)$.

这意味着如果 $g(x)$ 的图像向左或向右移动 $2L$(或 $2L$ 的倍数) 的距离, 则图像正好落在自身上面. 函数 $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ 和 $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数. 的确, $\sin\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right)=\sin(\frac{n\pi x}{L}+2n\pi)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ 类似. 由于周期为 $2L$ 的周期函数的有限线性组合仍然是周期函数, 故知以下形式的函数

$$S_N(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

(例如, Fourier 级数的部分和) 也是周期为 $2L$ 的周期函数. 一个函数是周期的不必是连续的. 例如, 图像在图 1 中描绘的函数是以 $2L$ 为周期的.(空心圆意味着它们 "围的" 这些点是去除的, 在 x–轴上的实心点是包含在该图像上的.)

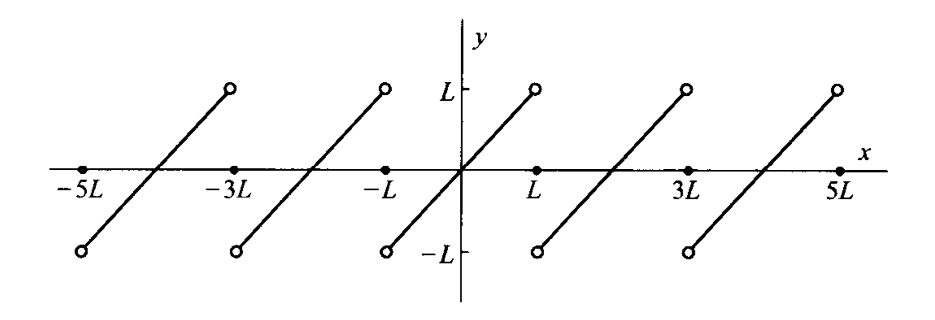


图 1

这实际上是 FS $f(x)$ 的图像, 其中 $f(x)=x(-L\leqslant x\leqslant L)$, 正如我们在第 4.1 节中叙述的, 且最终将证明 (参看定理 3). FS $f(x)$ 的部分和 $S_N(x)(N=1,2,3$ 和 $10)$ 的图像在第 4.1 节中的图 1 和图 2 中绘出. 注意到这些部分和是光滑的 (即, C^∞), 因它们是光滑函数的有限和. 无穷和 FS $f(x)$ 甚至不是连续的, 尽管它仍是周期的.

> **定义** 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[-L,L]$ 上的函数, 使得 $f(-L)=f(L)$. 则 $f(x)$ 的**周期延拓**是唯一的周期为 $2L$ 的周期函数 $\bar{f}(x)$, 使得 $\bar{f}(x)=f(x)$, $-L\leqslant x\leqslant L$.

注记 为使周期延拓存在, 必须有 $f(-L)=f(L)$. 因此, 注意到对 $-L\leqslant x\leqslant L$ 有定义的函数 $f(x)=x$ 没有周期延拓. 为弥补这种情况, 可在端点 $x=\pm L$ 重新定义为以下极限 (假设存在) 的平均值

$$f(L^-)\equiv\lim_{x\uparrow L}f(x)\quad 和\quad f(-L^+)\equiv\lim_{x\downarrow -L}f(x),$$

它们是由当 x 从 $[-L,L]$ 内趋于端点时取 $f(x)$ 的单边极限获得的. 这样做的理由是: 如果 $[-L,L]$ 上一 "分段 C^1" 函数 $f(x)$, 在端点 $x=\pm L$ 以这种方式做调整, 且也对 $(-L,L)$ 内的跳跃点求平均值, 则 FS $f(x)$ 收敛到该经调整过的函数的周期延拓. 该结果的精确叙述见定理 3. □

命题 1 如果 $g(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 则 $g(x)$ 在一长度为 $2L$ 的区间上的积分(如果存在的话) 等于任意其他长度为 $2L$ 的区间上的积分. 换言之, 对任意实数 c, 有

$$\int_{-L+c}^{L+c}g(x)dx=\int_{-L}^{L}g(x)dx. \tag{1}$$

证明 因积分区间 $[L,L+c]$ 是由 $[-L,-L+c]$ 往右移动 $2L$ 得到, 且 $g(x)$ 是以 $2L$ 为周期的周期函数, 故有

$$\int_{-L}^{-L+c}g(x)dx=\int_{L}^{L+c}g(x)dx. \tag{2}$$

现,

$$\int_{-L+c}^{L+c}g(x)dx=\int_{-L+c}^{-L}g(x)dx+\int_{-L}^{L}g(x)dx+\int_{L}^{L+c}g(x)dx,$$

但由 (2) 右边的第一项积分和第三项积分相抵消. □

例 1 计算 $\int_0^{2\pi}\sin^5 x\cos^{100}xdx$.

解 被积函数是周期为 2π 的周期函数. 因此, 根据命题 1, 该积分等于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^5 x\cos^{100}xdx.$$

被积函数是奇的 (即, 通过以 $-x$ 替换 x, 它改变为它的负值). 因此, 从 $-\pi$ 到 0 的积分抵消从 0 到 π 的积分, 由此得值为 0. □

Bessel 不等式和 Riemann-Lebesgue 引理

空间向量的长度的平方等于它的分量平方之和. 对定义在 $[-L, L]$ 上具有限范数平方 $\|f\|^2 \equiv \int_{-L}^{L} f(x)^2 dx$ 的任意函数 $f(x)$, 我们期望一个类似的结果, 但时下我们只证明一个不等式. 我们还将用它来证明具有限范数的函数的 Fourier 系数 a_n 和 b_n 当 $n \to \infty$ 时趋于 0. 在证明 Fourier 级数收敛性结果中将用到该事实.

Bessel 不等式 令 $f(x)$ 定义在 $[-L, L]$ 上, 并设 $\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx$ 存在且有限. 假设 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad 和 \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{3}$$

存在, 使得 FS $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ 形式上有定义(即, 它可能不收敛). 则我们有 Bessel 不等式:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx. \tag{4}$$

证明 令 $S_N(x) \equiv \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ 表示 FS $f(x)$ 的 N 项部分和. 则

$$0 \leqslant \int_{-L}^{L}[f(x) - S_N(x)]^2 dx = \int_{-L}^{L} f(x)^2 dx - 2\int_{-L}^{L} f(x)S_N(x)dx + \int_{-L}^{L}[S_N(x)]^2 dx. \tag{5}$$

通过计算 (5) 中后两个积分来证明由 (5) 得出 (4):

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)S_N(x)dx &= \int_{-L}^{L} f(x)\Big[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\Big]dx \\
&= \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{N}\Big[a_n\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\Big] \\
&= \frac{1}{2}a_0 \cdot La_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cdot L \cdot a_n + b_n \cdot L \cdot b_n) = L\Big(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\Big).
\end{aligned}$$

其次, 在上述计算中以 $S_N(x)$ 替换 $f(x)$. 则三角多项式 $S_N(x)$ 的前 N 项 Fourier 系数与 $f(x)$ 的相同 (参看第 4.1 节的定理 1). 因此, 我们得到与上述相同的结

果, 即

$$\int_{-L}^{L}[S_N(x)]^2dx = L\Big(\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\Big).$$

则不等式 (5) 成为

$$0\leqslant\int_{-L}^{L}f(x)^2dx - L\Big(\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\Big)$$

或

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)^2dx.$$

由于 N 可取任意大, 则已证明了 (4)(为什么?). □

注记 我们可把 Bessel 不等式 (4) 重写成以下形式

$$\frac{1}{L^2}\Big(\frac{1}{2}\langle f,c_0\rangle^2+\sum_{n=1}^{N}\langle f,c_n\rangle^2+\langle f,s_n\rangle^2\Big)\leqslant\frac{1}{L}\langle f,f\rangle, \tag{6}$$

其中 $c_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}$, $s_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}$, 且用了第 4.1 节的内积符号. 用 L 相乘并重写第一项,(6) 成为

$$\frac{1}{L}\Big(\langle f,\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot c_0\rangle^2+\sum_{n=1}^{N}\langle f,c_n\rangle^2+\langle f,s_n\rangle^2\Big)\leqslant\langle f,f\rangle=\|f\|^2. \tag{7}$$

换言之, 我们有相对于第 4.1 节中命题 2 的正交族 $\sqrt{\frac{1}{2}}c_0, c_n, s_n (n=1,2,3,\cdots)$, f 长度的平方与 f 的分量的平方和之间的关系. 事实上, 证明 (4) 和 (7) 中的 "$\leqslant$" 可用 "=" 替换是可能的 (但更困难). 则我们得到所谓的 **Parseval等式**, 它本质上是 "函数空间" 中的 Pythagorean 定理的无穷维形式. □

例 2 对 $f(x)=x(-L\leqslant x\leqslant L)$ 应用 Bessel 不等式证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{\pi^2}{6}. \tag{8}$$

解 在第 4.1 节的例 2 中已计算了 FS $f(x)$, 得

$$\text{FS } f(x)=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

(即 $a_n = 0,\ n \geqslant 0$ 和 $b_n = (-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi},\ n \geqslant 1$). 则由 Bessel 不等式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2 \leqslant \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x^2 dx = \frac{2L^2}{3},$$

然后以 $\frac{\pi^2}{4L^2}$ 相乘, 得 (8). Parseval 等式 (尚未证明) 隐含实际上 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

Bessel 不等式 (4) 告诉我们, 如果 $\|f\|$ 是有限的话, 和 $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛到某个有限值. 这意味着 a_n 和 b_n 当 $n \to \infty$ 时必都趋于零, 不然的话级数的无穷多项将大于某个正数, 且和数将是无穷的. 于是以下的结果是 Bessel 不等式的一个推论, 它在证明 Fourier 级数的收敛定理中是关键的:

Riemann-Lebesgue 引理 令 $f(x)$ 定义在 $[-L, L]$ 上. 假设 $\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx < \infty$ 以及 $f(x)$ 的 Fourier 系数存在. 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数当 $n \to \infty$ 时趋于零, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

和 (9)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0.$$

注记 虽然下面的考虑不能代替基于 Bessel 不等式的 Riemann-Lebesgue 引理的证明, 但它们有助于读者增进对为什么我们期望极限 (9) 成立的理解. 如果用 $\sin\frac{n\pi x}{L}$[或 $\cos\frac{n\pi x}{L}$] 乘 $f(x)$, 则得到一个图像在 $f(x)$ 和 $-f(x)$ 之间振荡的新函数, 如在图 2 中所示 (其中 $n = 6$).

当 $n \to \infty$ 时, 会认为 x–轴上方的阴影面积几乎抵消 x–轴下方的阴影面积. 换言之, 直观上认为 (9) 中极限是零. □

估计一个好函数的 Fourier 系数趋于零的速率通常是有用的. 下面的命题

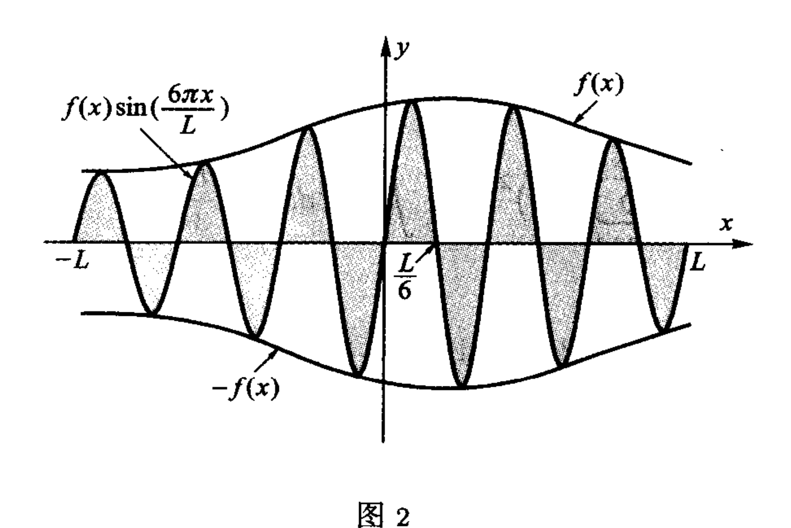


图 2

在这方面提供了一个样本结果. 它可由直接利用 Green 公式来证明.

命题 2 令 $f(x)$ 是定义在 $[-L,L]$ 上的 C^2 函数, 满足 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$. 令 M 是 $|f''(x)|$ 在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上的最大值. 则对所有的 $n\geqslant 1$,

$$|a_n|=\left|\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right|\leqslant\frac{2L^2M}{\pi^2n^2}$$

和 (10)

$$|b_n|=\left|\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right|\leqslant\frac{2L^2M}{\pi^2n^2}.$$

证明 利用 Green 公式 (参看第 4.1 节的例 6) 得到, 对 $n\geqslant 1$, 有

$$a_n=\frac{1}{L}\langle f,c_n\rangle=-\frac{1}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\langle f,c_n''\rangle=\frac{-L}{n^2\pi^2}\left([f'(x)c_n(x)-f(x)c_n'(x)]|_{-L}^{L}+\langle f'',c_n\rangle\right)$$

$$=\frac{-L}{n^2\pi^2}\int_{-L}^{L}f''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \tag{11}$$

其中由假设 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$, 端点值相抵消. 由 $|f''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}|\leqslant M$, 故得

$$|a_n|\leqslant\frac{L}{n^2\pi^2}\int_{-L}^{L}Mdx=\frac{2L^2M}{\pi^2n^2},$$

正如所期望的. 对 $|b_n|$, 在上述的论证中只要用 s_n 替代 c_n 即可. □

注记 注意到关于 $f(x)$ 的假设告诉我们, 如果区间 $[-L, L]$ 弯曲成圆, 使得 $-L$ 和 L 相等, 则 $f(x)$ 将是定义在该圆周上的 C^2 函数, 可能除了在点 $\pm L$ 之外, 由假设 $f(-L) = f(L)$ 和 $f'(-L) = f'(L)$ 得, 在其上函数仍然至少是 C^1 的. 一般说来, $f(x)$ 在圆周上越光滑, 当 $n \to \infty$ 时 Fourier 系数趋于零就越迅速. 例如, 如果 $f(x)$ 是 C^4 的, 且 $f(-L) = f(L)$, $f'(-L) = f'(L)$, $f''(-L) = f''(L)$ 和 $f^{(3)}(-L) = f^{(3)}(L)$, 则两次应用 Green 公式得

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2}\langle f'', c_n\rangle = -\frac{L^3}{n^4\pi^4}\langle f^{(4)}, c_n\rangle,$$

我们将有 $|a_n| \leqslant (\frac{2L^4}{n^4\pi^4}) \max_{-L\leqslant x\leqslant L} |f^{(4)}(x)|$, 对 b_n 有相同的结果. 更一般地, 如果 $f(x)$ 是 C^{2k}, 且 f 和它的 $2k-1$ 导数在 $x = \pm L$ 处相等, 则 f 的 Fourier 系数至少以 (常数) $\cdot\, n^{-2k}$ 衰减. 还注意到估计 (10) 通过利用 Riemann-Lebesgue 引理能被加强成如下. 先把 (10) 中的估计写成 $n^2|a_n| \leqslant 2L^2M/\pi^2$, 这表明, $n^2|a_n|$ 以一常数为上界. 事实上当 $n \to \infty$ 时 $n^2 a_n \to 0$, 因由 (11) 和把 (9) 用于 $f''(x)$,

$$n^2 a_n = \frac{-L}{\pi^2}\int_{-L}^{L} f''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \to 0.$$

(类似地, $n^2 b_n \to 0$.) 的确, 把 Bessel 不等式用于 $f''(x)$ 得到更强的结果 $\sum_{n=1}^{\infty} n^4(a_n^2 + b_n^2) < \infty$. □

关于收敛性证明的一些技术性准备

我们将需要下面用于收敛定理证明的公式.

命题 3 对任意使得 $\sin(\theta/2) \neq 0$ 的实数 θ, 有

$$\frac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{\sin([n+\frac{1}{2}]\theta)}{2\sin(\theta/2)}. \tag{12}$$

证明 (12) 的左边以 $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 相乘, 得

$$\sin(\frac{1}{2}\theta) + 2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos\theta + 2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(2\theta) + \cdots + 2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(n\theta). \tag{13}$$

我们要证明它等于 $\sin([n+\frac{1}{2}]\theta)$. 利用恒等式 $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta+\alpha) - \sin(\beta-\alpha)$, 有 $2\sin(\frac{1}{2}\theta)\cos(k\theta) = \sin([k+\frac{1}{2}]\theta) - \sin([k-\frac{1}{2}]\theta)$. 把这个结果用于 (13) 中的每

项, 得

$$\sin(\frac{1}{2}\theta)\ +[\sin(\frac{3}{2}\theta)-\sin(\frac{1}{2}\theta)]+[\sin(\frac{5}{2}\theta)-\sin(\frac{3}{2}\theta)]+\cdots$$
$$+[\sin([n+\frac{1}{2}]\theta)-\sin([n-\frac{1}{2}]\theta)]=\sin([n+\frac{1}{2}]\theta),$$

注意到所有的项都抵消, 除了 $\sin([n+\frac{1}{2}]\theta)$. □

注记 虽然证明了 (12), 但不清楚最先如何得到公式 (12). 一种推导是基于把 (12) 的左边看作是复几何级数 $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}$ 的实部. 该级数在去掉实部之前可求和和简化, 它的实部结果是 (12) 的右边 (参看第 7.1 节的习题 2). 注意到当用 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 去乘 (12) 的左边时, 产生一个 "分解" 和 "压缩" 的和或许是更简单的. □

定义 (n 次 Dirichlet 核) 对任意整数 $n\geqslant 0$, 定义

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi x}{L}+\cos\frac{2\pi x}{L}+\cdots+\cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{14}$$

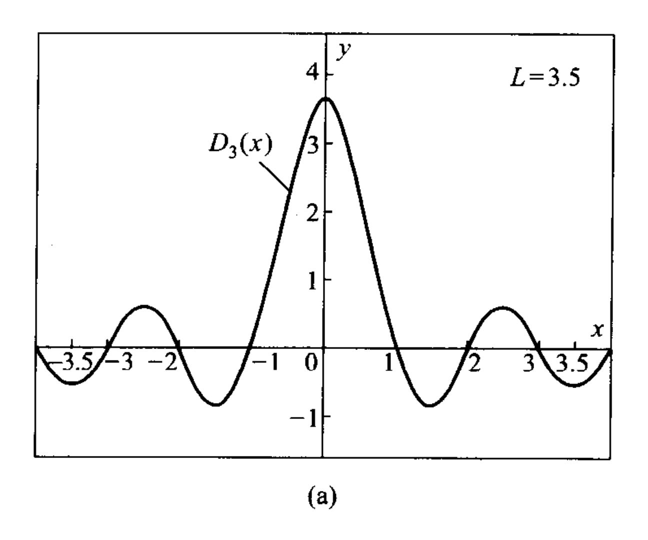
函数 $D_n(x)$ 称为 n 次 **Dirichlet核**.

作为命题 3 的一个推论以及由 (14) 得到的事实 $D_n(2kL)=n+\frac{1}{2}$, 我们有

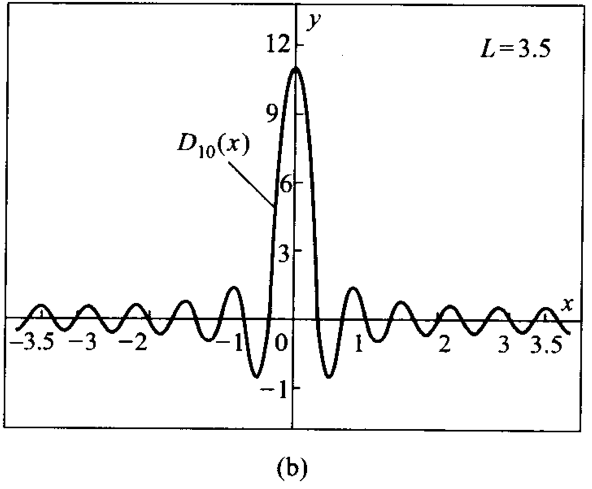
$$D_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}}{2\sin\dfrac{\pi x}{2L}}, & \sin\dfrac{\pi x}{2L}\neq 0,\\ n+\dfrac{1}{2}, & \sin\dfrac{\pi x}{2L}=0.\end{cases} \tag{14'}$$

从 (14) 我们看到, $D_n(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 因它是周期为 $2L$ 的周期函数的和. 因此, 如果对 $-L\leqslant x\leqslant L$ 绘出 $D_n(x)$ 的图像, 则就知道对所有 x 的图像. 对 $n=3$ 和 $L=3.5$, $D_n(x)(-L\leqslant x\leqslant L)$ 的图像在图 3(a) 中所示. 一般, $D_n(0)=n+\frac{1}{2}$, 且随着 n 的增加, 在 $x=0$ 处的峰点比较小的两侧波状部分显得更陡峭, 图 3(b) 绘出了 $n=10$ 的情形.

如果我们以 $D_n(x)$ 去乘一个适当好的函数 $h(x)$, 则对大的 n, $D_n(x)h(x)$ 的图像在 $x=0$ 附近与 $h(x)$ 原来的图像比较要相对陡峭. 因此, 如果从 $-L$ 到 L 对 $D_n(x)h(x)$ 积分 (如在下面的 (15)), 则我们期望当 $n\to\infty$ 时该积分的极限



(a)



(b)

图 3

将只依赖于 $h(x)$ 在 $x=0$ 附近的值. 下面的结果把这个期望严格化了. 我们将看到该结果是为什么一个 "好" 函数的 Fourier 级数收敛到该函数的主要理由. 有些读者可能意识到事实: 等式 (15) 本质上表明, 当 $n\to\infty$ 时, $L^{-1}D_n(x)$ 趋于 Dirac 函数 $\delta(x)$(参看第 7.5 节关于 $\delta(x)$ 的讨论).

命题 4 设 $h(x)$ 是 $-L\leqslant x\leqslant L$ 的 C^1 函数. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}D_n(x)h(x)dx=h(0), \tag{15}$$

其中 $D_n(x)$ 是 n 次 Dirichlet 核 (14).

证明 需要证明差

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}D_n(x)h(x)dx-h(0) \tag{16}$$

当 $n\to\infty$ 时趋于零. 我们将利用 Riemann-Lebesgue 引理来证明, 但先需要把 (16) 中的这些项并入一个积分. 注意到

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}D_n(x)dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi x}{L}+\cdots+\cos\frac{n\pi x}{L}]dx=1,$$

因所有的余弦积分等于零. 用常数 $h(0)$ 相乘, 得

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}h(0)D_n(x)dx=h(0). \tag{17}$$

利用 (17) 可把差 (16) 重写成如下:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_n(x)h(x)dx - h(0) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_n(x)h(x)dx - \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_n(x)h(0)dx$$
$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_n(x)[h(x) - h(0)]dx. \tag{18}$$

为对最后的积分应用 Riemann-Lebesgue 引理, 我们用 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 和 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 来表示 $D_n(x)$:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{\sin([n+\frac{1}{2}]\frac{\pi x}{L})}{2\sin\frac{\pi x}{2L}} = \frac{\sin\frac{\pi x}{2L}\cos\frac{n\pi x}{L} + \cos\frac{\pi x}{2L}\sin\frac{n\pi x}{L}}{2\sin\frac{\pi x}{2L}} \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2}\cot\frac{\pi x}{2L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

因此, (18) 中的最后积分可写成以下积分的和

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}[h(x)-h(0)]\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{\frac{1}{2}\cot\frac{\pi x}{2L}[h(x)-h(0)]\}\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{19}$$

$\frac{1}{2}[h(x)-h(0)]$ 是 $[-L, L]$ 中连续的 (事实上是 C^1 的), 所以它满足 Riemann-Lebesgue 引理的假设. 因此 (19) 中的第一个积分当 $n\to\infty$ 时趋于零. (19) 中的第二个积分稍微有点问题, 因 $\cot(\pi x/2L)$ 在 $x=0$ 处是无穷大, 因而在大括号内的函数在 $x=0$ 附近必须分析得更严密. 利用 L'Hospital 法则来计算该函数在 $x\to 0$ 的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{2\tan\frac{\pi x}{2L}} = \lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{\sec^2\frac{\pi x}{2L}\cdot\frac{\pi}{L}} = \frac{L}{\pi}h'(0),$$

其中已经利用了 $h(x)$ 是 C^1 的事实. 因此, (19) 大括号中的函数在 $x=0$ 附近是好函数, 且 Riemann-Lebesgue 引理也可用于 (19) 中第二个积分. 于是, (16)(它与 (19) 相同) 当 $n\to\infty$ 时趋于 0. □

第一个收敛定理

现在我们准备证明第一个收敛定理. 从证明将明白, 要点事实上是刚证明的命题 4. 换言之, Fourier 级数的收敛性主要由于事实: 当一个 C^1 函数以 N

次 Dirichlet 核作为权的积分时, 结果逼近该函数在 0 处的值.

定理 1(Fourier 级数的点收敛) 设 $f(x)$ 是 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的 C^1 函数, 假设$f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$ [使得 $f(x)$ 可认为是长度为 $2L$ 的圆周上的 C^1 函数.] 则对 $[-L,L]$ 中所有的 x, 有 FS $f(x)=f(x)$. 换言之, 如果 FS $f(x)$ 的 N 项部分和是

$$S_N(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}], \tag{20}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(y)\cos\frac{n\pi y}{L}dy \quad 和 \quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(y)\sin\frac{n\pi y}{L}dy, \tag{21}$$

则 (对任意 $[-L,L]$ 中固定的 x),

$$\text{FS } f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}]=\lim_{N\to\infty}S_N(x)=f(x). \tag{22}$$

证明 根据命题 4 中的 (15), 我们证明极限 (22) 存在. 把 $S_N(x)$ 写成含有 D_N 的积分. 利用 $S_N(x)$ 的定义 (20) 且保持 x 固定, 使得 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 和 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 是常数, 来计算:

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{1}{2}\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(y)dy\}+\sum_{n=1}^{N}[\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(y)\cos\frac{n\pi y}{L}dy\}\cos\frac{n\pi x}{L}+\\
&\quad \{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(y)\sin\frac{n\pi y}{L}dy\}\sin\frac{n\pi x}{L}]\\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}f(y)dy+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{L}+\\
&\quad \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{L}\}f(y)dy\\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}f(y)dy+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi(y-x)}{L})f(y)dy\\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos(\frac{n\pi(y-x)}{L})]f(y)dy=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}D_N(y-x)f(y)dy.
\end{aligned}$$

因此, $S_N(x)$ 简洁地表示为涉及 N 次 Dirichlet 核 D_N 的积分

$$S_N(x) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_N(y-x)f(y)dy.$$

于是, 为建立 (22), 剩下来证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_N(y-x)f(y)dy = f(x). \tag{23}$$

这将利用命题 4 来证明, 但需要重写 (23) 的积分, 使得可直接运用命题 4. 注意到 $D_N(y-x)$ 和 $\tilde{f}(y)$ ($f(y)$ 的周期延拓) 都是 y 的以 $2L$ 为周期的周期函数. 利用对 $[-L,L]$ 中所有的 y, $f(y)=\tilde{f}(y)$ 的事实, 还由命题 1 (其中 c 是固定值 x), 我们得到

$$\int_{-L}^{L} D_N(y-x)f(y)dy = \int_{-L}^{L} D_N(y-x)\tilde{f}(y)dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_N(y-x)\tilde{f}(y)dy. \tag{24}$$

在最后的积分, 把积分变量从 y 改变成 $z=y-x$, 得

$$\int_{-L+x}^{L+x} D_N(y-x)\tilde{f}(y)dy = \int_{-L}^{L} D_N(z)\tilde{f}(z+x)dz. \tag{25}$$

现令 $h(z)\equiv\tilde{f}(z+x)$. 利用 (24) 和 (25), 得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_N(y-x)f(y)dy = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_N(z)h(z)dz. \tag{26}$$

为对最后的极限应用命题 4, 需要知道 $h(z)$ 是 z 的 C^1 函数. 因 f 是 C^1 的, 且 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$. 故易得 $\tilde{f}$ 是 C^1 的. 则 $h(z)=\tilde{f}(z+x)$ 是 C^1 的, 正如所需要的. 因此, 命题 4 表明 (26) 中最后的极限是 $h(0)=\tilde{f}(0+x)=\tilde{f}(x)=f(x)$, 因 x 属于 $[-L,L]$. 于是 (23) 和 (22) 得证. □

一致收敛

定理 1 在某些方面可作一些改进. 虽然定理 1 表明, 对适当的函数 f, 有 FS $f(x)=f(x)$, 但没有指出需要多少项能使 $S_N(x)$ 在 $f(x)$ 的一个确定的误差 ϵ 之内. 的确, 存在这样的函数, 使得 FS $f(x)=f(x)$, 然而不存在 N 确保 $|S_N(x)-f(x)|\leqslant\epsilon$ 对 $[-L,L]$ 中所有的 x 成立 (参看例 6, 并以 $\bar{f}$ 替换 f). 换言

之, N 会是任意大, 且依赖于 x. 为解释这种情况, 我们叙述下面的定义.

定义 函数列 $S_1(x),\ S_2(x),\cdots$ 在区间 $[-L,L]$ 上**一致收敛**到 $f(x)$, 如果

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f(x)-S_N(x)|\Big)=0, \tag{27}$$

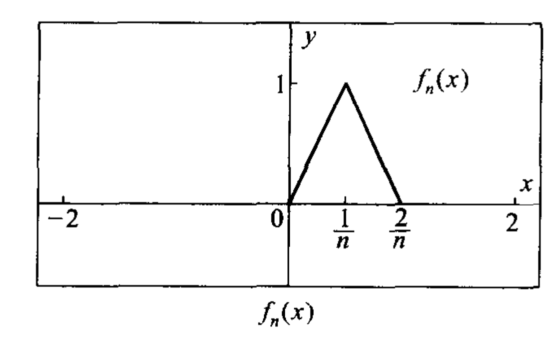
即, $S_N(x)$ 和 $f(x)$ 的图像之间最大垂直间距当 $N\to\infty$ 时趋于 0. 函数列$S_1(x),S_2(x),\cdots$ **逐点收敛**到 $f(x)$, 如果对 $[-L,L]$ 中每个固定的 x, 有

$$\lim_{N\to\infty}|f(x)-S_N(x)|=0 \quad 或等价地 \quad \lim_{N\to\infty}S_N(x)=f(x).$$

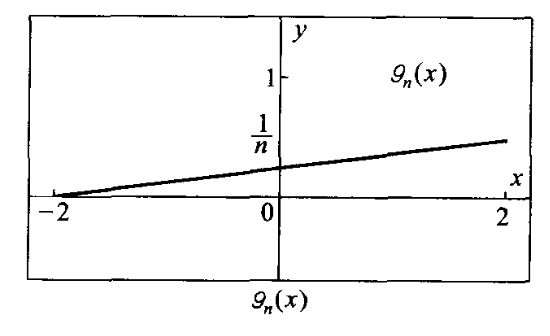
(对知道这种区别的读者, (27)中的 "max" 应理解成 "sup" 或 "最小上界", 但不难理解, 这里我们不打算过多地讨论这点.)

注记 虽然我们主要讨论 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和列 $S_1(x),S_2(x),\cdots$, 但上述定义对任意定义在 $[-L,L]$ 上的函数列仍然有意义. 而且显然一致收敛到 $f(x)$ 的函数列也将逐点收敛到 $f(x)$. 然而, 下个例子说明逐点收敛不必隐含一致收敛. 最后 (参看定理 4) 我们将证明如果 $f(x)$ 是连续和 "分段"C^1 的, 满足 $f(-L)=f(L)$, 则 $S_1(x),S_2(x),\cdots$ 将一致收敛到 $f(x)$. 然而, 定理 1 只告诉我们该函数列是逐点收敛到 $f(x)$. □

例 3 令 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 定义在 $[-2,2]$ 上, 它们的图像如图 4,



$f_n(x)$



$g_n(x)$

图 4

其中 $n=1,2,3,\cdots$. 证明函数列 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots$ 和 $g_1(x),g_2(x),g_3(x),\cdots$ 都逐点收敛到零函数 $h(x)\equiv 0$. 然而, 证明函数列 $g_1(x),g_2(x),g_3(x),\cdots$ 在 $[-2,2]$ 上一致收敛到 $h(x)$, 而函数列 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots$ 在 $[-2,2]$ 上并不一致收敛到 $h(x)$.

解 我们有 $g_n(x) = \frac{x+2}{4n}$, 所以对 $[-2,2]$ 中的每个 x, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+2}{4n} = 0 = h(x)$, 这表明 $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \cdots$ 逐点收敛到 $h(x)$. $g_n(x)$ 的图像表明, 对 $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $|h(x) - g_n(x)|$ 的最大值是 $\frac{1}{n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\max_{-2\leqslant x\leqslant 2}|h(x)-g_n(x)|\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

然而, 从 $f_n(x)$ 的图像我们看到, 对每个 n, $|h(x) - f_n(x)|$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值是 1, 且在 $x = \frac{1}{n}$ 处取到 (正好尖峰下面). 因此,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\max_{-2\leqslant x\leqslant 2}|h(x)-f_n(x)|\Big) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

于是 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots$ 不一致收敛到 $h(x)$. 然而吃惊的是 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots$ 确实逐点收敛到 $h(x)$. 的确, 令 x_0 是 $[-2,2]$ 中任一固定的 x 值. 先假设 $-2 \leqslant x_0 \leqslant 0$, 则 $f_n(x_0) = 0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0 = h(x_0). \tag{28}$$

现假设 $0 < x_0 \leqslant 2$. 则可找到一整数 N(例如, 选 $N > \frac{2}{x_0}$) 使得对所有的 $n \geqslant N$, x_0 不在区间 $(0, \frac{2}{n})$ 内. 则对所有的 $n \geqslant N$, $f(x_0) = 0$ (为什么?). 换言之, (28) 对 $0 < x_0 \leqslant 2$ 也成立! 由于 x_0 是固定的, 故不允许取 $x_0 = \frac{1}{n}$ (即 x_0 不依赖于 n). □

注记 在应用中期望的通常是部分和 $S_N(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 例如, 为了应用最大值原理来证明: 真实初始温度 $f(x)$ 的近似 $S_N(x)$ 的热问题的解 $u_N(x,t)$ 在真实解的 ϵ 之内, 这需要知道 $|f(x) - S_N(x)|$ 在杆上的最大值小于 ϵ(参看第 3.2 节的定理 3). 这不能用逐点收敛来保证, 而要用一致收敛来保证, 如果取 N 足够大的话. □

正如我们将看到的 (参考定理 4), 定理 1 中的假设实际上就得出一致收敛是足够强的. 然而, 如果对这些条件加强一些, 如像以下结果, 可以有更容易的证明.

定理 2 设 $f(x)$ 是 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的 C^2 函数, 且 $f(-L) = f(L)$ 和 $f'(-L) = f'(L)$. 则 FS $f(x)$ 一致收敛到 $f(x)$[即 FS $f(x)$ 的部分和列 $S_1(x), S_2(x), \cdots$ 一致收敛到 $f(x)$]. 的确, 用 (20) 的符号, 对 $[-L, L]$ 中所有的 x, 有

$$|f(x) - S_N(x)| \leqslant \frac{4L^2M}{\pi^2 N}, \quad \text{其中} \quad M = \max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f''(x)|. \tag{29}$$

证明 由定理 1 得知 FS $f(x)=f(x)$. 因此，有

$$f(x)-S_N(x)=\text{FS } f(x)-S_N(x)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

和

$$|f(x)-S_N(x)|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\leqslant\frac{4L^2M}{\pi^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

其中我们已经用了命题 2 的 (10). 剩下来证明 $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{N}$. 为此, 考虑函数 $\frac{1}{x^2}$ 的图像 (参看图 5).

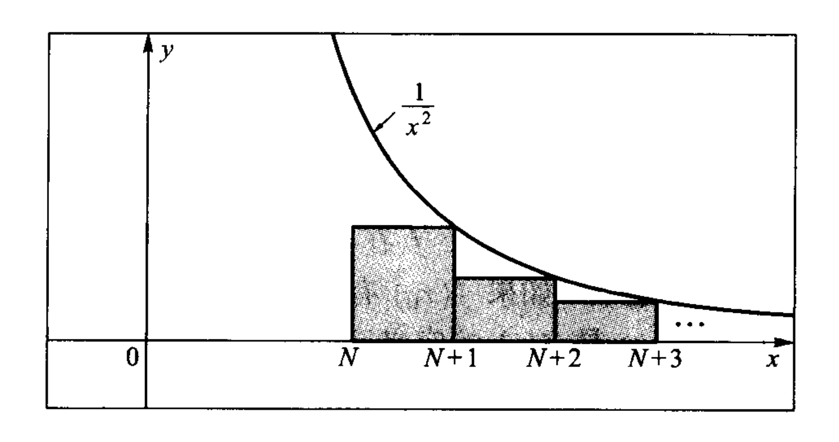


图 5

和数 $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是阴影矩形面积的和, 它不超过曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 的面积 $\int_N^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{N}$, 正如所期望的. □

注记 在第 4.1 节的例 5 和习题 9 中我们已经分别对函数 x^3-x 和 $(x^2-1)^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 用了估计式 (29). 在这两种情形中, 我们发现通过利用由显式计算的 Fourier 系数的积分比较可获得好得多的估计. 如果一个函数的 Fourier 系数可计算, 用这种方法计算, 而不是用 (29), 很可能得到更好的误差估计. (29) 中潜在的不足可追溯到 (10) 的不足, 这种不足在命题 2 后面的注记中已经注意到. 然而, 定理 2 对所有满足假设的函数建立了 FS $f(x)$ 到 $f(x)$ 的一致收敛性, 不必对无穷多这样的函数分别对每个函数来建立这种事实. □

分段 C^1 函数的 Fourier 级数的收敛性

人们常常对不是 C^1, 或不满足 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$ 的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数感兴趣. 例如, 如果 $f(x)=x$, 则 $f(-L)\neq f(L)$. 在第 4.1 节的例 2 中计算了该函数的 Fourier 级数, 且从部分和的图像 (参看第 4.1 节的图

1 和图 2) 显示 FS $f(x)$ 是收敛到 $f(x)$, 除了在 $x = \pm L$ 处. 但这不是由定理 1 得到的. 的确, 在练习 4.1 的习题 4 到习题 8 中, 没有一个函数满足定理 1 的假设. 然而, 通过绘出部分和将显示这些函数的 Fourier 级数收敛到这些函数, 除了在图像中的 "折断点", 在其上 Fourier 级数收敛到平均值. [如果 $f(-L^+) \neq f(L^-)$, 则认为它在 $x = \pm L$ 处为 "折断点".] 这些函数都是我们下面要精确定义的分段 C^1 函数的例子. 我们将建立一个可应用于这种函数的收敛定理 (参看定理 3).

回忆一下, 如果一个函数定义在含有 x_0 的某个开区间上, 则我们称 "$f(x_0^-)$ 是 x 从左边趋于 x_0 时 $f(x)$ 的左极限", 如果通过要求 x 充分靠近, 但小于 x_0, 可使 $f(x)$ 任意接近 $f(x_0^-)$ 的话. 类似地, 可定义右极限 $f(x_0^+)$. 写成

$$f(x_0^-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \quad 和 \quad f(x_0^+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x).$$

这些极限, 如果存在的话, 不必依赖于 f 在 x_0 的值. 的确, 即使 $f(x_0)$ 没有定义, $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 可以存在. 如果 $f(x_0)$ 有定义且 $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$, 则 f 在 x_0 是**连续的**. 如果 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间的左端点, 则仍然可定义 $f(x_0^+)$. 类似地, 如果 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间的右端点, $f(x_0^-)$ 可定义.

定义　函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**分段连续的**, 如果 $f(x)$ 满足以下条件:

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除去有限多个点之外有定义且是连续的.

(B) 对 (a,b) 中所有的 x_0, 极限 $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 存在.

(C) $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在.

定义　$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上**分段**C^1 的, 如果 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是分段连续的.

注记　如果 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是分段连续的, 则 $f(x)$ 自动地在 $[a,b]$ 上是分段连续的, 但我们不费心去证明它. □

图像在图 6 中显示的函数展示了一个分段 C^1 函数的许多病态点.

有许多不是分段连续的函数的例子. 像 $\frac{1}{x}(-1 \leqslant x \leqslant 1, x \neq 0)$ 的无界函数不可能是分段连续的, 因为在 "爆破" 处 (例如, $\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处爆破) 左 (或右) 极限不存在 (即, 是无穷的). 存在有界函数不是分段连续的. 例如, $f(x) =$

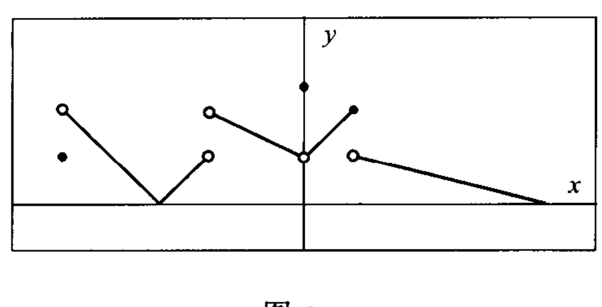


图 6

$\sin\frac{1}{x}(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \neq 0)$ 是有界的 (因 $|f(x)| \leqslant 1$), 但 $f(0^+)$ 和 $f(0^-)$ 不存在, 因当 $x \to 0$ 时 $\sin\frac{1}{x}$ 在值 ± 1 之间振荡无穷多次. □

例 4 求两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 它们的图像是叠合的 (比如, 互为反射), 使得 $f(x)$ 是 C^∞ 且 $g(x)$ 甚至不是分段 C^1 的.

解 令 $f(x) = x^3$ 和 $g(x) = \sqrt[3]{x}$. 它们的图像是叠合的, 因反函数的图像是在直线 $y = x$ 上的互为反射. 显然 $f(x)$ 是 C^∞ 的, 但注意到 $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ 当 x 从任意一边趋于零没有极限. □

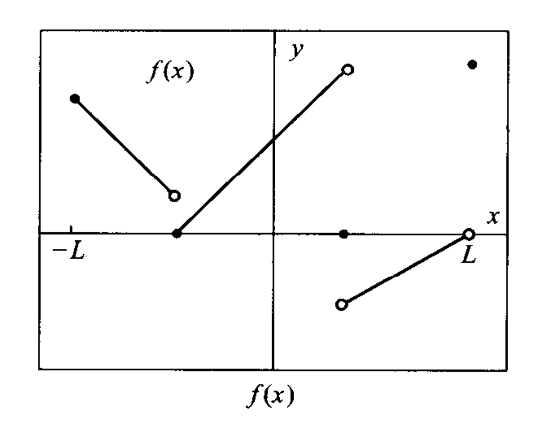
我们引入一个最后定义, 该定义用来以公式表示分段 C^1 函数的 Fourier 级数的收敛定理是方便的.

定义 令 $f(x)$ 是区间 $[-L, L]$ 上分段 C^1 函数. 通过在有限多个点上改变 $f(x)$ 的值, 我们得到**修正函数** $\bar{f}(x)$, 它定义如下:

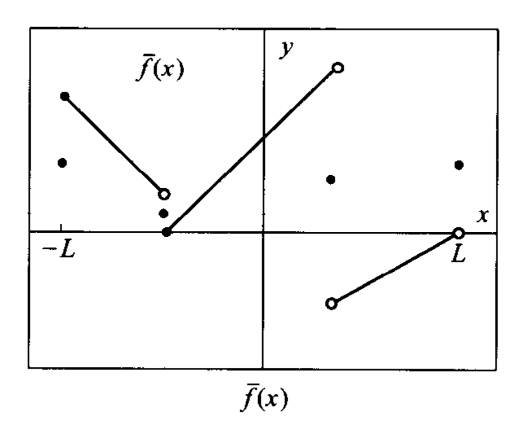
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & -L < x < L \\ \frac{1}{2}[f(-L^+) + f(L^-)], & x = \pm L. \end{cases} \tag{30}$$

换言之, 在 $(-L, L)$ 中所有 $f(x)$ 的连续点上 $\bar{f}(x)$ 与 $f(x)$ 相同, 而在 $(-L, L)$ 内 $f(x)$ 的间断点上 $\bar{f}(x)$ 是 $f(x)$ 的左右极限的平均. 如果把区间弯曲成一圆周, $\bar{f}(x)$ 在 $x = \pm L$ 处的值也可看作左右极限的平均.

例 5 设 $f(x)$ 具有图 7 左边显示的图像.



f(x)



$\bar{f}(x)$

图 7

经修正的函数 $\bar{f}(x)$ 的图像在图 7 的右边绘出.

定理 3 设 $f(x)$ 是 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上分段 C^1 函数, $\bar{f}(x)$ 是 (30) 中的修正的函数. 则对 $[-L, L]$ 中所有的 x, 有 FS $f(x) = \bar{f}(x)$. 的确, 我们有

$$\text{FS } f(x) = \bar{\bar{f}}(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{31}$$

其中 $\bar{\bar{f}}(x)$ 是修正函数 $\bar{f}(x)$ 的周期延拓.

证明 该证明过程与定理 1 的直到得到 (23) 的证明过程相同. 这里, 作为替换 (23), 我们证明对 $[-L, L]$ 中每个 x, 以下极限存在

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} D_N(y-x) f(x) dx = \bar{f}(x). \tag{32}$$

令 $h(z) \equiv \bar{\bar{f}}(z+x)$, (32) 中的极限等于极限

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} D_N(z) h(z) dz = h(0). \tag{33}$$

的确, 用把 (23) 简化成命题 4 相同的方法可以把 (32) 转化成 (33). 然而, 我们不能简单地应用命题 4, 因为现在 h 未必是 C^1 的. 不过, 我们知道 (由于 $\bar{f}$ 是分段 C^1 的, 而 h 是 $\bar{\bar{f}}$ 的平移) 极限 $h(0^+), h(0^-), h'(0^+)$ 和 $h'(0^-)$ 都存在, 且 $h(0) = \frac{1}{2}[h(0^-) + h(0^+)]$. 因此, 为证明 (33), 只剩下证明命题 4 的类似结果 (参看下面的命题 5). 就像在定理 1 的证明那样, 这等价于期望的 (31). □

命题 5 设 $h(x)$ 是 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上分段 C^1 函数. 如果 D_n 表示 n 次 Dirichlet 核 (14), 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} D_n(x)h(x)dx = \frac{1}{2}[h(0^-) + h(0^+)]. \tag{34}$$

证明 由以下两个结果相加得到极限 (34):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{0} D_n(x)h(x)dx = \frac{1}{2}h(0^-) \quad \text{和} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{L} \int_{0}^{L} D_n(x)h(x)dx = \frac{1}{2}h(0^+).$$

我们证明第二个极限, 第一个极限的证明类似. 注意到

$$\frac{1}{L} \int_0^L D_n(x)dx = \frac{1}{L} \int_0^L \{\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi x}{L} + \cdots + \cos\frac{n\pi x}{L}\}dx = \frac{1}{2},$$

以常数 $h(0^+)$ 相乘, 得 $\frac{1}{L}\int_0^L D_n(x)h(0^+)dx = \frac{1}{2}h(0^+)$. 于是,

$$\frac{1}{L} \int_0^L D_n(x)h(x)dx - \frac{1}{2}h(0^+) = \frac{1}{L} \int_0^L D_n(x)[h(x) - h(0^+)]dx, \tag{35}$$

只要证明右边的积分当 $n \to \infty$ 时趋于 0. 为此, 如同命题 4 的证明, 写出 $D_n(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2}\cot\frac{\pi x}{2L}\sin\frac{n\pi x}{L}$. 如同前面进行的 (参看 (19)), 把积分 (35) 分解成两个积分, 然后把 Riemann-Lebesgue 引理应用于每个部分. 这时应用 L'Hospital 法则的单边形式得到

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{h(x) - h(0^+)}{2\tan\frac{\pi x}{2L}} = \frac{L}{\pi}h'(0^+).$$

因此, 如前把 Riemann-Lebesgue 引理应用于两个积分. 于是, (35) 的右边当 $n \to \infty$ 时趋于零. □

例 6 利用定理 3 绘出函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant L \\ 0, & -L \leqslant x < 0 \end{cases} \tag{36}$$

的 Fourier 级数 FS $f(x)$($-4L \leqslant x \leqslant 4L$). 直接验证在 $f(x)$ 的间断点 FS $f(x)$ 收敛到经修正的函数, 但证明在 $[-L, L]$ 上 FS $f(x)$ 收敛到 $\bar{f}(x)$ 不是一致的.

解 为绘出 FS $f(x)$ 的图像不必计算 Fourier 系数. 由定理 3, 有 FS $f(x) = \tilde{\bar{f}}(x)$, $\tilde{\bar{f}}(x)$ 的图像在图 8 中. $f(x)$ 的 Fourier 级数在练习 4.1 的习题 4(a) 中已计算, 为

$$\text{FS } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-1)^{n+1}]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{37}$$

我们有 FS $f(0) = \frac{1}{2}$, 此为经修正的函数 $\bar{f}(x)$ 在 $x = 0$ 的值 $\frac{1}{2}[f(0^-)+f(0^+)]$. 还注意到 FS $f(\pm L) = \frac{1}{2} = \bar{f}(\pm L)$. 以下可证明这里的收敛不是一致的. 令 $S_N(x)$ 是 (37) 的 N 项部分和. 因 $S_N(0) = \frac{1}{2}$ 且 $S_N(x)$ 是连续的, 可知 $S_N(\epsilon)$ 必接近 $\frac{1}{2}$, 如果 $|\epsilon|$ 是足够小的话. 特别, 如果取 $\epsilon(0 < \epsilon < L)$ 足够小, 使得 $S_N(\epsilon) < \frac{3}{4}$. 然而, $\bar{f}(\epsilon) = f(\epsilon) = 1$, 故 $|S_N(\epsilon) - \bar{f}(\epsilon)| > \frac{1}{4}$ (即 S_N 和 $\bar{f}$ 图像之间最大垂直偏离总是大于 $\frac{1}{4}$). 对一致收敛, 将需要当 $N \to \infty$ 时具有最大垂直偏离趋于 0. 几何上看, 这是不可能的, 因连续函数 $S_N(x)$ 的图像在 $x = 0$ 的左边附近时接近 $y = 0$, 而在 $x = 0$ 的右边时接近 $y = 1$. □

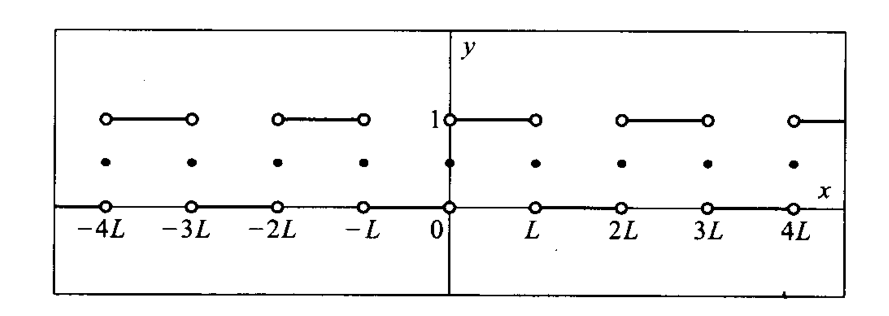


图 8

注记 1 更一般地, 可以证明连续函数列 [例如, $S_N(x)$] 不可能一致收敛到不连续函数 [例如, 例 6 中的 $\bar{f}(x)$]. 因此, 一个函数的 Fourier 级数不可能一致收敛到 $\bar{f}(x)$, 如果 $\bar{f}(x)$ 是不连续的话.

注记 2 (Gibbs 现象) 在例 6 中, 还存在 $S_N(x)$ 收敛到 $\bar{f}(x)$ 中更微妙的非一致性. 在以下的图 9 中, 注意 $S_7(x)$ 的图像 (其中已取 $L = 2$) 随着它从原点向上升时超过数值 1.

$S_7(x)$ 的最大值在 $x = 0.25$ 处取到, 它大约为 1.0921. 人们可能认为 $S_N(x)$ 的突起部分随着 $N \to \infty$ 将减少到零. 然而, 情况不是这样. 的确, $S_{2n-1}(x)$ 的 "突起最大值" 在 $x = \frac{1}{n}$ 取到, 且

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx \approx 1.0895.$$

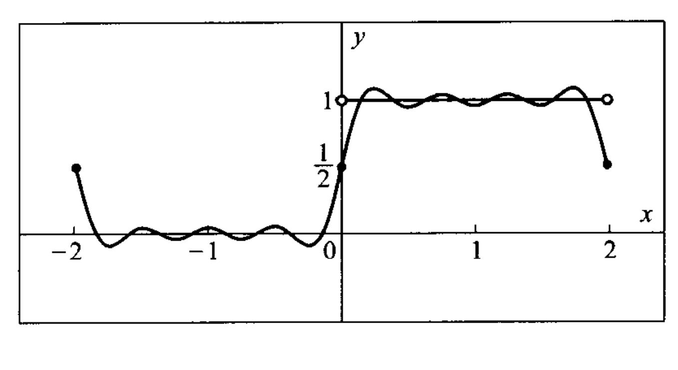


图 9

在习题 12 我们把读者引到这个结论. 在 $f(x)$ 的图像的跳跃点处的突起偏差不会趋于 0 的这种一般事实称为**Gibbs 现象**. Gibbs 现象不与定理 3 冲突. 对分段 C^1 函数 $f(x)$, $S_N(x)$ 的突起最大值不在 x 的固定值发生, 它不依赖于 N. 在任意固定的 x, $S_N(x)$ 收敛到 $\tilde{\bar{f}}(x)$. 这与例 3 中的函数列 $f_n(x)$ 的点点收敛 (但不是一致的) 情形很类似. □

满足 $f(-L)=f(L)$ 的连续分段 C^1 函数 $f(x)$ 的 $FS\ f(x)$ 的一致收敛性

定理 3 在比定理 2 更弱的假设下提供了 FS $f(x)$ 点点收敛到 $\tilde{\bar{f}}(x)$ 的结果. 然而, 定理 2 中的收敛是一致的. 上述例 6 和注记表明 $[-L,L]$ 上分段 C^1 函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数不可能一致收敛到 $\tilde{f}(x)$, 如果 $f(x)$ 有间断点 (即, 有跳跃) 或 $f(-L)\neq f(L)$ 的话. 如果 $f(x)$ 是分段 C^1 的, 在 $[-L,L]$ 上没有间断点且 $f(-L)=f(L)$, 则仍然希望 FS $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 内一致收敛到 $f(x)$. 下面的定理 4 提供了这种函数的 FS $f(x)$ 对 $f(x)$ 的一致收敛性. 定理 4 比定理 2 优越在于 $f(x)$ 不必是 C^2(或甚至不是 C^1) 的.

定理 4 设 $f(x)$ 是 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上连续的分段 C^1 函数, 使得 $f(-L)=f(L)$. 则 FS $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 换言之,

$$\max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f(x)-S_N(x)|\to 0,\quad N\to\infty,\tag{38}$$

其中 $S_N(x)$ 是 FS $f(x)$ 的 N 项部分和.

注记 注意没有假设 $f'(x)$ 处处连续, 所以 $f(x)$ 的图像可能会有角点. 然而, 连续性假设确保 $f(x)$ 的图像不会有断裂. 而且, 假设 $f(-L)=f(L)$ 确保周期延拓 $\tilde{f}(x)$ 没有断裂 (即 $f(x)$ 生成周长为 $2L$ 的圆周上的连续函数). □

证明 从定理 3 我们已经知道, 对 $[-L, L]$ 中的 x, 有 FS $f(x) = f(x)$, 由关于 $f(x)$ 的连续性假设, 经修正的函数 $\bar{f}(x)$ 等于 $f(x)$. 因此,

$$f(x) - S_N(x) = \text{FS } f(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{39}$$

如能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty,. \tag{40}$$

则级数 (40) 的 "尾项"$\sum_{n=N+1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ 当 $N \to \infty$ 时趋于 0, 且由 (39), 得

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f(x) - S_N(x)|\Big) \leqslant \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)\Big) = 0, \tag{41}$$

正如 (38) 所要求的. 于是, 只消证明 (40). 为此, 需要检查 Fourier 系数 a_n 和 b_n. 对 b_n, 有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{1}{L}f(x)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L} + \\ &\quad \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{L}{n\pi}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L}{n\pi}A_n, \end{aligned} \tag{42}$$

其中 A_n 是 $f'(x)$ 的 Fourier 系数, 且利用了 "分部积分" 对连续分段 C^1 函数也是有效的事实. 类似地, 我们有

$$a_n = -\frac{L}{n\pi}B_n = -\frac{L}{n\pi}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{43}$$

因 $f'(x)$ 是分段连续的, 满足 Bessel 不等式的假设, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2) \leqslant \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f'(x)|^2 dx - \frac{1}{2}A_0 < \infty. \tag{44}$$

任给实数列 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_k$, **Cauchy-Schwarz不等式**(参看习题 9) 表明

$$|\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_k\beta_k| \leqslant (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \cdots + \beta_k^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{45}$$

对 $k=3$, (45) 正是熟知的结果 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqslant\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|$, 但该结果对任意 k 成立. 特别, 考虑数列

$$|A_1|,|B_1|,|A_2|,|B_2|,|A_3|,|B_3|,\cdots \quad 和 \quad \frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\cdots.$$

由 (45), 应用到这对数列, 对任意 $k=1,2,3,\cdots$ 我们有,

$$\begin{aligned}&|A_1|+|B_1|+|A_2|\cdot\frac{1}{2}+|B_2|\cdot\frac{1}{2}+\cdots+|A_k|\cdot\frac{1}{k}+|B_k|\cdot\frac{1}{k}\\ \leqslant\,&(|A_1|^2+|B_1|^2+|A_2|^2+|B_2|^2+\cdots+|A_k|^2+|B_k|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\big(2\cdot\\ &[(\frac{1}{1})^2+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{k})^2]\big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$, 根据 (44) 得 (利用例 2 的结果 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{\pi^2}{6}$),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|A_n|+|B_n|)\leqslant\big(\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2+B_n^2)\big)^{\frac{1}{2}}\cdot\big(2\cdot\frac{\pi^2}{6}\big)^{\frac{1}{2}}<\infty. \tag{46}$$

因此, 利用 (42),(43) 和 (46), 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)=\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|A_n|+|B_n|)<\infty,$$

这给出了结果 (40), 由此 (41) 成立. □

注记 (Fejér 定理) $[-L,L]$ 上存在连续 (但不是分段 C^1) 函数 $f(x)$, 满足 $f(-L)=f(L)$, 它的 Fourier 级数在 $[-L,L]$ 上无穷多个点上是发散的 (参看 [Coppel]). 然而, 在任意给定的误差之内, 可能存在一个三角多项式一致逼近这样的函数. 换言之, 任给 $\epsilon>0$, 存在三角多项式, 设为

$$P_N(x)=c_0+\sum_{n=1}^{N}c_n\cos\frac{n\pi x}{L}+d_n\sin\frac{n\pi x}{L},$$

使得对 $[-L,L]$ 中所有的 x, 有 $|f(x)-P_N(x)|\leqslant\epsilon$. 如果 FS $f(x)$ 不一致收敛到 $f(x)$, 则会不存在 FS $f(x)$ 的一个部分和 $S_N(x)$, 使得 $|f(x)-S_N(x)|\leqslant\epsilon$. 然而,

下面值得注意的结果在 [Bari, Vol I, p.135] 中得到证明.

定理 5 (Fejér 定理) 设 $f(x)$ 是定义在 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的连续 (不必是分段 C^1) 函数, 使得$f(-L) = f(L)$. 令 $S_N(x)$ 表示 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 (从 $n = 0$ 到 N). 令$A_n(x) = \frac{1}{N+1}(S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_N(x))$(即 FS $f(x)$ 的前 $N+1$ 项部分和的平均). 则三角多项式列 $A_0(x), A_1(x), A_2(x), \cdots$ 在 $[-L, L]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 虽然函数列$S_0(x), S_1(x), S_2(x), \cdots$ 甚至可能不是逐点收敛到 $f(x)$.

可容易证明 (参看习题 13) 在所有 N"次" 三角多项式 $P_N(x)$ 中, $S_N(x)$ 是使平均平方误差 $\int_{-L}^{L} |f(x) - P_N(x)|^2 dx$ 最小的. 然而, Fejér 定理表明 $S_N(x)$ 不会使 "一致误差"$\max_{-L\leqslant x\leqslant L} |f(x) - S_N(x)|$ 在所有次数为 N 的三角多项式中最小, 正如习题 14 中的一个具体反例所示. □

概要 4.2

1. Bessel 不等式: 令 $f(x)$ 定义在 $[-L, L]$ 上, 并假设 $\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx$ 存在且有限. 假设 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad \text{和} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{S1}$$

存在, 使得可形式定义 (可能不收敛)FS $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$. 则有 Bessel 不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx. \tag{S2}$$

如果不等式用等式替换, 它称为 **Parseval等式**. 习题 5—习题 7 对连续分段 C^1 函数 $f(x)$ 证明了 Parseval 等式.

2. Riemann-Lebesgue 引理: 令 $f(x)$ 定义在 $[-L, L]$ 上. 如果$\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx < \infty$ 且 $f(x)$ 的 Fourier 系数存在, 则这些系数当 $n \to \infty$ 时趋于零, 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0. \tag{S3}$$

当看作周长为 $2L$ 的圆周上的函数, $f(x)$ 越光滑, $f(x)$ 的 Fourier 系数当 $n \to \infty$ 时衰减得就越迅速 (参看命题 2 和该命题后的注记).

3. FS $f(x)$ 的点点收敛 (定理 1): 令 $f(x)$ 是 $[-L,L]$ 上的 C^1 函数, 并假设 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$ [使得 $f(x)$ 可看作周长为 $2L$ 的圆周上的 C^1 函数]. 则对 $[-L,L]$ 中所有的 x, 有 FS $f(x)=f(x)$. 换言之, 如记

$$S_N(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right], \tag{S4}$$

其中 a_n 和 b_n 由 (S1) 给出, 则有 (对 $[-L,L]$ 中任意固定的 x),

$$\text{FS } f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]=\lim_{N\to\infty}S_N(x)=f(x). \tag{S5}$$

4. FS $f(x)$ 的一致收敛 (定理 2): 令 $f(x)$ 是区间 $[-L,L]$ 上的 C^2 函数, 满足 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$. 则 FS $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 的确, 对由 (S4) 给出的 $S_N(x)$, 对 $[-L,L]$ 中所有的 x, 有

$$|f(x)-S_N(x)|\leqslant\frac{4L^2M}{\pi^2N},\quad \text{其中}\quad M=\max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f''(x)|. \tag{S6}$$

5. FS $f(x)$ 的点点收敛 (定理 3): 令 $f(x)$ 是 $[-L,L]$ 上的分段 C^1 函数, $\bar{f}(x)$ 是 (28) 中的修正函数. 则对 $[-L,L]$ 中所有的 x, 有 FS $f(x)=\bar{f}(x)$. 的确,

$$\text{FS } f(x)=\tilde{\bar{f}}(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{S7}$$

其中 $\tilde{\bar{f}}(x)$ 是修正函数 $\bar{f}(x)$ 的周期延拓.

6. FS $f(x)$ 的一致收敛 (定理 4): 令 $f(x)$ 是区间 $[-L,L]$ 上的连续分段 C^1 函数, 满足 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$. 则 FS $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 换言之,

$$\max_{-L\leqslant x\leqslant L}|f(x)-S_N(x)|\to 0\quad \text{当}\quad N\to\infty\quad \text{时}, \tag{S8}$$

其中 $S_N(x)$ 是由 (S4) 给出的 FS $f(x)$ 的 N 项部分和.

练习 4.2

1. 令 $f(x) = |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$.

(a) 绘出 $f(x)$ 的周期延拓 $\bar{f}(x)$ 在 $-4 \leqslant x \leqslant 4$ 上的草图.

(b) 根据什么定理 FS $f(x)$ 的部分和 $S_N(x)$ 一致收敛到 $\bar{f}(x)$?

(c) 为什么不能利用定理 2 来确定 FS $f(x)$ 一致收敛到 $f(x)$?

(d) 如同定理 2 的证明, 利用积分比较直接证明 FS $f(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 由定理 3 得知 FS $f(x) = f(x)$.

2. 求在区间 $[-L, L]$ 上满足定理 1 和定理 2 假设的次数最低的非常数多项式.

提示 次数至少是 3 次. 为什么?

3. 令

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+1), & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

草绘 FS $f(x)$ 在区间 $[-4, 4]$ 上的图像. 你用的是什么定理?

4. (a) 在第 4.1 节的习题 6 中, 假设对 $-L \leqslant x \leqslant L$, FS $f(x) = f(x)$, 我们证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 其中 $f(x) = x^2$. 什么定理隐含该假设是正确的?

(b) 利用 (a) 部分证明 Parseval 等式对函数 $f(x) = x$ 是有效的 (参看例 2), 即使我们尚未证明一般的 Parseval 等式.

(c) 直接验证 Parseval 等式对例 6 的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ 0, & -L \leqslant x < 0. \end{cases}$$

成立.

提示 再参考第 4.1 节的习题 6.

5. (a) 验证以下等式 (参看 Bessel 不等式的假设和证明):

$$\int_{-L}^{L} [f(x) - S_N(x)]^2 dx = \int_{-L}^{L} f(x)^2 dx - L\left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right).$$

(b) 令 $f(x)$ 定义在 $[-L, L]$ 上. 假设 $\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx < \infty$ 以及 $f(x)$ 的 Fourier 系数存在. 利用 (a) 部分的结果证明 $f(x)$ 满足 Parseval 等式当且仅当

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-L}^{L} [f(x) - S_N(x)]^2 dx = 0.$$

6. 求定义在 $[-L, L]$ 上的函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$, 使得对 $[-L, L]$ 中每个 x, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, 然而

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-L}^{L} f_n(x) dx \neq \int_{-L}^{L} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx.$$

提示 修改例 3 中的函数 $f_n(x)$, 使得 $f_n(\frac{1}{n})=n$(即增加顶点的高度到 n). 则注意到 $\int_{-L}^{L} f_n(x)dx=1$.

7. (a) 根据定理 2 和习题 5 证明 $[-L,L]$ 上的满足 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$ 的 C^2 函数 $f(x)$ 将满足 Parseval 等式.

(b) 根据习题 6, 为什么不能应用定理 3 和习题 5 立刻推断 Parseval 等式对 $[-L,L]$ 上任一分段 C^1 函数成立?

(c) 利用习题 5 和定理 4 证明 Parseval 等式对 $[-L,L]$ 上任意满足 $f(-L)=f(L)$ 的连续分段 C^1 函数 $f(x)$ 成立.

8. 利用习题 5 和习题 4(c) 推断: 对满足习题 5 假设的 $f(x)$, 使 Parseval 等式成立的充分条件, 但不是必要条件, 为 $S_N(x)\to f(x)$ 是一致的.

注记 事实上, Parseval 等式对 $[-L,L]$ 上任意分段连续 $f(x)$ 成立. 证明见 [Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., p. 191].

9. (**Cauchy-Schwarz不等式**; 参看 (43)). 令 $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 和 $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$, 其中 α_i 和 β_i 是实数. 定义 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_k\beta_k$, 令 $\|\mathbf{a}\|=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{\frac{1}{2}}=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_k^2)^{\frac{1}{2}}$ 是 $\mathbf{a}$ 的长度或模. 对任意实数 r, 令 $\mathbf{a}+r\mathbf{b}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)+r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=(\alpha_1+r\beta_1,\alpha_2+r\beta_2,\cdots,\alpha_k+r\beta_k)$.

(a) 令 $h(r)=\|(\mathbf{a}+r\mathbf{b})\|^2=(\mathbf{a}+r\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+r\mathbf{b})$. 证明 $h(r)=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})r^2+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})r+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, 并注意到对所有的 r, $h(r)\geqslant 0$(为什么?).

(b) 如果 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\neq 0$, 解释为什么 $h(r)$ 的图像不会交于 r–轴多于一次 (如果相交的话), 于是解释为什么二次方程 $h(r)=0$ 不会有不同的两个实根.

(c) 利用 (a) 和 (b) 部分和二项式公式推断 $(2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2-4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\leqslant 0$ 或 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqslant\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$, 此即 Cauchy-Schwarz 不等式.

10. 利用习题 9 中同样的想法证明任意两个定义在 $[-L,L]$ 上分段连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 有 $|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|\|g\|$. 换言之,

$$\left|\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_{-L}^{L} f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-L}^{L} g(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的分段连续性确保这些积分存在, 读者可假设这些积分存在.

提示 对任意实数 r, 考虑 $h(r)=\|f+rg\|^2$.

11. 证明不存在定义在 $[-L,L]$ 上的分段 C^1 函数 f, 使得 $\|f\|\neq 0$, 且 f 与所有函数 $c_0,c_1,s_1,c_2,s_2,\cdots$ 正交.(回忆起 $c_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}$ 和 $s_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}$.)

提示 考虑这种函数的 Fourier 级数并利用定理 3.

12. 完成下列步骤来建立例 6 后面注记 2 中所作的有关 Gibbs 现象 (在间断点突起) 的断言.

(a) 令 $S_{2n-1}(x)$ 是 (35) 中 FS $f(x)$ 的部分和 $(n=1,2,3,\cdots)$

$$S_{2n-1}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin\frac{[2n-1]\pi x}{L}\right).$$

计算 $S'_{2n-1}(x)$ 然后以 $\sin\frac{\pi x}{L}$ 相乘, 如同命题 3 的证明, 产生一个分解的和, 于是得到 $\sin\frac{\pi x}{L}\cdot S'_{2n-1}(x)=\frac{1}{L}\sin\frac{2n\pi x}{L}$.

(b) 证明 $S'_{2n-1}(x)=0$ 的 x 的第一个正值是 $x=\frac{L}{2n}$, 因此突起最大值是

$$S_{2n-1}\left(\frac{L}{2n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(2\sin\frac{\pi}{2n}+\frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\frac{2}{2n-1}\sin\frac{[2n-1]\pi}{2n}\right). \qquad (*)$$

(c) 证明 (*) 中圆括号中的和是以下显示的阴影矩形面积的和.

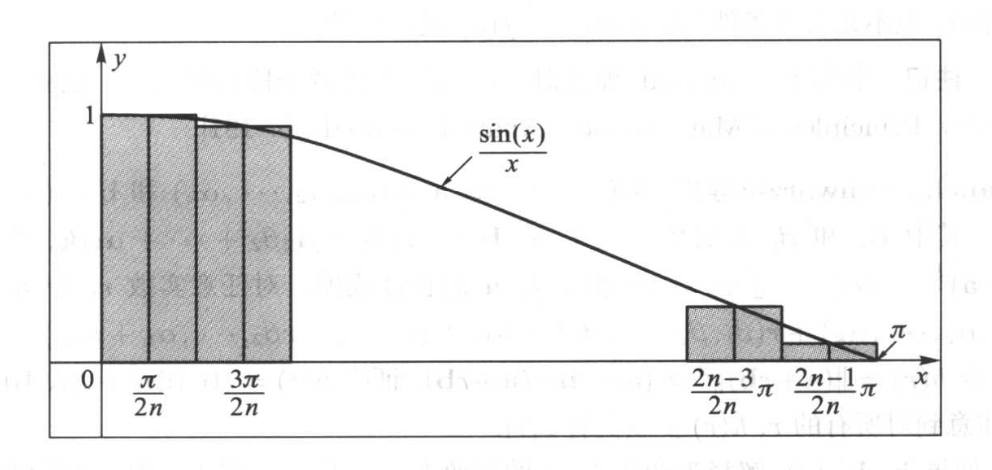


图 10

(d) 证明突起最大值当 $n\to\infty$ 时的极限由以下给出

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\left(\frac{L}{2n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\approx 1.0895.$$

提示 利用梯形法估计 (d) 中的积分.

13. 令 $f(x)$ 是 $[-L,L]$ 上分段连续函数, 对 $N\geqslant 0$, 令 $S_N(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ 是 FS $f(x)$ 的 N 项部分和. 令 $P_N(x)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{N}c_n\cos\frac{n\pi x}{L}+d_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ 是任意次数为 N 的三角多项式.

(a) 证明

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}[f(x)-P_N(x)]^2dx &=\int_{-L}^{L}f(x)^2dx-2\int_{-L}^{L}P_N(x)S_N(x)dx+\int_{-L}^{L}P_N(x)^2dx\\ &=\int_{-L}^{L}f(x)^2dx-\int_{-L}^{L}S_N(x)^2dx+\int_{-L}^{L}[P_N(x)-S_N(x)]^2dx.\end{aligned}$$

(b) 为什么 (a) 表明平方平均误差 $\int_{-L}^{L}[f(x)-P_N(x)]^2dx$ 当 $P_N(x)$ 取作 $S_N(x)$ 时是最小的?

14. 令 $f(x) = x^2, \quad -L \leqslant x \leqslant L.$

(a) 证明平方平均误差

$$\int_{-L}^{L} [f(x) - c]^2 dx$$

当常数 c 等于 $\frac{1}{2}a_0 = \frac{L^2}{3}$ 时最小.

(b) 证明 "一致误差"

$$\max_{-L \leqslant x \leqslant L} |f(x) - d|$$

当常数 c 等于 $\frac{L^2}{2}$ 时最小. 比较

$$\max_{-L \leqslant x \leqslant L} |f(x) - \frac{L^2}{2}| \quad 和 \quad \max_{-L \leqslant x \leqslant L} |f(x) - \frac{L^2}{3}|.$$

(c) 为什么 (a) 和 (b) 部分隐含一个函数以给定次数的三角多项式的最佳一致逼近未必是该函数的 Fourier 级数的部分和?

15. 可证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

对所有的 x 收敛, 且它是区间 $[-\pi, \pi]$ 上 x 的绝对可积函数. 读者不需要证明这个. 而是利用 Bessel 不等式来证明不存在定义在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty$ 的函数, 使得

$$\text{FS } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

§4.3 正弦级数和余弦级数及其应用

本章的目的之一是用正弦函数和余弦函数的形式 (取决于 B.C.) 的线性组合来逼近区间上的函数, 所取的形式对解热传导问题是合适的. 第 4.2 节讨论的 Fourier 级数处理定义在 $[-L, L]$ 上的函数, 且这种级数适合求解以下圆形金属丝问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = k u_{xx}, \quad -L \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(-L,t) = u(L,t), \quad u_x(-L,t) = u_x(L,t); \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x). \end{aligned} \tag{1}$$

如果函数 $f(x)$ 是连续和分段 C^1 的, 且 $f(-L) = f(L)$, 则由第 4.2 节的定理 4, 我们可求出 FS $f(x)$ 的部分和, 记作

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right],$$

使得对任意指定的 "实验误差"ϵ 和 $[-L,L]$ 中所有的 x, 有 $|f(x)-S_N(x)|<\epsilon$. (1) 中的 $f(x)$ 以 $S_N(x)$ 替换, 则由第 3.1 节的命题 2 得到解

$$u_N(x,t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}e^{-(\frac{n\pi}{L})^2kt}\big[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\big]. \tag{2}$$

利用最大值原理, 我们能确定由 (2) 给出的解 $u_N(x,t)$ 在问题 (1) 的精确 C^2 解 (如果这样的解存在的话) 的 ϵ 之内.

如果 (2) 中 N 以 ∞ 替换, 则促使我们去断言 (2) 提供了原问题 (1) 的精确解. 要证明这个断言或甚至表述一种意义, 在这种意义下上述的叙述是正确的会有许多困难. 例如, 如果 $f(x)$ 不是 C^2 的, 则 (1) 不会有在 $t=0$ 是 C^2 的解 (例如, D.E. 在 $t=0$ 不会满足). 然而, 即使 $f(x)$ 是 C^2 的 [满足 $f(-L)=f(L)$ 和 $f'(-L)=f'(L)$], 在验证 $N=\infty$ 时, (2) 实际上收敛到满足 D.E. 的 C^2 函数, 存在实质性问题. 特别, 回忆到光滑 (即 C^∞) 函数的无穷和收敛到一个不连续的函数是很常见的 (参看第 4.2 节的例 6). 从应用的观点看, 为解决这些困难的大量努力是没有保证的, 因为只在某个实验误差之内知道 $f(x)$, 而获得 (1) 的精确解上并没有得到什么. 在数学上求出严格公式化问题的解答常常是令人感兴趣和具有挑战性的, 但在应用上很少求严格公式化问题, 且寻求精确解没有意义. 为了数学上的喜好, 在本节的后面我们将简单提出当 $N=\infty$ 时 (2) 可能导致的缺陷. 然而, 通过考虑解用积分公式的另一种表示, 很好地处理了这些困难. 这将在第七章讨论.

Fourier 正弦级数和 Fourier 余弦级数的缘由

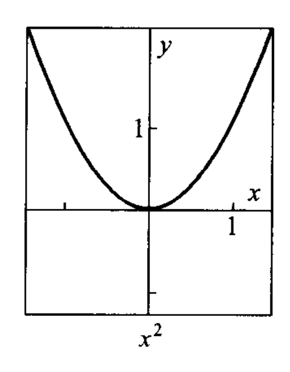
在杆的长度为 $L(0\leqslant x\leqslant L)$, 两端保持在 0 度的热传导问题中, 回忆起我们希望用线性组合 $\sum_{n=1}^{N}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ 来近似初始温度. 粗略说来, 我们将通过把定义在 $[0,L]$ 上, 且 $f(0)=0$ 的初始温度分布 $f(x)$ 按以下方式延拓成定义在 $[-L,L]$ 上的新函数 (奇延拓)$f_o(x)$ 来完成这种近似的:$f_o(x)=f(x)$, $0\leqslant x\leqslant L$ 和 $f_o(x)=-f(-x)$, $-L\leqslant x\leqslant 0$. 因 $f_o(x)$ 定义在 $[-L,L]$ 上, 故说到 $f_o(x)$ 的 Fourier 级数 FS $f_o(x)$ 是有意义的. 由于 $f_o(x)$ 是奇的 [即, $f_o(-x)=-f_o(x)$], 故 FS $f_o(x)$ 中将没有余弦项. 在对 $f_o(x)$ 的适当的假设下, FS $f_o(x)$ 的部分和在 $[-L,L]$ 上将逼近 $f_o(x)$, 因此在 $[0,L]$ 上也将逼近 $f(x)$, 正如所期望的. 级数 FS $f_o(x)$ 称为 $f(x)$ 的 "Fourier 正弦级数". 通过考虑 $f(x)$ 的 "偶延拓", 类似地得到 $f(x)$ 的 "Fourier 余弦级数". 在两个端点都是绝热的问题中将用到它. 通过利用更精细的延拓, 我们能得到对一个端点是绝热而另一个端点保持 0 度的

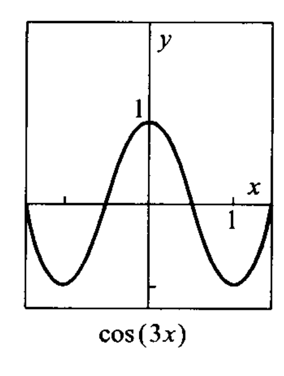
问题涉及 $\cos\frac{[n+\frac{1}{2}]\pi x}{L}$ 或 $\sin\frac{[n+\frac{1}{2}]\pi x}{L}$ 的级数逼近. 这些新类型的级数都是第 4.2 节的 "标准"Fourier 级数的变体. 因此几乎到现在为止所建立的所有收敛性质, 可以没有多大困难地搬到这些新级数上来. 在下文, 我们提供由以上讨论所诱导的构造细节.

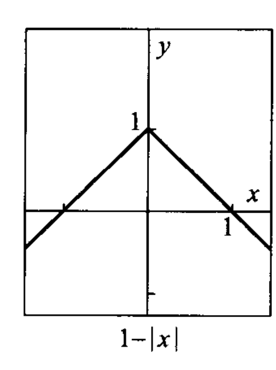
偶函数和奇函数的性质

> **定义** 设 $f(x)$ 是定义在 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的函数. 如果对 $[-L,L]$ 中所有的 x, $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**偶的**, 如果对 $[-L,L]$ 中所有的x, $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**奇的**.

注意到如果 $(x,f(x))$ 在偶函数 $f(x)$ 的图像上, 则 $(-x,f(x))$ 也在该图像上 (即, 图像关于 y-轴的反射是不变的), 如在图 1 所示. 如果 $f(x)$ 是奇的, 则 $(x,f(x))$







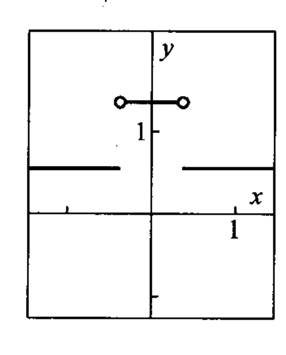
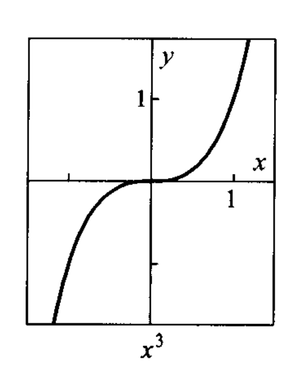
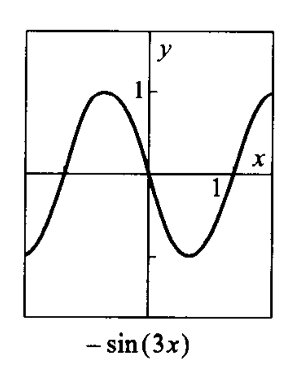
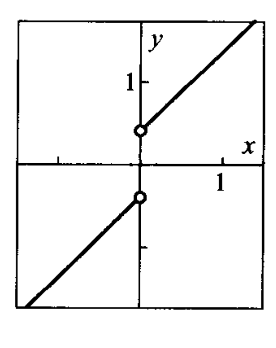


图 1 偶函数的例子

在图像上当且仅当 $(-x,-f(x))$ 在图像上 (参看图 2); 即, 图像关于原点反射 $(x,y) \leftrightarrow (-x,-y)$ 是不变的.







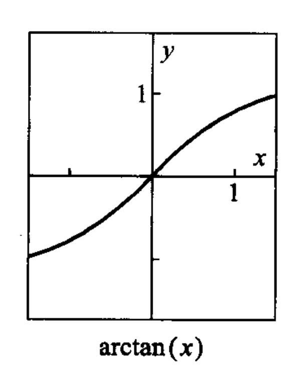


图 2 奇函数的例子

定义 设 $f(x)$ 是定义在 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的函数. $f(x)$ 的**偶延拓**是唯一的对 $[-L, L]$ 中的 x 有定义的偶函数 $f_e(x)$, 对 $[0, L]$ 中的 x, 有 $f_e(x) = f(x)$, 即

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ f(-x), & -L \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

如果 $f(0) = 0$, 还可定义**奇延拓**$f_o(x)$. 这是唯一的对 $[-L, L]$ 中的 x 有定义的奇函数, 使得对 $[0, L]$, $f_o(x) = f(x)$, 即

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ -f(-x), & -L \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

注意到为了连结需要 “$f(0) = 0$”.

例如, 如果 $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant L$, 则我们有图 3 中的图像 $(L = 1.5)$.

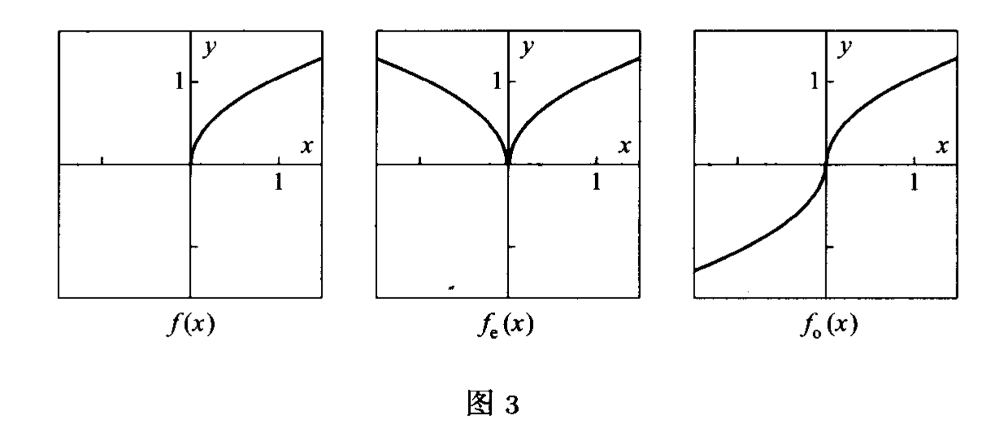


图 3

我们收集一些有关偶函数和奇函数的显见的事实:

(A) 两个偶函数的乘积是偶的.
(B) 两个奇函数的乘积是偶的.
(C) 一个奇函数和一个偶函数的乘积是奇的.
(D) 如果 $f(x)$ 是奇的 $(-L \leqslant x \leqslant L)$, 则 $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$, 如果积分存在的话.
(E) 如果 $f(x)$ 是偶的 $(-L \leqslant x \leqslant L)$, 则 $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$, 如果积分存在的话.

命题 1 设 $f(x)$ 对 $-L \leqslant x \leqslant L$ 有定义, 具 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad 和 \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

如果 $f(x)$ 是偶的, 则 $b_n = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 和

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

如果 $f(x)$ 是奇的, 则 $a_n = 0(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 和

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{4}$$

证明 如果 $f(x)$ 是偶的, 则由事实 (C) 和 (D), $b_n = 0$, 因 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 是奇的. 公式 (3) 由 (A) 和 (E) 得到. 当 $f(x)$ 是奇的情形类似处理. □

Fourier 正弦和 Fourier 余弦级数

定义 设 $f(x)$ 定义在 $[0, L]$ 上, 使得积分 (3) 和 (4) 存在. 则 $f(x)$ 的 **Fourier 正弦级数**是表示式

$$\text{FSS } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 其中 \quad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{5}$$

$f(x)$ 的 **Fourier余弦级数**是表示式

$$\text{FCS } f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 其中 \quad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{6}$$

命题 2　设 $f(x)$ 定义在 $[0,L]$ 上, 假设积分 (5) 和 (6) 存在. 则 (重新定义 $f(0)$ 等于 0)$f(x)$ 的 Fourier 正弦级数是定义在 $[-L,L]$ 上的奇延拓 $f_o(x)$ 的 Fourier 级数. $f(x)$ 的 Fourier 余弦级数是定义在 $[-L,L]$ 上的偶延拓 $f_e(x)$ 的 Fourier 级数; 即

$$\text{FSS } f(x) = \text{FS } f_o(x) \quad \text{和} \quad \text{FCS } f(x) = \text{FS } f_e(x). \tag{7}$$

证明　我们简单验证 $f_o(x)$ 的 Fourier 系数由 $a_n = 0$ 和 b_n 如 (5) 中给出. 的确, 由命题 1, $a_n = 0$(对所有 $n = 0, 1, 2, \cdots$), 以及

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_o(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad (\text{由性质 (E)}),$$

此如同 (5), 因对 $0 \leqslant x \leqslant L$, $f_o(x) = f(x)$. 类似地, 有 FCS $f(x) =$ FS $f_e(x)$. □

因 FSS $f(x) =$ FS $f_o(x)$ 和 FCS $f(x) =$ FS $f_e(x)$, 故把第 4.2 节的定理应用于延拓函数 $f_o(x)$ 和 $f_e(x)$ 可得到 FSS$f(x)$ 和 FCS $f(x)$ 的收敛性结果. 下面的定理对应用 Fourier 正弦级数和 Fourier 余弦级数的大多数情况是足够的. 回忆一下左极限和右极限的符号:

$$f(x_0^+) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \quad \text{和} \quad f(x_0^-) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x).$$

定理 1　设 $f(x)$ 定义在 $[0,L]$ 上的分段 C^1 函数. 则

$$\text{FSS } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)], & 0 < x < L; \\ 0, & x = 0 \quad \text{或} \quad x = L. \end{cases} \tag{8}$$

如果 $f(x)$ 在 $[0,L]$ 还是连续的, 且 $f(0) = 0$ 和 $f(L) = 0$, 则 FSS $f(x)$ 的部分和 $S_N(x)$ 在 $[0,L]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 即, 当 $N \to \infty$ 时,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant L}\{|f(x) - S_N(x)|\} \to 0. \tag{9}$$

证明　如果需要, 重新定义 $f(0)$ 等于 0, 令 $f_o(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 则 $f_o(x)$ 是 $[-L,L]$ 上分段 C^1 函数. 由第 4.2 节的定理 3, 得知 FS $f_o(x)$ 收敛到

修正函数 $\bar{f}_o(x)$. 注意到 $\bar{f}_o(0) = \frac{1}{2}[f_o(0^+) + f_o(0^-)] = \frac{1}{2}[f(0^+) - f(0^+)] = 0$, $\bar{f}_o(L) = \frac{1}{2}[f_o(-L^+) + f_o(L^-)] = \frac{1}{2}[-f(L^-) + f(L^-)] = 0$, 以及对 $0 < x < L$, $\bar{f}_o(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. 因此, 由上述的命题 2 和第 4.2 节的定理 3, 我们有 FSS $f(x) =$ FS $f_o(x) = \bar{f}_o(x)$, 由此得 (8). 如果 $f(x)$ 还是连续的, 且 $f(0) = 0$ 和 $f(L) = 0$, 则 $f_o(x)$ 是连续的, 且有 $f_o(L) = f_o(-L) = 0$. 于是, 把第 4.2 节的定理 4 应用到 $f_o(x)$, 我们得 (9), 因在 $[0, L]$ 上 $f_o(x) = f(x)$. □

定理 2 设 $f(x)$ 是 $[0, L]$ 上的分段 C^1 函数. 则

$$\text{FCS } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)], & 0 < x < L; \\ f(0^+), & x = 0; \\ f(L^-), & x = L. \end{cases} \tag{10}$$

如果 $f(x)$ 在 $[0, L]$ 还是连续的, 则 FCS $f(x)$ 的部分和 $S_N(x)$ 在 (9) 的意义下一致收敛到 $f(x)$.

证明 为得到 FCS $f(x) = \bar{f}_e(x)$, 我们把第 4.2 节定理 3 应用到 (分段光滑的) 偶延拓 $f_e(x)$. 注意到 $\bar{f}_e(0) = \frac{1}{2}[f_e(0^-) + f_e(0^+)] = \frac{1}{2}[f(0^+) + f(0^+)] = f(0^+)$, $\bar{f}_e(L) = \frac{1}{2}[f_e(L^-) + f_e(-L^+)] = \frac{1}{2}[f(L^-) + f(L^-)] = f(L^-)$, 以及对 $0 < x < L$, $\bar{f}_e(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$. 于是由 FCS $f(x) =$ FS $f_e(x) = \bar{f}_e(x)$ 得 (10). 如果 $f(x)$ 是连续的, 则 $f_e(x)$ 是连续的, 由第 4.2 节的定理 4 得到一致收敛. □

例 1 求函数 $f(x) = L - x (\, 0 \leqslant x \leqslant L)$ 的 Fourier 正弦级数和 Fourier 余弦级数, 并草绘 FSS $f(x)$ 和 FCS $f(x)$ 在区间 $[-3L, 3L]$ 上的图像.

解 利用 Green 公式 (参看第 4.1 节的 (9)) 计算 FSS $f(x)$. 回忆到 $s_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$. 利用内积符号 $\langle g, h \rangle = \int_0^L g(x)h(x)dx$(现在 $[0, L]$ 上!),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\langle f, s_n\rangle = -\frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\langle f, s_n''\rangle \\ &= -\frac{2L}{\pi^2 n^2}\left([f(x)s_n'(x) - f'(x)s_n(x)]|_0^L + \langle f'', s_n\rangle\right) \\ &= -\frac{2L}{\pi^2 n^2}\left(\frac{-L\cdot n\pi}{L} + 0\right) = \frac{2L}{n\pi}. \end{aligned}$$

因此,

$$\text{FSS } f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{11}$$

由命题 2 得知 FSS $f(x)$ = FS $f_o(x)$, 由第 4.2 节的定理 3, 此为 $\tilde{\bar{f}}_0(x)$. 因此, FSS $f(x)$ 的图像与 $\bar{f}_o(x)$ 的图像相同 (参看图 4).

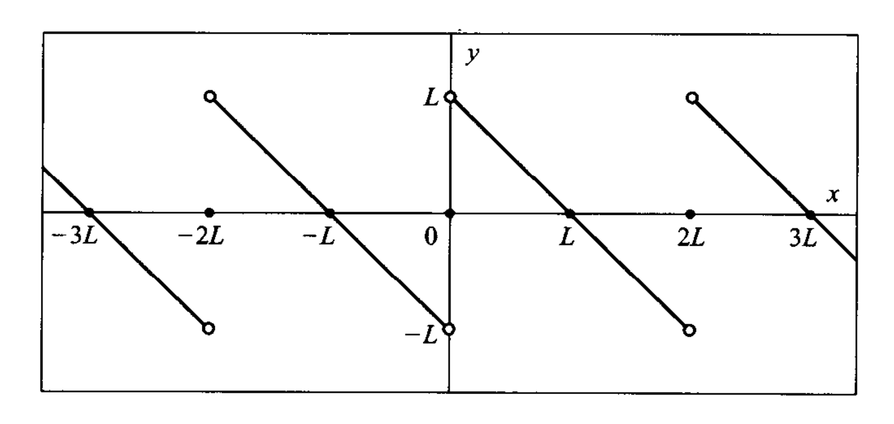


图 4

图像限制在区间 $[-L, L]$ 是在 $x=0$ 经适当 "修正" 过的 $\bar{f}_o(x)$ 的图像. 级数 (11) 不是一致收敛的, 因 $\tilde{\bar{f}}_o(x)$ 不是连续的. 注意到 $f(x)$ 是连续的, 但 $f(0) \neq 0$, 而 $f(0)=0$ 是定理 1 中一致收敛所要求的.

对 FCS $f(x)$, 我们计算

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)dx = L,$$

以及对 $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\langle f, c_n\rangle = -\frac{2}{L}(\frac{L}{n\pi})^2\langle f, c_n''\rangle \\ &= -\frac{2L}{\pi^2 n^2}\left([f(x)c_n'(x) - f'(x)c_n(x)]|_0^L + \langle f'', c_n\rangle\right) = \frac{2L}{\pi^2 n^2}(-(-1)^2+1). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \text{FCS } f(x) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{L} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{L}. \end{aligned} \tag{12}$$

由上述的命题 2 和第 4.2 节的定理 3 得知 FCS $f(x) = \tilde{\tilde{f}}_e(x)$. 因此, FCS $f(x)$ 的图像与 $\tilde{\tilde{f}}_e(x)$ 的图像相同 (参看图 5).

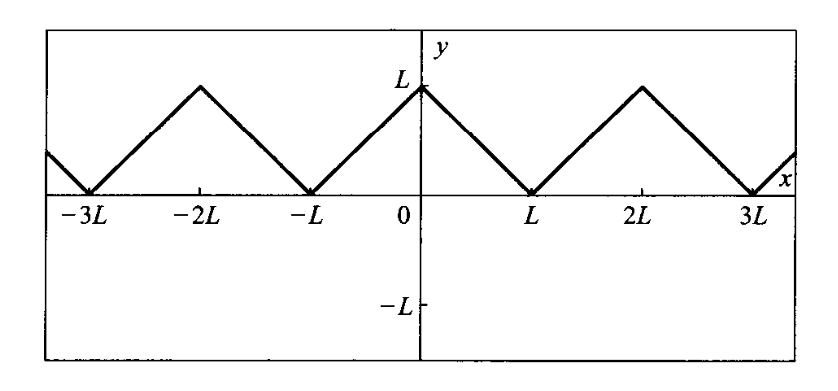


图 5

这时级数 (12) 一致收敛, 因可直接从系数以 n^{-2} 衰减推得. 或者, 定理 2(定理 2 不需要像定理 1 中需要的 $f(0) = 0$) 保证一致收敛, 或可利用第 4.2 节的定理 4, 因 $f_e(x)$ 是连续分段 C^1 函数且 $f_e(-L) = f_e(L)$. □

例 2 求 $f(x) = \sin x\ [0 \leqslant x \leqslant L]$ 的 Fourier 余弦级数, 并对 $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ 草绘 FCS $f(x)$ 的图像.

解 利用 Green 公式来计算 a_n, $n = 2, 3, 4, \cdots$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\langle f, c_n\rangle = -\frac{2}{\pi n^2}\langle f, c_n''\rangle \\ &= -\frac{2}{\pi n^2}\left([f(x)c_n'(x) - f'(x)c_n(x)]|_0^{\pi} + \langle f'', c_n\rangle\right) \\ &= -\frac{2}{\pi n^2}\left([(-1)^n + 1] - \langle f, c_n\rangle\right) = -\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n + 1 - \frac{\pi}{2}a_n\right). \end{aligned}$$

因此, $n^2 a_n = -\frac{2}{\pi}((-1)^n + 1) + a_n$, 解出 a_n, 得

$$a_n = \frac{-2((-1)^n + 1)}{\pi(n^2 - 1)}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots.$$

分别计算表明 $a_0 = \frac{4}{\pi}$ 和 $a_1 = 0$. 于是,

$$\text{FCS } f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{((-1)^n + 1)}{n^2 - 1}\cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2 - 1}\cos(2kx). \quad (13)$$

FCS $f(x)$ 和 $\tilde{\tilde{f}}_e(x)$ 的图像重合 (参看图 6).

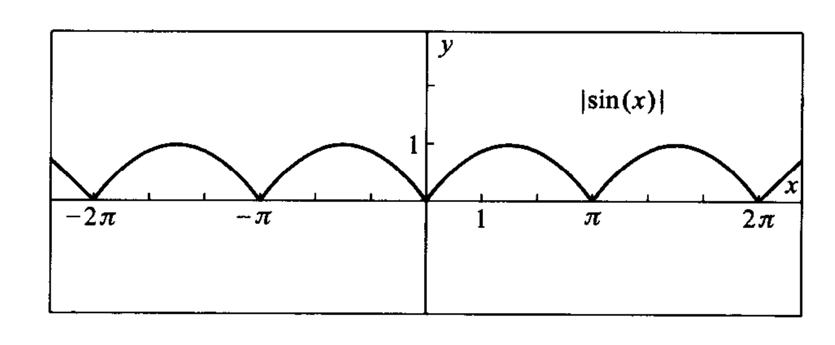


图 6

当然, $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数就是 $\sin x$. 为什么可能需要的是余弦级数而不是简单得多的正弦级数的一个理由是:$f(x)$ 可能是两个端点是绝热的杆中的初始温度分布, 在这种情形需要用函数 $\cos(nx)$, $n=0,1,2,\cdots$ 的线性组合来逼近 $f(x)$. □

回忆一下 (参看第 3.3 节的习题 3) 以下问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u_x(L,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),
\end{aligned}\tag{14}$$

其中在端点 $x=0$ 保持为零, 在端点 $x=L$ 为绝热, 我们已求得如果 $f(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$, 则 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\lambda_n^2 kt}\sin(\lambda_n x)$, $\lambda_n=\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}$. 因此, 对问题 (14), 希望用函数 $\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$, 不是 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 的线性组合来逼近 $f(x)$. 形式上, 不必从零开始发展一整个以 $\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$ 表示的 Fourier 级数新理论. 的确, 我们可以下面方法从老的理论得到该新理论.

$$f^e(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant L,\\ f(2L-x) & L\leqslant x\leqslant 2L.\end{cases}$$

从绘画上来看, $f^e(x)$ 的图像是通过在过垂直直线 $x=L$ 反射 $f(x)$ 的图像获得, 如在图 7 中所示.

由于这个理由, 我们称 $f^e(x)$ 为 $f(x)$**关于** $x=L$ **的偶延拓**(与 $f_e(x)$ 对比, $f_e(x)$ 是早先考虑的 关于 0 的偶延拓). 我们现在证明关于 $f(x)$ 用 $\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$ 表示的级数是通过对 $f^e(x)$ 在区间 $[0,2L]$ 上取通常的 Fourier 正弦级数获得. 在

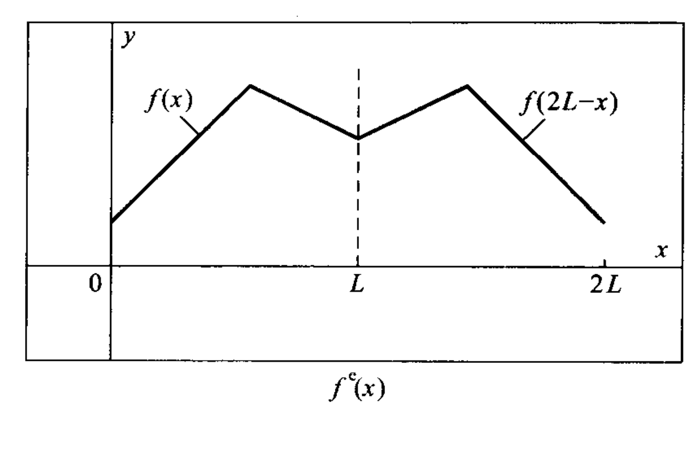


图 7

习题 7, 要求读者叙述和证明关于用 $\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$ 表示的级数表示的类似定理.

定理 3 $f^e(x)$ 在 $[0,2L]$ 上的 Fourier 正弦级数由下式给出

$$\text{FSS } f^e(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}, \tag{15}$$

其中

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}dx, \quad n=0,1,2,\cdots. \tag{16}$$

如果 $f(x)$[因此 $f^e(x)$] 是分段 C^1 的, 则

$$\text{FSS } f^e(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}[f^e(x^-)+f^e(x^+)], & 0<x<2L,\\ 0, & x=0 \quad 或 \quad x=2L.\end{cases} \tag{17}$$

特别, 对 $0\leqslant x\leqslant L$, 有

$$\text{FSS } f^e(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}[f^e(x^-)+f^e(x^+)], & 0<x<L,\\ 0, & x=0,\\ f(L^-), & x=L.\end{cases} \tag{18}$$

此外, 如果 $f(x)$ 是分段 C^1 和连续的, 且 $f(0)=0$, 则 FSS $f^e(x)$ 的部分和 $S_N(x)$ 在 $[0,L]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

证明 由定义, 定义在 $[0,2L]$ 上的 $f^e(x)$ 的 Fourier 正弦级数由以下给出

$$\text{FSS } f^e(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{2L},\quad \text{其中}\quad b_k=\frac{2}{2L}\int_0^{2L} f^e(x)\sin\frac{k\pi x}{2L}dx.$$

为证明 (15) 和 (16), 必须证明

$$b_k=\begin{cases} c_n, & k=2n+1,\quad n=0,1,2,\cdots \\ 0, & k=2n,\qquad n=0,1,2,\cdots. \end{cases}$$

注意到当 $k=2n+1$ 时, $\sin\frac{k\pi x}{2L}=\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$. 先证明对 k 是偶数, 比如 $k=2n$, 有 $b_k=0$. 的确,

$$b_{2n}=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f^e(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=0,$$

因 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 关于 $x=L$ 是奇的, 且 $f^e(x)$ 关于 $x=L$ 是偶的 (即, 由此得乘积关于 $x=L$ 是奇的, 积分为零). 另一方面, 对 $k=2n+1$, $\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$ 关于 $x=L$ 是偶的, 由此, 得

$$b_{2n+1}=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f^e(x)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}dx=c_n.$$

于是得 (15) 和 (16). (17) 直接由定理 1 得到, 而由注意到 $\frac{1}{2}[f^e(L^-)+f^e(L^+)]=f(L^-)$, (18) 直接从 (17) 得到. 最后, 用 $f(x)$ 来替换 $f^e(x)$, 一致收敛的叙述立刻从定理 1 得到. □

例 3 令 $f(x)=x(2L-x)$, $0\leqslant x\leqslant L$. 求 $f(x)$ 以下形式的级数表示

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}. \tag{19}$$

该级数一致收敛吗? 如果截取该级数, 估计由此产生的误差.

解 根据定理 3, 具由 (16) 定义的 c_n 的级数 (19) 在 $[0,L]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 因 $f(x)$ 是分段 C^1, 连续和 $f(0)=0$. 利用 Green 公式计算系数 c_n 如下:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\langle f, s_{n+\frac{1}{2}}\rangle=-\frac{2}{L}\frac{L^2}{\pi^2(n+\frac{1}{2})^2}\langle f, s''_{n+\frac{1}{2}}\rangle \\ &= -\frac{2L}{\pi^2(n+\frac{1}{2})^2}\left([s'_{n+\frac{1}{2}}(x)f(x)-s_{n+\frac{1}{2}}(x)f'(x)]|_0^L+\langle f'', s_{n+\frac{1}{2}}\rangle\right) \\ &= -\frac{2L}{\pi^2(n+\frac{1}{2})^2}\left(0-\int_0^L 2\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}dx\right) \\ &= -\frac{4L^2}{\pi^3(n+\frac{1}{2})^3}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\Big|_0^L=\frac{4L^2}{\pi^3(n+\frac{1}{2})^3}. \end{aligned}$$

令 $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}c_n\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$, 对 $[0,L]$ 中所有的 x, 有

$$|f(x)-S_N(x)|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|\leqslant\frac{4L^2}{\pi^3}\int_N^{\infty}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^3}dx=\frac{2L^2}{\pi^3}\frac{1}{(N+\frac{1}{2})^2},$$

此对截取 $S_N(x)$ 提供了一致的误差估计. □

形式解和精确解

在下面的例子中, 我们说明在初始温度分布不像在第三章中假设的是正弦和余弦函数的有限和的情形, 热传导问题解的各种 Fourier 级数表示的利用 (可能是误用).

例 4 试求以下问题的精确解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=x(L-x).\end{aligned}\tag{20}$$

尝试 虽然 $f(x)=x(L-x)[0\leqslant x\leqslant L]$ 不是函数 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 的有限线性组合, 但由定理 1 得知在 $[0,L]$ 上 FSS $f(x)=f(x)$. 利用 Green 公式或经两次分部积分可计算 $f(x)$ 的 Fourier 正弦系数. 对 $[0,L]$ 中的 x, 有

$$f(x)=\text{FSS }f(x)=\frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}.\tag{21}$$

这里我们要断言

$$u(x,t)=\frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-[2k+1]^2\pi^2t/L^2}}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}\tag{22}$$

是 (20) 的解. 虽然 (22) 显然满足 B.C. 和 I.C., 但对 $0\leqslant x\leqslant L$ 和 $t\geqslant 0$, (22) 不是满足 D.E. 的 C^2 函数. 的确, 注意到 $u_{xx}(0,0)=f''(0)=-2$; 而 $u_t(0,0)=0$, 因 $u(0,t)\equiv 0$. 因此, 在 $(0,0)$ 处 $u_t\neq u_{xx}$, 即在 $t=0$ 时 D.E. 在 $x=0$ 处不满足. 实际上, 问题 (20) 没有定义在带形 $0\leqslant x\leqslant L$, $t\geqslant 0$ 上的 C^2 解, 因我们刚才看到 I.C. 和 B.C. 与 D.E. 在 $(x,t)=(0,0)$ 处相冲突. 这里, 我们还见到无穷项叠加原理不成立的例子. 的确, (22) 的每项满足 D.E., 但整个和不满足 D.E.! (22) 在 $(x,t)=(0,0)$ 也不是 C^2 的, 因为 $u_{xx}(0^+,0)=-2$, 而 $u_{xx}(0^-,0)=f''(0)=2$, 因 $f_o(x)=x(x+L)$, $-L\leqslant x\leqslant 0$. □

注记 在上述例子中, 我们试图通过以 Fourier 级数的适当类型 (例如, (21) 的类型) 展开初始温度和置入依赖时间的指数修正因子 (例如, 像 (22) 的做法) 来得到热问题的解. 我们已经看到导致的无穷和 $u(x,t)$ 未必是问题的解. 的确, 可能不会有一个 C^2 的解. 然而, 我们把这种无穷和称为问题的形式解. 更精确地, 我们叙述以下的定义.

定义 任给一个热方程的初边值问题, 由以初始温度的 Fourier 级数适当形式 (取决于 B.C.) 经置入依赖时间的指数修正因子得到的表示式$u(x,t)$ 成为问题的**形式解**.(更精确地, 术语 "形式" 表明任一可能未被证明的或无法证明的似是而非的结果或过程.)

在许多情形, 形式解当 $t>0$ 时确实满足 D.E., 但证明起来相当困难, 即使由于初始温度不是 C^2 的, 在 $t=0$ 时它不满足 D.E.. 我们在第七章将要证明它. 经常地, 如果在一个充分大的项后面截取形式解, 然后得到在任一指定误差之内满足 I.C. 的 D.E. 和 B.C. 的精确解, 这是在应用中所需要的. 换言之, 确定一个形式解是否是严格意义下的解 (例如, 它是否是 D.E. 的 C^2 解) 可能只是数学上的兴趣. □

例 5 求下面问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=0,\quad u_x(\pi,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=\sin x.\end{aligned}\tag{23}$$

通过截取形式解求在实验误差 0.01 之内满足 I.C. 的 D.E. 和 B.C. 的解. 该问题存在对所有的 (x,t), $0\leqslant x\leqslant\pi$, $t\geqslant 0$ 是 C^2 的精确解吗?

解 从 B.C. 得知 (参看第 3.3 节的例 1), 应把 $\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展成余弦级数. 由定理 2 和例 2, 有

$$\sin x = \text{FCS}\ \sin x = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.\tag{24}$$

则 (23) 的形式解是

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-4n^2kt}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.\tag{25}$$

问题 (23) 不存在 C^2 解, 因为由 I.C., $u_x(0^+,0) = \cos 0 = 1$, 而由 B.C., $u_x(0,0^+) = 0$(即, 在 $(0,0)$ 处, B.C. 与 I.C. 相冲突). 特别, (25) 不是严格意义下的解. (25) 中 $u(x,t)$ 的 N 项部分和级数, 即 $u_N(x,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} e^{-4n^2kt}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$ 是 D.E. 和 B.C. 的精确 (的确, 是 C^∞) 解, 且

$$|u_N(x,0) - \sin x| \leqslant \frac{4}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \leqslant \frac{4}{\pi}\int_N^\infty \frac{dx}{4x^2-1} = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{2N+1}{2N-1}\right),$$

此当 $N \geqslant 32$ 时小于 0.01. □

例 6 求下面问题的形式解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t = u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t) = \sin t, \quad u(\pi,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

解 我们应用第 3.4 节涉及 Duhamel 原理的方法, 并处理以形式方式出现的无穷和. 容易求得 B.C. 的一个特解为 $w(x,t) = (1-\frac{x}{\pi})\sin t$. 对函数 $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$ 的相应问题是

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} - w_t + w_{xx} = (\tfrac{x}{\pi} - 1)\cos t;\\
&\text{B.C.}\quad v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

形式利用 Duhamel 原理 (参看第 3.4 节的定理 1), 得

$$v(x,t) = \int_0^t \tilde{v}(x,t-s;s)ds, \tag{27}$$

其中 $\tilde{v}(x,t;s)$ 是以下相关问题的形式解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad \tilde{v}_t = \tilde{v}_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad \tilde{v}(0,t;s) = 0, \quad \tilde{v}(\pi,t;s) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad \tilde{v}(x,0;s) = (\tfrac{x}{\pi} - 1)\cos s.
\end{aligned} \tag{28}$$

通过计算 $(\frac{x}{\pi} - 1)\cos s$ 的 Fourier 正弦级数, 然后置入依赖时间的指数因子求得

(28) 的形式解. 结果为

$$\tilde{v}(x,t;s) = -\frac{2}{\pi}\cos s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n^2t}\sin(nx).$$

在 (27) 中利用这个形式解 (以 $t-s$ 替换 t) 并形式地交换求和与积分, 得 (26) 的形式解:

$$v(x,t) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\int_0^t \cos s\ e^{-n^2(t-s)}ds\Big]\sin(nx)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big[\frac{n^2\cos t+\sin t}{n^4+1} - \frac{n^2e^{-n^2t}}{n^4+1}\Big]\sin(nx). \tag{29}$$

则原问题的形式解是

$$u(x,t) = (1-\frac{x}{\pi})\sin t + v(x,t).$$

如果在某个 $N>0$ 处截取 $v(x,t)$ 的级数 (29), 我们得到 C^∞ 函数 $v_N(x,t)$ 以及相应的 $u_N(x,t) = (1-\frac{x}{\pi})\sin t + v_N(x,t)$. 易证, 不论 N 取什么值, $u_N(x,t)$ 精确地满足原问题的 B.C. 和 I.C.. 然而, 计算表明

$$(u_N)_t - (u_N)_{xx} = \big[(1-\frac{x}{\pi}) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)\big]\cos t. \tag{30}$$

对任意 $0<x\leqslant\pi$, 括号内的表示式当 $N\to\infty$ 时趋于 0, 因

$$\text{FSS }(1-\frac{x}{\pi}) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx),$$

以及应用定理 1. 在 $x=0$, 不管 N 为何值, (30) 变成 $\cos t$, 所以在 $x=0$, 对大的 N, $u_N(x,t)$ 将不能 (即使是近似地) 满足 D.E.. 所给问题没有精确解.(为什么?). □

注记 具非齐次 B.C. 问题的形式解的形式不是唯一的. 在例 6 中, 如果选取一个不同的 B.C. 的特解, 比如 $\bar{w}(x,t) = (1-\frac{x}{\pi})^3\sin t$, 则得形式为 $u(x,t) = (1-\frac{x}{\pi})^3\sin t + \bar{v}(x,0)$ 的形式解, 它与原来的形式解有不同的形式. □

概要 4.3

1. 偶延拓和奇延拓: 如果 $f(x)$ 是定义在 $[0, L]$ 上, 则 $f(x)$ 的偶延拓 $f_e(x)$ 是在 $[-L, L]$ 上的唯一偶函数, 它在 $[0, L]$ 上等于 $f(x)$. 如果 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 的奇延拓 $f_o(x)$ 是 $[-L, L]$ 上唯一的奇函数, 它在 $[-L, L]$ 上等于 $f(x)$.

2. Fourier 正弦级数和 Fourier 余弦级数: 如果 $f(x)$ 定义在 $[0, L]$ 上, 则 $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数是表示式

$$\text{FSS } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{其中} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \tag{S1}$$

$f(x)$ 的余弦级数是表示式

$$\text{FCS } f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{其中} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \tag{S2}$$

由命题 2, 我们有 FSS $f(x) =$ FS $f_o(x)$ 和 FCS $f(x) =$ FS $f_e(x)$. 由此, 在第 4.2 节关于 Fourier 级数的收敛定理可用来证明 Fourier 正弦级数和 Fourier 余弦级数收敛定理 (参看定理 1 和定理 2).

3. 其他 Fourier 级数和延拓: 如果定义在 $[0, L]$ 上的函数 $f(x)$ 延拓成定义在 $[0, 2L]$ 上的函数 $f^e(x)$, 使得 $f^e(x)$ 关于 L 是偶的, 则 (参看定理 3)

$$\text{FSS } f^e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}, \quad \text{其中} \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L} dx. \tag{S3}$$

这种变形的级数可用来表示具 B.C.$u(0,t) = 0$ 和 $u_x(L,t) = 0$ 杆的初始温度函数 $f(x)$(也参看习题 7).

4. 形式解: 在具标准 B.C. 热方程的初边值问题中, 如果写出初始温度 $f(x)$ 的 Fourier 级数的适当类型, 且置入依赖时间的指数修正因子, 则导致的表示式 $u(x,t)$ 称为**形式解**. 形式解可能不是严格意义下的解, 因 D.E. 的乘积解的无穷和可能不是满足 D.E. 的 C^2 函数 (参看例 4). 换言之, 叠加原理对无穷和不总是成立的. 通过在有限项后截取形式解, 得到 D.E. 和 B.C. 的精确解. 这种有限和将在一个实验误差之内满足 I.C., 只要初始温度函数 $f(x)$ 的适当 Fourier 级

数一致收敛到 $f(x)$, 且考虑充分多的项. 在这种意义下, 形式解的有效性问题在应用上不是一个严重的问题, 虽然这种问题在第七章得到解决. 对非齐次 B.C. 问题, 形式解的形式取决于 B.C. 的特解的选取.

练习 4.3

1. 验证命题 1 前的有关偶函数和奇函数的基本事实 (A)—(E).

2. 证明任意定义在 $[-L, L]$ 上的函数 $f(x)$ 可写成一个偶函数与一个奇函数的和.

提示 假设 $f(x) = g(x) + h(x)$, 其中 $g(x)$ 是偶的, $h(x)$ 是奇的. 则以 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 同时对 $g(x)$ 和 $h(x)$ 解方程 $f(x) = g(x) + h(x)$ 和 $f(-x) = g(x) - h(x)$. 然后检验 $g(x)$ 是偶的, $h(x)$ 是奇的.

3. 假设 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 定义在 $[-L, L]$ 上, 证明如果 $f(x)$ 是偶的, 则 $f'(x)$ 是奇的, 反之亦然.

4. 令 $f(x) = x,\ 0 \leqslant x \leqslant L$.

(a) 计算 Fourier 余弦级数 FCS $f(x)$.

(b) 计算 Fourier 正弦级数 FSS $f(x)$.

(c) 绘出 FCS $f(x)$ 和 FSS $f(x)$ 在 $-3L \leqslant x \leqslant 3L$ 上的图像.

提示 (关于 (c)) 如在例 1 中使用的符号, 对所有 x, 有 FCS $f(x) = \tilde{\tilde{f}}_e(x)$ 和 FSS $f(x) = \tilde{\tilde{f}}_o(x)$.

5. 对以下情形重复习题 4:

(a) $f(x) = 1,\quad 0 \leqslant x \leqslant L$. (b) $f(x) = \cos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

6. 在习题 4 中, 其中 $f(x) = x\ (0 \leqslant x \leqslant L)$, 解释为什么 FCS $f(x)$ 在 $[0, L]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 而 FSS $f(x)$ 却不是.

提示 参看定理 1 和定理 2 的证明.

7. 令 $f(x)$ 定义在 $[0, L]$ 上, 在 $[0, 2L]$ 上由下面定义 $f^o(x)$

$$f^o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant L; \\ 0, & x = L; \\ -f(2L - x), & L < x \leqslant 2L. \end{cases}$$

叙述和证明关于 FCS $f^o(x)$ 的定理 3 的类似结论. 在热问题中, 哪种 B.C. 要求用到 FCS $f^o(x)$?

8. (a) 求以下问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,\quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(-\pi,t)=u(\pi,t),\quad u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=x^2.\end{aligned}\tag{$*$}$$

(b) 证明问题 $(*)$ 会没有在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 和 $t \geqslant 0$ 上是 C^2 的解. 然而, 证明存在在任意指定误差 $\epsilon > 0$ 之内满足 I.C. 的 D.E. 和 B.C. 的 C^∞ 解.

提示 考虑 $u_x(\pm\pi, 0)$.

9. (a) 求下面问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\end{aligned}$$

(b) 如果 $u_t(x,t)$ 由对形式解的每项关于 t 求导形式计算, 则证明导致 $u_t(\frac{1}{2},0) = -\infty$ 的结果. 由考虑通过中心在 $x = \frac{1}{2}$ 的小区间两端的热流来对这一结果提供物理解释.

10. (a) 求下面问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u_x(\pi,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\\ 1, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}\end{aligned}$$

(b) 该形式解在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处满足 I.C. 吗? 为什么不满足?

提示 参看定理 3.

(c) 如果重新定义 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$, 并在 N 项处截取形式解, 对大的 N, 该截取的函数 $u_N(x,t)$ 可能确保满足 $|u_N(x,0) - f(x)| < 0.1$ 吗? 为什么不能?

11. 求以下问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=-1,\quad u_x(1,t)=1;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0.\end{aligned}$$

12. 求以下问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0 \leqslant x \leqslant 10,\quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = 2,\quad u_x(10,t) = 3;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 0.\end{aligned}$$

13. 求以下问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t) = 2,\quad u(\pi,t) = 1 - e^{-t};\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = 7\cos\frac{3x}{2}.\end{aligned}$$

提示 如同例 6, 利用 Duhamel 原理.

14. (a) 从 (24) 回忆到 $\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. 两边关于 x 求导 (右边逐项求导), 并令 $x = 0$. 推断一个无穷和的导数不总可以由逐项求导来计算.

(b) 证明 $\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 的 Fourier 正弦级数可由 ((a) 部分)$\sin x$ 的 Fourier 余弦级数逐项求导获得.(可以用习题 5(b) 的解答.) 在 $x = 0$ 和 $x = \pi$,FSS $\cos x = \cos x$ 吗? 如果 $0 < x < \pi$ 会怎么样?

(c) 证明对 $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\sin x$ 的 Fourier 余弦级数不能由 $\cos x$ 的 Fourier 正弦级数逐项求导得到.

注记 (b) 部分和 (c) 部分的不同结果在习题 15 中解释.

15. Fourier 级数的导数

(a) 证明如果 $f(x)$ 是 $[-L, L]$ 上连续和分段 C^1 的, 且 $f(-L) = f(L)$, 则 $f'(x)$ 的 Fourier 级数可由 FS $f(x)$ 逐项求导得到.

提示 分部积分隐含 $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$, 和 $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$. 注意到如果 $f(x)$ 是分段 C^1 但不是连续的, 分部积分一般不成立 (为什么?).

(b) 根据 (a) 部分, 通过考虑 $\sin x$ 的连续偶延拓和 $\cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant L)$ 的连续奇延拓来解释习题 14 中 (b) 和 (c) 部分的结果.

16. Fourier 级数的积分

(a) 证明如果 $f(x)$ 是 $[-L, L]$ 上分段连续, 且 $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$, 则它的原函数 $G(x) = \int_0^x f(x)dx$ 是连续和分段 C^1 的, 且 $G(-L) = G(L)$. 从习题 15 的 (a) 部分直接推断 FS $f(x)$ 可由 FS $G(x)$ 的逐项求导得到, 于是 (除了相差一个常数项)FS $G(x)$ 可由 FS $f(x)$ 的逐项积分得到.FS $G(x)$ 的常数项 $\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} G(x)dx$ 必须分别计算.

(b) 利用 (a) 部分的方法, 由 FS $x(-L \leqslant x \leqslant L)$ 求 FS x^2.

(c) 假设略去 FS $x^2(-L \leqslant x \leqslant L)$ 中的常数项, 积分 FS $f(x)$ 中的其他所有的项. 什么函数有以此生成的级数作为它的 Fourier 级数?

17. Wirtinger 不等式 令 $f(x)$ 是定义在 $[-L, L]$ 上的连续分段 C^1 函数, 使得 $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$ 和 $f(-L) = f(L)$.

(a) 利用习题 15(a) 和 Parseval 等式证明

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx \leqslant \frac{L^2}{\pi^2} \int_{-L}^{L} f'(x)^2 dx \text{ (Wirtinger不等式)},$$

等式仅在 $f(x) = a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L}$(即 $a_n = b_n = 0,\ n \geqslant 2$) 时成立.

(b) 如果 $f(x)$ 在 $[0, L]$ 上有定义和分段 C^1 的, 且 $f(0) = f(L) = 0$, 则证明积分下限以 0 替换 $-L$, Wirtinger 不等式成立. (关于相关的不等式, 参看 [Beckenbach 和 Bellman, 第五章] 以及其中的参考文献.)

18. 等周不等式 这里我们利用习题 17 的 Wirtinger 不等式来证明: 一 "充分好的" 长度为 2π 的封闭曲线所围最大面积为 π(等周不等式), 其中等式只在圆周的情形成立. 假设曲线由周期为 2π 的周期 C^1 函数 $x(t), y(t)$ 参数表示, 具单位速度 (即 $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \equiv 1$). 还假设曲线的重心在原点 (即 $\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt = 0$). 令 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ 和 $|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. 假设 $\mathbf{r}(t) \neq 0$ 以及从 $\mathbf{r}(t)$ 到 $\mathbf{r}'(t)$ 的角度 $\alpha(t)$ 满足 $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \pi$.

(a) 证明由曲线所围的面积是 $A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t)| \sin(\alpha(t))dt$, 其中 $\alpha(t)$ 是从 $\mathbf{r}(t)$ 到 $\mathbf{r}'(t)$ 的角度.(画一个以位置向量 $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t + \triangle t)$ 和 $\mathbf{0}$ 的端点为顶点的 "三角形" 面积元素的图.)

(b) 利用 Cauchy-Schwarz 不等式 $\langle f, g\rangle^2 \leqslant \|f\|^2\|g\|^2$(参看第 4.2 节的习题 10) 证明 $A^2 \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{r}(t)|^2 dt$(取 $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\alpha(t))$ 和 $g(t) = |\mathbf{r}(t)|$).

(c) 利用 (b) 部分和 Wirgtinger 不等式 (参看习题 17) 推导

$$A^2 \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{r}(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\pi \int_{-\pi}^{\pi} x(t)^2 + y(t)^2 dt \leqslant \frac{1}{2}\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{r}'(t)|^2 dt = \pi^2.$$

(d) 证明仅在是圆周情形时 $A \equiv \pi$.(注意到如果 $\sin(\alpha(t)) \not\equiv 1$, 上述的不等式中有一个是严格的.)

注记 (1) 更多的有关等周不等式参看 [Pólya 和 Szegö, 1951] 和 [Osserman, 1978] 以及其中的参考文献.

(2) 在 [W.Blaschke, 1916] 中证明了如果 L 是等边 n 多边形的长度 (但不必内角相等), 所围的面积 A, 则

$$L^2 \geqslant 4n \tan \frac{\pi}{n} \cdot A.$$

当 $n \to \infty$ 时, 我们得到对可用这种多边形任意逼近的曲线和它所围区域, 有 $L^2 \geqslant 4\pi A$.

§4.4 Sturm-Liouville 理论

在第三章以及后面的章节, 分离变量法用来获得满足初边值问题的 D.E. 和 B.C. 的乘积解. 这种方法引出一个涉及常微的新边值问题, 本节的目的就是研究这些问题. 例如, 在以下初边值问题的情形分离变量过程中,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad t \geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x),\end{aligned} \tag{1}$$

其中满足 (1) 的 D.E. 和 B.C. 的乘积解 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 引出问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L\\&\text{B.C.}\quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

其中 λ 表示分离常数. 如果在杆的材料随截面变化的情形考虑热方程的推导 (参看第 3.1 节), 我们得到一个更一般的边值问题. 因此, 如果杆的线密度 D, 杆的比热 C 和杆的热传导率 K 是 x 的函数, 则得 (参看第 3.1 节的习题 10) 偏微

$$C(x)D(x)u_t = \frac{\partial}{\partial x}(K(x)u_x). \tag{3}$$

另外, 如果允许一个形如 $Q(x)u(x,t)$ 的热源, 则我们得到以下的来替代 (3)

$$\text{D.E.}\quad C(x)D(x)u_t = \frac{\partial}{\partial x}(K(x)u_x) + Q(x)u. \tag{4}$$

设杆的端点在 $x = a$ 和 $x = b$, 考虑齐次 B.C.:

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} c_1u(a,t) + c_2u_x(a,t) = 0 & (c_1^2 + c_2^2 \neq 0),\\ c_3u(b,t) + c_4u_x(b,t) = 0 & (c_3^2 + c_4^2 \neq 0),\end{cases} \tag{5}$$

其中 c_1, c_2, c_3 和 c_4 是实常数. 关于这种 B.C. 的物理解释, 参见第 3.3 节的最后部分. 把 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入 (4), 由变量分离, 得

$$\frac{T'}{T} = \frac{\frac{d}{dx}(KX')}{CDX} + \frac{Q}{CD} = -\lambda, \tag{6}$$

其中 λ 是常数. 特别, 我们得到 D.E.

$$\frac{d}{dx}(KX') + (Q + \lambda CD)X = 0. \tag{7}$$

设 $g(x) = C(x)D(x)$ 和 $q(x) = Q(x)$, 并利用 B.C.(5), 得

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \frac{d}{dx}[K(x)X'(x)] + (q(x) + \lambda g(x))X(x) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ &\text{B.C.} \quad c_1X(a) + c_2X'(a) = 0, \quad c_3X(b) + c_4X'(b) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

其中假设在 $[a,b]$ 上 $K(x) > 0$, $g(x) > 0$, 且 $q(x)$, $g(x)$, $K'(x)$ 和 $X''(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的. 边值问题 (8) 称为**Sturm-Liouville 方程**. [法国数学家 Joseph Liouville(1809—1882) 是第一位通过解等价的积分方程来求解边值问题的. Jacques Charles François Sturm(1803—1855) 是瑞士数学家, 他与 Liouville 合作研究边值问题.]

定义 (8) 中的 D.E. 称为 **Sturm-Liouville方程**. 使存在非平凡解 (即 $X \neq 0$) 的参数 λ 的值称为问题的**特征值**, (8) 对应的非平凡解 $X(x)$ 称为相应于该特征值的**特征函数**. 问题 (8) 也称作**特征值问题**.

注记 因 (8) 的 D.E. 和 B.C. 都是齐次的, 故不论 λ 为何值, 平凡函数 $X(x) \equiv 0$ 满足 (8). 然而, 如将看到的, 对大多数 λ 的值, 唯一的解是该平凡解. 例如, 在第 3.1 节我们发现 (2) 只有当 $\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 时 (注意到在第 3.1 节用了符号 λ_n 表示 $\frac{n\pi}{L}$) 才有非平凡解. 对应于特征值 λ_n 的特征函数具有形式 $X_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 其中 A_n 是任意非零常数 (参看下面的例 1). 特征值问题 (2) 易解, 因为我们不仅能显式地解出 D.E. 也能解出 $\sin(L\sqrt{\lambda}) = 0$. 然而, 一般不能求出 Sturm-Liouville 问题的特征函数和特征值的显式公式. 虽然显式解很罕见, 然而在本节我们将建立 (8) 的解的一些定性性质. □

特征值和特征函数的性质

习惯上用应变量 y 来代替 (8) 中的 X. 因此, (8) 成为

$$
\begin{array}{ll}
\text{D.E.} & \dfrac{d}{dx}[K(x)\dfrac{dy}{dx}] + (q(x) + \lambda g(x))y(x) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b; \\
\text{B.C.} & \begin{cases} c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0 & (c_1^2 + c_2^2 \neq 0), \\ c_3 y(b) + c_4 y'(b) = 0 & (c_3^2 + c_4^2 \neq 0). \end{cases}
\end{array}
\tag{9}
$$

其中我们假设 $K'(x), g(x), q(x)$ 和 $y''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $K(x)$ 和 $g(x)$[①] 在 $[a,b]$ 上是正的.

注记 问题 (9) 与第一章的初值问题不同. 线性二阶常微初值问题的解要求在一个值满足两个条件 (例如, $y(x_0) = y_0$ 和 $y'(x_0) = y_1$). 为方便起见, 我们叙述以下在 [Simmons, 第十一章] 中证明的存在和唯一性定理. □

定理 1(初值问题的存在性和唯一性) 令 $P(x), Q(x)$ 和 $R(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 如 x_0 是该区间内的点,y_0 和 y_1 是任意实数, 则初值问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{D.E.} & \dfrac{d^2y}{dx^2} + P(x)\dfrac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x); \\
\text{I.C.} & y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1
\end{array}
$$

在 $[a,b]$ 上存在唯一的解.

在边值问题情形中, 解 $y(x)$ 必须满足在不同的两个 x 值上的条件. 例如, 对 $y'' + y = 0$, 边值条件可由 $y(0) = 0$[②]和 $y(L) = 1$ 给出. 但这样的问题未必有解. 事实上, 如果 $L = 2\pi$, 该问题无解 (参看习题 4 和习题 5). 下面关于 Sturm-Liouville 问题的存在性定理的证明在高等教科书 (例如, [Rubinstein, p.173]) 中.

[①]原文误为 $q(x)$.——译者
[②]原文误为 $y(x) = 0$.——译者

然而, 在定理 9 的证明以及在其后面的注记中我们将给出论证的梗概.

定理 2(Sturm-Liouville 问题 (9) 的特征值的存在性) Sturm-Liouville 问题 (9) 有无穷多个特征值, 它们可以增加次序排列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, 并有 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. 对应于 λ_n 的特征函数 $y_n(x)$ 在 (a, b) 内正好有 $n-1$ 个零点.

为激发本节后面的结果, 我们先考虑几个例子.

例 1 确定以下 Sturm-Liouville 问题的特征值和特征函数

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L \\ &\text{B.C.} \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

解 首先注意到, 如果 $K(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 1$, $a = 0$, $b = L$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ 和 $c_4 = 0$, 则 (9) 简化成 (10). 考虑三种情形: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ 和 $\lambda < 0$. 但如果 $\lambda = 0$ 或 $\lambda < 0$, 则 (10) 的唯一解是 $y(x) \equiv 0$(参看第 3.1 节), 它不是特征函数. 如果 $\lambda > 0$, 则 D.E. 的通解是

$$y(x) = A\sin(x\sqrt{\lambda}) + B\cos(x\sqrt{\lambda}). \tag{11}$$

由 B.C., 得 $y(0) = B = 0$ 和 $y(L) = A\sin(L\sqrt{\lambda}) = 0$. 因要非平凡解, 故 $A \neq 0$, 且令 $\sin(L\sqrt{\lambda}) = 0$, 得 $L\sqrt{\lambda} = n\pi$. 因此, 特征值是 $\lambda = \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$, 对应的特征函数 $y_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$, $A_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. □

注记 对第 3.1 节中热方程的乘积解, 符号 "λ" 表示这里的特征值平方根. 为避免混乱, 可在内心以 "β" 来替换在第三章出现的 "λ". 由于数学本质上在符号变换下是不变的, 故不应成为太过于依附于某个符号的特别应用. 注意到在例 1 中 (以及下面的例子), 所有实的特征值都是正的, 且当 $n \to \infty$ 时 $\lambda_n \to \infty$(参看定理 2). 此外, $y_n(x)$ 在 $(0, L)$ 内有 $n-1$ 个零点, 且由 Green 公式, 特征函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots$ 在 $[0, L]$ 上是正交的. 下面的定理 5 建立了一般问题 (9) 的正交性结果. 再者, 虽然在例 1 和例 2 中我们不考虑复特征值的可能性, 但由下面定理 7 的一个推论, 事实是没有复特征值. □

例 2 对特征值问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ l < \pi/2; \\ &\text{B.C.} \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(L) + y'(L) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

确定方程式, 它的零点 (根) 是特征值.

解 如果 $\lambda = 0$ 或 $\lambda < 0$, 则易验证 (12) 的唯一解是平凡解. 如果 $\lambda > 0$, 则 D.E. 的通解是

$$y(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}) + B\sin(x\sqrt{\lambda}). \tag{13}$$

因 $y'(x) = \sqrt{\lambda}(-A\sin(x\sqrt{\lambda}) + B\cos(x\sqrt{\lambda}))$, 故由第一个 B.C. 推得 $A = B\sqrt{\lambda}$. 结合第二个 B.C., 得

$$0 = B[2\sqrt{\lambda}\cos(L\sqrt{\lambda}) + (1-\lambda)\sin(L\sqrt{\lambda})]. \tag{14}$$

因此, 如果 $B \neq 0$ 和 $\lambda \neq 1$(注意到在 (12) 中 $L < \frac{\pi}{2}$), 则 (14) 化为

$$\tan(L\sqrt{\lambda}) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \quad (\lambda > 0), \tag{15}$$

此为所求方程式. 它可数值或绘图近似求解 (参看第 3.3 节的图 4, 但由上述的注记, $\lambda^2 \leftrightarrow \lambda$). 注意到如果允许 $L = \pi/2$(或 $\pi/2$ 的任意正奇整数的倍数) 的话, 则 $\lambda = 1$ 会是特征值 (为什么?). □

为研究一般系数不全是常数的线性齐次二阶 D.E., 我们引入二阶线性微分算子

$$\mathbf{L} \equiv p_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x). \tag{16}$$

如果 y 是某个区间上的 C^2 函数, 则 $\mathbf{L}[y]$ 定义如下:

$$\mathbf{L}[y] \equiv p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y, \tag{17}$$

对应的线性齐次二阶常微可写成 $\mathbf{L}[y] = 0$. 当试图求解具系数 p_0, p_1 和 p_2 不都是常数的常微 $\mathbf{L}[y] = 0$ 时, 可尝试引入 "积分因子" 的概念, 在线性一阶常微的情形用过积分因子. 在第 1.1 节, 我们发现以积分因子 $m(x) = \exp(\int p(x)dx)$ 相乘把方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 化为以下形式

$$0 = m(x)\frac{dy}{dx} + p(x)m(x)y = \frac{d}{dx}[m(x)y]. \tag{18}$$

受此启发, 在下个例子中, 对二阶常微 $\mathbf{L}[y] = 0$, 我们试图找到一个函数, 比如 $z = z(x)$, 使得 $z\mathbf{L}[y]$ 是 y 和 y' 结合的导数.

积分因子, Lagrange 恒等式和自共轭算子

例 3 经形式计算, 试图求 "积分因子" $z = z(x)$, 使得 $z\mathbf{L}[y]$ 是 y 和 y' 结合的导数, 其中 $\mathbf{L}[y]$ 由 (17) 给出.

解 为求 $z = z(x)$, 考虑 $\int z(x)\mathbf{L}[y]dx$, 然后分部积分

$$\begin{aligned}\int z(x)\mathbf{L}[y]dx &= \int (zp_2y'' + zp_1y' + zp_0y)dx \\ &= (zp_2)y' - (zp_2)'y + \int (zp_2)''ydx + (zp_1)y \\ &\quad - \int (zp_1)'ydx + \int zp_0ydx.\end{aligned} \tag{19}$$

合并 (19) 中的项, 得

$$\int z(x)\mathbf{L}[y]dx = (zp_2)y' - (zp_2)'y + (zp_1)y + \int y\mathbf{L}^*[z]dx, \tag{20}$$

其中

$$\mathbf{L}^*[z] \equiv \frac{d^2}{dx^2}(zp_2(x)) - \frac{d}{dx}(zp_1(x)) + zp_0(x). \tag{21}$$

因此, 如果取 $z = z(x)$ 满足

$$\mathbf{L}^*[z] = 0, \tag{22}$$

则由 (20) 关于 x 求导, 得

$$z\mathbf{L}[y] = \frac{d}{dx}[(zp_2)y' - (zp_2)'y + zp_1y]. \tag{23}$$

虽然 (23) 是想要的结果, 但确定 $z(x)$ 需要求解 (22) 中给出的二阶常微, 这可能与求解 $\mathbf{L}[y] = 0$ 难度相当. □

虽然求积分因子的努力导致一个同样难度的问题, 但我们将发现算子 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{L}^*$ 间的互相影响在获得 Sturm-Liouville 问题解的性质中是很有帮助的. 特别, 下面的恒等式将用来建立对应于不同特征值的特征函数的正交性结果.

例 4 考虑分别由 (17) 和 (21) 定义的微分算子 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{L}^*$. 如果 p_2, p_1, p_0, y 和 z 都是 C^2 函数, 验证以下恒等式

$$z\mathbf{L}[y] - y\mathbf{L}^*[z] = \frac{d}{dx}[p_2(y'z - yz') + (p_1 - p_2')zy], \tag{24}$$

称此为 **Lagrange 恒等式**.

解 由 (20), 得

$$\int (z\mathbf{L}[y] - y\mathbf{L}^*[z])dx = (zp_2)y' - (zp_2)'y + (zp_1)y. \tag{25}$$

因此, 如果 (25) 两边关于 x 求导, 然后重新安排 (25) 右边的项, 则得 Lagrange 恒等式 (24). □

Lagrange 恒等式 (24) 提供了 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{L}^*$ 之间的关系. 在下个例子中我们考虑 $\mathbf{L}[y] = \frac{d}{dx}\big(K(x)\frac{dy}{dx}\big) + q(x)y$ 的情形. 该算子出现在 Sturm-Liouville 问题 (9) 的 D.E. 中, 它可写成 $\mathbf{L}[y] + \lambda g(x)y = 0$ 的形式. 例 5 和例 6 说明这样的算子是具有性质 $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$ 的唯一算子.

例 5 令 $\mathbf{L}$ 表示以下定义的线性二阶微分算子

$$\mathbf{L}[y] = \frac{d}{dx}[K(x)\frac{dy}{dx}] + q(x)y, \tag{26}$$

其中 $K(x)$ 和 $q(x)$ 满足 (9) 中的要求,y 是 C^2 函数. 求该算子的 $\mathbf{L}^*$. 证明这时有 $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$.

解 由展开式

$$\mathbf{L}[y] = K(x)\frac{d^2y}{dx^2} + K'(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y \tag{27}$$

与 (17) 比较, 得 $p_2(x) = K(x)$, $p_1(x) = K'(x)$ 和 $p_0(x) = q(x)$. 因此, 由 (21), 得

$$\mathbf{L}^*[y] = \frac{d^2}{dx^2}(yK(x)) - \frac{d}{dx}(yK'(x)) + q(x)y. \tag{28}$$

进行这些导数运算, 我们得到对每个 C^2 函数 y, 有

$$\mathbf{L}[y] = \mathbf{L}^*[y]. \tag{29}$$

这表明算子 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{L}^*$ 相等. □

定义 令 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{L}^*$ 分别表示由 (17) 和 (21) 定义的线性二阶微分算子. 则 $\mathbf{L}^*$ 称为 $\mathbf{L}$ 的**共轭**, 微分方程 $\mathbf{L}^*[y] = 0$ 称为**共轭方程**. 算子 $\mathbf{L}$ 称为**自共轭的**, 如果 $\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{L}^*$ 相等, 即 $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$. 齐次线性二阶常微称为是**自共轭形式**的, 如果该常微具有形式

$$\frac{d}{dx}[P(x)\frac{dy}{dx}] + Q(x)y = 0. \tag{30}$$

注记 注意到 Sturm-Liouville 方程 (9) 是自共轭形式的, 且由例 5, 得知 (26) 中的算子 $\mathbf{L}$ 是自共轭的. 可以发现一些数学物理很常用的常微是自共轭形式的 (参看在第八章研究的 Bessel 方程和 Legendre 方程). □

例 6 证明线性二阶微分算子

$$\mathbf{L}[y]=p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y \tag{31}$$

是自共轭的 (即 $\mathbf{L}=\mathbf{L}^*$) 当且仅当 $p_2'(x)=p_1(x)$, 即

$$\mathbf{L}[y]=\frac{d}{dx}[p_2(x)\frac{dy}{dx}]+p_0(x)y. \tag{32}$$

解 $\mathbf{L}$ 的共轭 $\mathbf{L}^*$ 由以下给出 (参看 (21))

$$\mathbf{L}^*[y]=\frac{d^2}{dx^2}(yp_2)-\frac{d}{dx}(yp_1)+yp_0=p_2y''+(2p_2'-p_1)y'+(p_2''-p_1'+p_0)y. \tag{33}$$

因此 $\mathbf{L}=\mathbf{L}^*\Leftrightarrow 2p_2'-p_1=p_1$ 或 $p_2'=p_1$. 如果 $p_2'=p_1$, 则 (32) 成立 (为什么?). □

注记 在习题 6 中我们证明每个线性齐次二阶常微

$$p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0, \tag{34}$$

其中 $p_2(x)>0$ 且 p_0,p_1 和 p_2' 是连续函数, 通过在 (34) 两边乘上 $\exp(\int(p_1-p_2')/p_2dx)$ 都能转化成自共轭形式的常微. □

Sturm-Liouville 微分算子

接下来我们把注意力集中在由以下定义的 **Sturm-Liouville 微分算子**上

$$\mathbf{L}[y]\equiv\frac{d}{dx}(K(x)\frac{dy}{dx})+q(x)y, \tag{35}$$

其中 $K(x)>0,g(x)>0$ 以及 $K'(x),q(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的.(通过修改下面给出的证明, 由要求 $K(x)\geqslant 0$ 以及 $K(x)$ 在 $[a,b]$ 内最多有限多个点为零, 可放松 $K(x)$ 是严格正的条件.) 现在我们来叙述和证明以下 Sturm-Liouville 问题解的一些基本性质,

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & \mathbf{L}[y]+\lambda g(x)y=0,\qquad a\leqslant x\leqslant b;\\ \text{B.C.} & \begin{cases}c_1y(a)+c_2y'(a)=0, & (c_1^2+c_2^2\neq 0),\\ c_3y(b)+c_4y'(b)=0, & (c_3^2+c_4^2\neq 0),\end{cases}\end{array} \tag{36}$$

其中 $\mathbf{L}$ 由 (35) 定义, c_1, c_2, c_3 和 c_4 都是实常数.

定理 3(唯一性定理) 考虑 Sturm-Liouville 问题 (36). 如果 $y(x)$ 和 $Y(x)$ 是对应于相同的 λ 的两个特征函数, 则对某个非零常数 α, $y(x) = \alpha Y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (即, $y(x)$ 与 $Y(x)$ 是线性相关的).

证明 考虑函数

$$\omega(x) = Y'(a)y(x) - y'(a)Y(x), \tag{37}$$

并假设

$$[Y'(a)]^2 + [y'(a)]^2 \neq 0. \tag{38}$$

($[Y'(a)]^2 + [y'(a)]^2 = 0$ 的情形在习题 9 中考虑). 则直接验算 $\omega(x)$ 满足以下初值问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \mathbf{L}[\omega] + \lambda g(x)\omega = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ &\text{I.C.} \quad \omega(a) = \omega'(a) = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

其中 $\mathbf{L}$ 是由 (35) 定义的 Sturm-Liouville 算子. 但另一方面, 由初值问题的唯一性定理 (参看定理 1 和习题 3), 得 $\omega(x) \equiv 0$. 由此, 得

$$Y'(a)y(x) - y'(a)Y(x) \equiv 0, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{40}$$

因 $y(x)$ 和 $Y(x)$ 是特征函数, 故 $y(x) \not\equiv 0$ 和 $Y(x) \not\equiv 0$. 因此, (38) 和 (40) 隐含 $y'(a)Y'(a) \neq 0$. 因此, 由 (40), 得 $y(x) = \alpha Y(x)$, 其中 $\alpha = y'(a)/Y'(a)$. □

注记 在定理 3 我们证明了, 对 Sturm-Liouville 问题 (36), 对应于每个特征值 λ 只有一个线性无关的特征函数. 由于这个缘故, 称 λ 是**单一的**或**具有重数一**. □

定理 4(关于 L 的 Green 公式) 令 $\mathbf{L}$ 是由 (35) 定义的 Sturm-Liouville 微分算子. 如果 $y(x)$ 和 $z(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 C^2 函数. 则

$$\int_a^b (z\mathbf{L}[y] - y\mathbf{L}[z])dx = [K(x)(y'z - yz')]|_{x=a}^{x=b}. \tag{41}$$

证明 因 $\mathbf{L}$ 是自共轭的 (参看例 5), 故 Lagrange 恒等式 (参看 (24)) 变成

$$z\mathbf{L}[y] - y\mathbf{L}[z] = \frac{d}{dx}[K(x)(y'z - yz')]. \tag{42}$$

因此, (42) 两边关于 x 从 a 到 b 积分, 得 (41). □

注记 注意到对 $K(x) \equiv 1$ 和 $q(x) \equiv 0$, 由 (41), 作为一个特殊情形, 得到第 4.1 节中 (关于算子 $\frac{d^2}{dx^2}$) 的 Green 公式. □

下面的定义推广了第 4.1 节引入的正交概念.

> **定义** 定义在 $[a,b]$ 上的正连续函数 $g(x)$ 称为**权函数**. 定义在 $[a,b]$ 上两个连续函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 称为**关于权函数** $g(x)$ 在 $[a,b]$ **上是正交的**, 如果
>
> $$\int_a^b f(x)h(x)g(x)dx = 0. \tag{43}$$

特别, 如果 $g(x) \equiv 1$, 则 (43) 成为第 4.1 节中的定义.

> **定理 5(特征函数的正交性)** 令 λ_m 和 λ_n 是 Sturm-Liouville 问题 (36) 两个不同的特征值. 则对应的特征函数 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权函数 $g(x)$ 是正交的.

证明 因 $\mathbf{L}[y_m] = -\lambda_m g y_m$ 和 $\mathbf{L}[y_n] = -\lambda_n g y_n$, 故有

$$y_n\mathbf{L}[y_m] - y_m\mathbf{L}[y_n] = (\lambda_n - \lambda_m)y_m y_n g. \tag{44}$$

(44) 两边从 a 到 b 积分并利用 Green 公式 (41), 得

$$[K(y_m'y_n - y_my_n')]|_{x=a}^{x=b} = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_m(x)y_n(x)g(x)dx. \tag{45}$$

(36) 中的 B.C. 确保 (45) 的左边为零 (例如, 如果 $c_2 \neq 0$, 则 $y_m'(a)y_n(a) - y_m(a)y_n'(a) = [c_2y_m'(a)y_n(a) - y_m(a)c_2y_n'(a)]/c_2 = [-c_1y_m(a)y_n(a) + y_m(a)c_1 y_n(a)]/c_2 = 0$). 因此,

$$0 = (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b y_m(x)y_n(x)g(x)dx. \tag{46}$$

因 $\lambda_m \neq \lambda_n$, 故 (46) 表明 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权函数 $g(x)$ 是正交的. □

注记 前面的概念和结果 (例如, Lagrange 恒等式, Green 公式, 等等) 当允许 $y(x)$ 是复值的以及不假设特征值是实数时都是有意义和有效的. 在下个定理中我们证明特征值实际上是实数. 注意到定理 3 中的常数 α 可以是复的, 但对应于 λ 的每个特征函数是一个复常数和一个实值特征函数的乘积 (为什么?). □

定理 6 Sturm-Liouville 问题 (36) 的所有特征值是实的.

证明 令 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta(\alpha, \beta$ 是实数) 是 Sturm-Liouville 问题 (36) 的任意特征值, 令 $y(x)$ 是对应于 λ 的复值特征函数. 因 $K(x), q(x)$ 和 $g(x)$(在方程 $\mathbf{L}[y] + \lambda g(x)y = 0$ 中) 都是实的, 故由复共轭, 得

$$\frac{d}{dx}(K(x)\frac{d\bar{y}}{dx}) + (q(x) + \bar{\lambda}g(x))\bar{y} = 0. \tag{47}$$

因此, $\bar{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ 也是问题 (36) 对应于特征函数 $\bar{y}$ 的特征值.(回忆到 (36) 的 B.C. 中出现的常数 c_1, c_2, c_3 和 c_4 都是实的). 现假设 $\lambda \neq \bar{\lambda}$. 则利用 (46) 和事实 $y\bar{y} = |y|^2$, 有

$$(\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b g(x)|y(x)|^2 dx = 0. \tag{48}$$

因 $g(x) > 0$, $|y(x)|^2 \geqslant 0$ 和 $y(x) \neq$, 故由 (48), 得 $\lambda = \bar{\lambda}$, 因此 λ 是实数. □

下面的定理说明在一些附加的假设条件下, Sturm-Liouville 问题的特征值不仅是实的, 而且是非负的.

定理 7 在 Sturm-Liouville 问题 (36) 中, 假设对 $a \leqslant x \leqslant b$, $q(x) \leqslant 0$ 以及实数$c_j (j = 1, \cdots, 4)$ 满足不等式

$$c_1 \cdot c_2 \leqslant 0 \quad 和 \quad c_3 \cdot c_4 \geqslant 0, \tag{49}$$

则 (36) 的所有特征值是非负的. 而且如果 0 是特征值, 则 $q(x) \equiv 0$, $c_1 = c_3 = 0$, 且对应于特征值 0 的特征函数必是常数.

证明 假设 $\mathbf{L}[y] + \lambda gy = 0$, 其中 $y(x) \neq 0$. 则

$$0 = \int_a^b y \cdot (\mathbf{L}[y] + \lambda gy)dx = \int_a^b y(x)\frac{d}{dx}(K\frac{dy}{dx})dx + \int_a^b [q(x)y(x)^2 + \lambda g(x)y(x)^2]dx. \tag{50}$$

对右边的第一个积分利用分部积分, 得

$$\int_a^b y(x)\frac{d}{dx}(K\frac{dy}{dx})dx = [y(x)y'(x)K(x)]|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b y'(x)^2K(x)dx. \qquad (51)$$

用这个表示式替换 (50) 中第一个积分然后重新整理, 得

$$\lambda\int_a^b g(x)y(x)^2dx = \int_a^b -q(x)y(x)^2dx + \int_a^b y'(x)^2K(x)dx - [y(x)y'(x)K(x)]|_{x=a}^{x=b}. \qquad (52)$$

直接可验证 (49) 和以下的 B.C.

$$c_1y(a) + c_2y'(a) = 0 \quad 和 \quad c_3y(b) + c_4y'(b) = 0 \qquad (53)$$

隐含 $y(a)y'(a) \geqslant 0$ 和 $y(b)y'(b) \leqslant 0$. 由此, 因 $K(x) > 0$, 我们有

$$-[y(x)y'(x)K(x)]|_{x=a}^{x=b} = y(a)y'(a)K(a) - y(b)y'(b)K(b) \geqslant 0. \qquad (54)$$

因 $-q(x) \geqslant 0$ 和 $g(x) > 0$, 故从 (52) 和 (54), 得 $\lambda\int_a^b g(x)y(x)^2dx \geqslant 0$, 于是 $\lambda \geqslant 0$. 注意到只当 (52) 右边的所有的项为零时, λ 会是 0. 然而, 这隐含 $q(x) \equiv 0$ 和 $y'(x) \equiv 0$ (即 y 是非零常值函数). 而且, 非零常值函数不可能满足 B.C.(53), 除非 $c_1 = c_3 = 0$. □

Sturm 比较定理

一般而言, 特征值问题无法获得显式解. 然而, Sturm-Liouville 理论提供了关于特征值以及相应的特征函数的零点和振荡性质丰富的信息. 在该理论中最有用和最著名的结果之一是 Sturm 比较定理. 为引出该定理, 先考虑一个例子.

例 7 假设常数 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. 令 $y_1(x)$ 是 $y'' + \lambda_1 y = 0$ 的任一非零解, $y_2(x)$ 是 $y'' + \lambda_2 y = 0$ 的任一非零解. 证明 $y_1(x)$ 的任意两个相邻零点之间有 $y_2(x)$ 的零点.

解 $y'' + \lambda_1 y = 0$ 的通解可写成 $A\sin(x\sqrt{\lambda_1} + \delta)$ 形式, 其中 A 和 δ 是任意常数. 因此, 任一连接 $y_1(x)$ 相邻零点的区间, 记作 J, 具有长度 $\pi/\sqrt{\lambda_1}$, 而 $y_2(x)$ 两个相邻零点之间的距离是 $\pi/\sqrt{\lambda_2}$. 因 $\pi/\sqrt{\lambda_2} < \pi/\sqrt{\lambda_1}$, 故 J 不可能整个地落在 $y_2(x)$ 的两个相邻零点之间 (即 J 必含有 $y_2(x)$ 的一个零点. □

就像在例 7, 在一般情形中 (参看下面的定理 8) 的直观想法是在 $\mathbf{L}[y] + \lambda gy = 0$ 中 λg 的大小支配了解的振荡频率. 然而, 在一般情形, 一对相邻零点之间的距离未必是与其他一对相邻零点之间的距离相同. 注意到每个非零解的内部零点

有最小的后继零点 (和最大的前续零点), 因为否则导数在零点为零, 且由唯一性 (参看定理 3 和习题 11) 该解是平凡的. □

定理 8 (Sturm 比较定理) 令 $\mathbf{L}[y] \equiv \frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y$, 其中在 $[a,b]$ 上 $K(x) > 0$, 且 $K'(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 假设 $y_1(x)$ 和$y_2(x)$ 分别是以下 Sturm-Liouville 方程的 C^2 解

$$\mathbf{L}[y_1] + \lambda_1 g_1(x) y_1 = 0 \quad \text{和} \quad \mathbf{L}[y_2] + \lambda_2 g_2(x) y_2 = 0, \tag{55}$$

其中在 $[a,b]$ 上 $\lambda_2 g_2(x) \geqslant \lambda_1 g_1(x)$, 且 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 则在$y_1(x)$ 任意两相邻零点 α 和 β 之间 (其中 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$) 至少有 $y_2(x)$ 的零点, 只要在 $[\alpha,\beta]$ 上 $\lambda_1 g_1(x) \not\equiv \lambda_2 g_2(x)$.

证明 由 (55) 和关于 $[\alpha,\beta]$ 上算子 $\mathbf{L}$ 的 Green 公式 (41), 得

$$\int_\alpha^\beta (\lambda_2 g_2 - \lambda_1 g_1) y_1 y_2 dx = \int_\alpha^\beta y_2 \mathbf{L}[y_1] - y_1 \mathbf{L}[y_2] dx = \left[K \cdot (y_1' y_2 - y_1 y_2')\right]\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

或

$$\int_\alpha^\beta (\lambda_2 g_2 - \lambda_1 g_1) y_1 y_2 dx = K(\beta) y_1'(\beta) y_2(\beta) - K(\alpha) y_1'(\alpha) y_2(\alpha), \tag{56}$$

其中已经利用了 $y_1(\alpha) = y_1(\beta) = 0$. 因 α 和 β 是 $y_1(x)$ 的相邻零点, 故可假设在 $\alpha < x < \beta$ 上 $y_1(x) > 0$ (不然的话以 $-y_1$ 替换 y_1, $-y_1$ 也是 $\mathbf{L}[y] + \lambda_1 g_1(x) y = 0$ 的解, 且与 y_1 有相同的零点). 则 $y_1'(\alpha) > 0$ 和 $y_1'(\beta) < 0$(为什么?). 如果 $y_2(x)$ 在 (α,β) 内没有零点, 则在 (α,β) 上 $y_2(x) > 0$, 或在 (α,β) 上 $y_2(x) < 0$. 如果 $y_2(x) > 0$, 则 (56) 左边的积分是严格正的 (为什么?), 而 (56) 的右边是非正的 (为什么?). 类似地, 如果在 (α,β) 上 $y_2(x) < 0$, 则 (56) 的左边是负的, 而 (56) 的右边是非负的. 不管哪种情形, 我们都导出矛盾, 所以 $y_2(x)$ 在 (α,β) 内必有零点. □

特征值的存在性

可利用 Sturm 比较定理来证明有关 Sturm-Liouville 问题 (36) 存在无穷多

个特征值的定理 2. 在下面定理 2 的特殊情形中, 我们来说明这种证明思想.

定理 9 考虑以下 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad y'' + q(x)y + \lambda g(x)y = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b \\ &\text{B.C.} \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \end{aligned} \tag{57}$$

其中 $q(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 且在 $[a,b]$ 上 $g(x) > 0$. 假设初值问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad Y'' + q(x)Y + \lambda g(x)Y = 0 \\ &\text{I.C.} \quad Y(a) = 0, \quad Y'(a) = 1 \end{aligned} \tag{58}$$

的解 $Y(x,\lambda)$(依赖于参数 λ) 是 (x,λ) 的连续函数. 则问题 (57) 有无穷多个特征值, 设为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, 且 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

证明 (梗概) 问题 (57) 的特征值正好是那些使得 $Y(b,\lambda) = 0$ 的 λ 的值 (为什么?). 我们得证明存在这样趋于 ∞ 的 λ 的值的数列. 对 $c > 0$, 令 $\lambda(c)$ 是对 $[a,b]$ 中所有的 x 满足 $q(x) + \lambda(c)g(x) \geqslant c^2$ 的 λ 值. 这是可能的, 因 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正最小值, 且 $q(x)$ 是有界的 (参看附录 4). Sturm 比较定理隐含 $y'' + c^2y = 0$ 的任一非平凡解, 设为 $\sin(c(x-a))$, 的任意两个零点之间存在 $Y(x,\lambda(c))$ 的零点. 特别, 如果 $c(b-a) > n\pi$ 或 $c > n\pi/(b-a)$, 在 (a,b) 内至少有 $Y(x,\lambda(c))$ 的 n 个零点. Sturm 比较定理隐含随着 λ 的增加, $Y(x,\lambda)$ 在 (a,b) 内的每个零点将向左移动 (为什么?). 而且随着 λ 的增加, 比如以稳定的速度, 依据图像在两相邻零点之间是下垂的, 没有零点会突然出现在该区间的严格内部. 的确, 如果发生这样的情况, 则图像将与 x–轴相切接触 (此处我们利用了 $Y(x,\lambda(c))$ 是连续的假设, 这样图像不会突然跳跃.) 然而, 图像总是以非零角度与 x–轴相交 (为什么?). 因此, 随着 $\lambda \to \infty$ 出现的无穷多个新零点中的每个零点必先出现在右端点 b, 然后往左移动. 当零点在 b 点出现时 λ 对应的值是问题 (57) 的特征值 (为什么?). 而且, 在有限时间内, $[a,b]$ 内不可能有 $Y(x,\lambda)$ 的无穷多个零点 (参看习题 11). 于是, 特征值构成趋于 ∞ 的数列. □

注记 上述的证明梗概中留下一些细节. 我们既不希望剥夺有兴趣的读者去补上这些细节的挑战, 也不想使带完全细节的证明的主要思想难以理解. $Y(x,\lambda)$ 是连续的假设实际上是可以证明的, 因此是多余的 (参看定理 3). 可推广上述的论证来处理 B.C. 是形如 $c_1y(a) + c_2y'(a) = 0$ 和 $c_3y(b) + c_4y'(b) = 0$,

的情形, 其中, $c_2 \neq 0$ 或 $c_4 \neq 0$. 的确, 我们总可改变 (58) 中的 I.C., 使得这些 B.C. 的第一个满足, 且第二个 B.C. 在右端点一个零点出现与下一个零点出现之间某个时间满足.(只需注意到 $Y'(b,\lambda)/Y(b,\lambda)$ 在零点出现之间从 $-\infty$ 到 ∞ 之间取值.) 此外, 虽然在定理 9 已经含蓄假设 $K(x) = 1$, 但为了把 $\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y + \lambda g(x)y = 0$ 转换成形式 $z'' + Kqz + \lambda Kgz = 0$, 可作独立变量变换, 设为 $t = \int_a^x \frac{ds}{K(s)}$, 其中 $z(t) = y(x(t))$, 且 K, q 和 g 都以 t 表示. 同样转换 B.C., 新问题的特征值与原问题的特征值相同. 因此, 我们 "几乎" 有了定理 2 的一个证明, 除了 $Y(x,\lambda)$ 的连续性证明. 相应于第 n 个特征值 λ_n 的特征函数 $y_n(x)$ 在 (a,b) 内正好有 $n-1$ 个零点的事实的证明, 易从 $n=1$ 的情形 (参看习题 16) 得到. □

在第 8 章研究高维偏微中我们将发现更多的特征值问题. 特别, 在第 8.5 节考虑 m**阶 Bessel 方程**.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0. \tag{59}$$

它出现在振动圆形膜问题和圆盘上的热问题中. 对每个非负整数 m, (59) 的 (正规化)C^2 解记作 $J_m(x)$, 且称为m **阶第一类 Bessel 函数**. (显式公式见第 8.5 节或附录 5). 在下例中不借助于 $J_m(x)$ 的显式公式, 利用 Sturm 比较定理证明 $J_m(x)$ 有无穷多个正零点.

例 8 利用 $J_m(x)$ 满足常微 (59) 的事实, 验证 $y_m(x) = \sqrt{x}J_m(x)$ $(x > 0)$ 满足常微

$$y'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x > 0. \tag{60}$$

利用这个证明 $J_m(x)$ 有无穷多个正零点.

解 先用 $J_m(x)$ 计算 y_m''. 则对 $x > 0$, 由 (59), 得

$$x^{\frac{3}{2}}\left[y_m'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{x^2}\right)y_m\right] = x^2J_m'' + xJ_m' + (x^2 - m^2)J_m = 0.$$

其次, 对固定的非负整数 m, 令

$$g_m(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{x^2} \quad (x > 0).$$

对每个固定的 $m \geqslant 0$ 和 $0 < \epsilon < 1$, 对所有的 $x > \dfrac{m}{\sqrt{\epsilon}} > 0$, 我们有

$$g_m(x) > 1 - \epsilon.$$

现对常微 (60) 和 $y'' + (1-\epsilon)y = 0$, $g(x) \equiv 1 - \epsilon$ 应用 Sturm 比较定理. $y'' + (1-\epsilon)y = 0$ 的解 $\sin(\sqrt{1-\epsilon}x)$ 的零点具有形式 $n\pi(1-\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. 在区间 $x > m/\sqrt{\epsilon}$ 中任意两个这样的零点之间, 有 $J_m(x)$ 的零点. 特别, $J_m(x)$ 有无穷多个正零点, 并且我们有在哪里可以发现这些零点的概念. 更详细的信息参见附录 6. □

例 9 对 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$, 考虑 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad y'' + \lambda g(x) y = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ &\text{B.C.} \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \end{aligned} \tag{61}$$

其中
$$0 < m < g(x) < M. \tag{62}$$
证明关于特征值 λ_n, 下面的估计式成立:

$$\boxed{\frac{1}{M}\Big(\frac{n\pi}{b-a}\Big)^2 < \lambda_n < \frac{1}{m}\Big(\frac{n\pi}{b-a}\Big)^2,\ n = 1, 2, \cdots.} \tag{63}$$

特别, 当 $n \to \infty$ 时 $\lambda_n \to \infty$.

解 由定理 2(或定理 9) 得知 (61) 有无穷多个特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$. 而且, 由定理 2 和 (61) 中的 B.C., 对应于 λ_n 的特征函数 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 内有 $n+1$ 个零点, 记作 $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$. 对 $n \geqslant 1$, 通过对常微 $y'' + \lambda_n m y = 0$, $y'' + \lambda_n g(x) y = 0$ 和 $y'' + M\lambda_n y = 0$ 应用 Sturm 比较定理, 得 (参看习题 16)

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n M}} < x_{j+1} - x_j < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n m}},\ j = 1, \cdots, n. \tag{64}$$

由 (64) 和 n 个子区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 长度的和等于全长 $b-a$ 的事实, 得

$$\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n M}} < \sum_{j=1}^{n}(x_{j+1} - x_j) = b - a < \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n m}}. \tag{65}$$

于是, 由 (65) 我们得到期望的估计 (63). □

非齐次杆的热问题以及特征函数展开

本子节由以下非齐次杆的初边值问题引出

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad g(x)u_t = \frac{\partial}{\partial x}(K(x)u_x) + q(x)u, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad t \geqslant 0; \\
&\text{B.C.} \quad \begin{cases} c_1 u(a,t) + c_2 u_x(a,t) = 0 & (c_1^2 + c_2^2 \neq 0), \\ c_3 u(b,t) + c_4 u_x(b,t) = 0 & (c_3^2 + c_4^2 \neq 0); \end{cases} \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x).
\end{aligned}
\tag{66}
$$

其中 $g(x) \equiv C(x)D(x)$(比热乘线密度), $K(x)$ 是热传导率, $q(x)u$ 是与温度有关的热源或散热装置. 我们看到分离变量 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 导致 Sturm-Liouville 问题 (8). 现令 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ 表示 (8) 的特征值 (参看定理 2), 相应的特征函数 $y_n(x) \equiv X_n(x)$. 则对每个 n,

$$
u_n(x,t) = d_n e^{-\lambda_n t} y_n(x)
$$

满足 (66) 的 D.E. 和 B.C.. 我们形式上考虑 "无穷叠加原理",

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} y_n(x), \tag{67}
$$

我们力争得到

$$
u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n(x). \tag{68}
$$

为求常数 d_n, 我们利用特征函数 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权函数 $g(x)$ 的正交性 (参看定理 5). 形式利用逐项积分, 有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)y_m(x)g(x)dx &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n(x)y_m(x)g(x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \int_a^b y_n(x)y_m(x)g(x)dx = d_m \int_a^b [y_m(x)]^2 g(x)dx,
\end{aligned}
$$

因此,

$$d_m = \frac{\int_a^b f(x)y_m(x)g(x)dx}{\int_a^b [y_m(x)]^2 g(x)dx}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots. \tag{69}$$

因而, 初边值问题 (66) 的形式解由 (67) 给出, 其中 d_m 由 (69) 确定. 当初始温度是 (比如在实验误差之内) 特征函数的有限线性组合, 则除了有限项, d_n 都是零, 而形式解 (67) 是 (66) 的精确 C^2 解.

前述的形式考虑提出了广义 Fourier 级数. 为了领会这个, 令 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上, 假设 (69) 中的积分是有限的. 则形式级数

$$E\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n(x) \tag{70}$$

称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于特征函数 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的**特征函数展开**, 其中 d_m 由 (69) 确定. 例如, 在 $a = 0$, $b = L$, $g(x) \equiv 1$ 和 $y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ 的特殊情形, (70) 转换成 f 的 Fourier 级数. 所有到现在为止我们所考虑的 Fourier 级数的各种类型是 (70) 的特殊情形. 在第八章我们将遇到其他类型的特征函数展开, 如与研究高维偏微有关的 Laplace 级数和 Fourier-Bessel 级数. 这些级数用来表示多变量函数, 比如球面上函数, 圆盘上函数或球上函数. 本子节是对一维情形的介绍. 在这方面, 纯数学家喜欢从事研究关于特征函数展开的某些收敛性定理 (参看 [Titchmarsh,1962]), 而在应用领域的人们则可能想知道对特征函数和特征值的计算逼近怎样的技巧是可取的 (参看 [Keller]).

注记 1 在本子节我们集中注意在称为**正则**Sturm-Liouville 问题的问题上. 例如, (9) 是正则问题, 因为区间 $[a, b]$ 是有限的, 函数 $K(x), g(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $K(x)$ 和 $g(x)$①在 $[a, b]$ 上是正的. 当 $K(x)$ 或 $g(x)$②在 $[a, b]$ 某些点上为零, 或当 a 或 b 是无穷时就出现**奇异**(即, 不是正则) 问题. 许多有意义的微分方程是奇异的, 且在数学物理以及在特殊函数理论中起着重要作用. Bessel 方程 (59)(也可参看第 8.5 节), Legendre 方程和 Laguerre 方程 (参看习题 7 以及

①原文误为 $q(x)$.——译者
②原文误为 $q(x)$.——译者

第 8.4 节和 8.5 节). 我们注意到正则性理论对得出有关像例 8 中的奇异 D.E. 的解的结论有帮助.

注记 2 第 4.2 节主要研究了 Fourier 级数的点收敛和一致收敛. 然而, 还有关于特征函数展开的其他类型的收敛 (例如, 平方平均收敛). 在第 3.2 节考虑了热问题的解关于初始数据变化的平方平均连续性 (参看第 3.2 节的关系式 (7)). 而且, 在第 4.2 节的习题 5 中我们证明了 FS $f(x)$ 的平方平均收敛等价于关于 $f(x)$ 的 Parseval 等式. 以更一般方式的特征函数展开 (70), 平方平均收敛定义如下.

> 令 $S_N(x)=\sum_{m=1}^{N}d_my_m(x)$, 其中 d_m 在 (69) 中定义. 如果
>
> $$\lim_{N\to\infty}\int_a^b(f(x)-S_N(x))^2dx=0,$$
>
> 则称 E $f(x)$ 在**平方平均意义**下收敛到 $f(x)$.

由于有 Parseval 等式的类似结果, 由正则 Sturm-Liouville 问题的特征函数展开在平方平均意义下收敛对很一般的平方可积函数 $f(x)$ 成立 (参看 [Titchmarsh,1962]). 然而, 通过在一点改变函数 $f(x)$, 可见在平方平均意义下收敛不意味着点收敛. 而且, 点收敛不隐含平方平均收敛. 的确, 令 $f_n(x)$ 是第 4.2 节例 3 中的函数, 令 $h_n(x)=\sqrt{nf_n(x)}$. 则 $h_1(x),h_2(x),h_3(x),\cdots$ 在 $[-2,2]$ 上点收敛到零函数, 但 (参看第 4.2 节的习题 6) $\lim_{n\to\infty}\int_{-2}^{2}(0-h_n(x))^2dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-2}^{2}nf_n(x)dx=1$. 对于涉及到多项式函数列的例子, 见习题 17.

概要 4.4

1. Sturm-Liouville 问题: 具热源的非均匀杆的热传导问题导致以下 Sturm-Liouville 问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad \tfrac{d}{dx}(K(x)\tfrac{dy}{dx})+(q(x)+\lambda g(x))y=0,\quad a\leqslant x\leqslant b;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}c_1y(a)+c_2y'(a)= & (c_1^2+c_2^2\neq 0),\\ c_3y(b)+c_4y'(b)=0 & (c_3^2+c_4^2\neq 0),\end{cases}\end{aligned}\tag{S1}$$

其中 $K(x)>0$, $g(x)>0$, 且 $g(x),q(x)$ 和 $K'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2. 定义： (S1) 中的 D.E. 称为**Sturm-Liouville 方程**. 对 (S1) 存在非平凡解 (即 $y \neq 0$) 的参数 λ 称为该问题的**特征值**, (S1) 相应的解 $y(x)$ 称为**特征函数**(与那个特征值关联). 问题 (S1) 也称为**特征值问题**.

3. 特征值和特征函数的性质： 根据定理 2, Sturm-Liouville 问题 (S1) 的特征值构成一无穷数列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, 且当 $n \to \infty$ 时 $\lambda_n \to \infty$. 此外, 与 λ_n 相关联的任意特征函数 $y_n(x)$ 在 (a, b) 内有 $n-1$ 个零点 (也参看下面的 5,7,8 和 9).

4. 自共轭形式： 齐次线性二阶常微是自共轭形式的, 如果该常微具有形式

$$\frac{d}{dx}(P(x)\frac{dy}{dx}) + Q(x)y = 0.$$

特别, (S1) 中 Sturm-Liouville 方程是自共轭形式.

5. 唯一性： Sturm-Liouville 问题 (S1) 的特征函数在相差一个非零乘法常数下是唯一确定的.(参看定理 3).

6. Sturm-Liouville 微分算子, Lagrange 恒等式和 Green 公式： 算子

$$\mathbf{L}[y] = \frac{d}{dx}(K(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda g(x))y$$

称为 Sturm-Liouville 微分算子. 关于 $\mathbf{L}$ 的 Lagrange 恒等式是 (参看 (42))

$$z\mathbf{L}[y] - y\mathbf{L}[z] = \frac{d}{dx}[K(x)(y'z - yz')],$$

通过积分, 由它得到关于 $\mathbf{L}$ 的 Green 公式 (参看定理 4):

$$\int_a^b \left(z\mathbf{L}[y] - y\mathbf{L}[z]\right)dx = \left[K(x)(y'z - yz')\right]_{x=a}^{x=b},$$

其中 $y(x)$ 和 $z(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 C^2 函数.

7. 特征函数的正交性： 如果 λ_m 和 λ_n 是 Sturm-Liouville 问题 (S1) 两个不同的特征值, 对应于特征函数 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$, 则 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 (正) 权函数 $g(x)$ 是正交的 (参看定理 5), 即

$$\int_a^b g(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0, \quad \text{如果} \quad m \neq n.$$

8. 实数特征值: Sturm-Liouville 问题 (S1) 的所有特征值是实数 (参看定理 6).

9. Sturm 比较定理: 在该理论中最有用和最著名的结果之一是 Sturm 比较定理 (参看定理 8). 它可用来 (参看定理 9 和该定理后面的注记) 建立定理 2 中的特征值和特征函数的性质. 在例 9 中我们利用 Sturm 比较定理来证明, 对问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad y'' + \lambda g(x) y = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b \\ &\text{B.C.} \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \end{aligned}$$

其中 $0 < m < g(x) < M$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 特征值 λ_n, $n \geqslant 1$ 满足估计:

$$\frac{1}{M}\Big(\frac{n\pi}{b-a}\Big)^2 < \lambda_n < \frac{1}{m}\Big(\frac{n\pi}{b-a}\Big)^2.$$

在例 8 中, 利用 Sturm 比较定理来证明第一类 Bessel 函数有无穷多个正零点.

练习 4.4

1. 求 Sturm-Liouville 问题 $y'' + \lambda y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant L)$ 具以下给定 B.C. 的特征值 λ_n 和特征函数 $y_n(x)$:

(a) $y(0) = 0,\ y'(L) = 0$; (b) $y'(0) = 0,\ y(L) = 0$; (c) $y'(0) = 0,\ y'(L) = 0$.

2. 求特征值问题 $y'' + \lambda y = 0$ 具以下所给 B.C. 的特征值 λ_n 和对应的特征函数 $y_n(x)$:

(a) $y(0) - y'(0) = 0,\ y(\pi) - y'(\pi) = 0$; (b) $y(0) - y(2\pi) = 0,\ y'(0) - y'(2\pi) = 0$;

(c) $y(0) + y(1) = 0,\ y'(0) + y'(1) = 0$.

3. (a) 证明定理 1 中对 $R(x) \equiv 0$, $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ 时初值问题的唯一解是平凡解.

(b) 令 $y(x)$ 是 Sturm-Liouville 问题 (9) 的特征函数. 证明 $y(x)$ 在 $[a, b]$ 中的所有零点都是单零点, 即, 如果 $y(x_0) = 0$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, 则 $y'(x_0) \neq 0$.

4. (a) 证明每个实数 λ 是以下问题的特征值

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ &\text{B.C.} \quad y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) + y'(1) = 0. \end{aligned}$$

(b) 证明问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ &\text{B.C.} \quad \pi y(0) - y(\pi) = 0, \quad \pi y'(0) + y'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

没有实的特征值.

注记 注意到习题 4(或习题 2(b), (c)) 中的 B.C. 不是由 Sturm-Liouville 问题 (9) 给出的指定形式.

5. (a) 证明以下边值问题无解:

$$\text{D.E.} \quad y'' + y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$$
$$\text{B.C.} \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 1.$$

(b) 如果在 (a) 部分中, B.C. 换成 $y(0) = 0$ 和 $y(L) = 1$, 则确定 $L > 0$ 所有的值, 使得边值问题有解.

6. 证明每个线性齐次二阶常微

$$p_2(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0, \tag{$*$}$$

可转换成自共轭形式的方程, 其中 $p_2(x) > 0$, $p_0(x), p_1(x)$ 和 $p_2'(x)$ 是连续的.

提示 以 $\exp((\frac{p_1 - p_2'}{p_2})dx)$ 乘 $(*)$ 的两边, 然后检验得到的常微具有形式 $q_2y'' + q_1y' + q_0y = 0$, 其中 $q_2' = q_1$.

7. 令 m 是非负整数. 利用习题 6 把以下方程转化成自共轭形式:

(a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0,\ x > 0$;

(b) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0,\ -1 < x < 1$;

(c) $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2y = 0,\ -1 < x < 1$;

(d) $y'' - 2xy' + 2my = 0,\ -\infty < x < \infty$;

(e) $xy'' + (1 - x)y' + my = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty$.

注记 方程 (a)~(e) 分别称为**Bessel 方程**, **Legendre 方程**, **Chebyshev 方程**, **Hermite 方程和 Laguerre 方程**.

8. 考虑线性齐次二阶常微 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. 利用变换 $y(x) = z(x)\exp[-\frac{1}{2}\int P(x)dx]$ 把该方程化成形式 $z'' + G(x)z = 0$, 其中 $G = -\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P' + Q$.

9. 在 $[Y'(a)]^2 + [y'(a)]^2 = 0$ 的情形证明定理 3.

提示 在定理 3 的证明中, 令 $w(x) = Y(a)y(x) - Y(x)y(a)$.

10. 对每个非负整数 n, 令 $y_n(x)$ 表示常微 $[(1 - x^2)y'(x)]' + n(n+1)y = 0$ 的一个 (多项式) 解. 证明如果 $n \neq m$, 则 $y_n(x)$ 和 $y_m(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $g(x) \equiv 1$ 是正交的.

11. 令 $y(x)$ 是 Sturm-Liouville 方程 (参看 (36) 的 D.E.) $a \leqslant x \leqslant b$ 的非平凡解. 证明在 $a \leqslant x \leqslant b$ 内 $y(x)$ 最多可以有有限多个零点.

提示 如果 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 内有无穷多个零点, 则由 Bolzano-Weierstrass 定理 (参看附录 4), $[a,b]$ 内存在一点 x_0 和 $y(x)$ 的零点列 $\{x_n\}$, 使得当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x_0$. 然后构成 $y(x)$ 的 Newton 商得到 $y'(x_0)=0$. 由习题 3 这是不可能的.

12. (a) 如果定理 7 中的不等式 $c_1\cdot c_2\leqslant 0$ 和 $c_3\cdot c_4\geqslant 0$ 用 $c_1\cdot c_2>0$ 和 $c_3\cdot c_4<0$ 替换, 解释为什么这些新不等式对热问题是不切实际的.

(b) 给出一个特定的例子说明如果 $c_1\cdot c_2>0$ 和 $c_3\cdot c_4<0$, 则某些特征值会是负数. 所有特征值会是负数吗?

(c) 通过考虑 (67), 刻画初始温度 $f(x)$ 的集合, 对这种初始温度, 这样的杆当 $t\to\infty$ 时仍然有有界的温度.

13. 不求解 (显式地) 特征值问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad y''+\lambda y=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1;\\&\text{B.C.},\quad y(0)=0\quad y(1)+y'(1)=0,\end{aligned}$$

证明所有特征值都是正的.

14. (a) 第 3.1 节的例 3 与绝热的圆形金属丝内的热流有关. 证明该例子 (参看第 3.1 节的 (23)) 中的 D.E. 和 B.C. 可导出特征值问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad y''+\lambda y=0,\quad -L\leqslant x\leqslant L;\\&\text{B.C.}\quad y(-L)-y(L)=0,\quad y'(-L)-y'(L)=0.\end{aligned}$$

(b) 验证特征值是 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{L})^2$, $n\geqslant 0$. 对 $n\geqslant 1$, 求两个线性无关的特征函数 $y_n(x)$ 和 $z_n(x)$. 为什么它不与定理 3 冲突?

15. 令 $g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续, 假设在 $[a,\infty)$ 上 $0<m<g(x)$. 证明常微 $y''+g(x)y=0$ 的任意解有无穷多个实零点.

16. (a) 利用 Sturm 比较定理证明不等式 (64).

(b) 遵循在定理 9 证明中的考虑, 证明与最小特征值 λ_1 相关联的特征函数 ((57) 的) $y_1(x)$ 在 (a,b) 内无零点.

17. 对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 和 $n=1,2,3,\cdots$ 令 $f_n(x)=\sqrt{2n+1}x(1-x^3)^n$. 证明对 $[0,1]$ 中的每个 x, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$(即 $f_n(x)$ 点收敛到零函数), 但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(f_n(x)-0)^2dx=\frac{1}{3}\neq 0$$

(即 $f_n(x)$ 不在平方平均意义下收敛到零函数).

第五章 波方程

物理科学家, 工程师和应用数学家把三维波方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\quad u=u(x,y,z,t),\quad a>0 \tag{1}$$

看作一个重要的偏微, 因为该方程描述了连续力学系统的振动以及电磁波和声波的传播. 在第一章的第 1.2 节已讨论过波方程的某些应用. 在本章, 将研究 (1) 的特殊情形, 当 u 不依赖 y 和 z 时下面的一维波方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad u=u(x,t). \tag{2}$$

(对 (1) 的研究参看第八章) 为明确起见, 把 $u(x,t)$ 看作一振动的弦在时刻 t, 在位置 x 的横向位移 (以与 x–轴垂直的方向). 在第 5.1 节记住这个模型, 我们用 Newton 第二定律来导出 (2), 并对当弦的初始分布以及初始速度是由有限 Fourier 正弦级数指定时来求解该方程. 还通过证明能量是守恒的建立了解的唯一性. 在第 5.2 节, 导出无限弦的初值问题解的 D'Alembert 公式. 镜像法结合 D'Alembert 公式用来解答半无限和有限弦的一些问题, 并用来证明某种最大值原理, 该最大值原理用来分析由于初始条件中的误差而造成的解的误差. 第 5.3 节以各种标准类型 B.C. 的讨论开始. 还说明了在第三章中用来求解非齐次 B.C. 同样的技巧对波问题也是适用的. 而且, 激发出 Duhamel 方法的一个变形并用于求解由于在弦上有外力作用下产生的非齐次波方程问题.

历史注记 偏微分方程学科, 尤其是对波方程的研究开始于 18 世纪. 在许多其他课题中, 当时的数学家和物理学家对管风琴中的空气柱振动和弦振动的边值问题感兴趣, 由此产生了音乐的数学理论. 对这些理论的最早贡献包括 Brook Taylor(1685—1731), Daniel Bernoulli(1700—1782), Leonhard Euler(1707—1783) 和 Jean D'Alembert (1717—1783). 在 19 世纪波方程用于迅速发展的弹性领域, 随后用来研究声波和光波的传播. 在这期间, Simon D. Poisson(1781—1840), Georg F. B. Riemann(1826—1866), Hermann von Helmholtz(1821—1894), Gustav R. Kirchhoff(1824—1887) 和 John W. S. Rayleigh(1842—1919) 做出了重要的贡献. 在 20 世纪, 波方程和许多相关的方程 (例如, Dirac 方程, Klein-Gordon 方程, Maxwell 方程, 等等) 不仅出现在连续体力学中, 还出现在每个已知的基本粒子的古典描述和量子描述中, 也出现在广义相对论中. 波方程的最新应用出现在超导理论和超流体理论中, 而且现在, 完成循环, 出现在 "超弦" 中, 超弦是已被世人提出的最近的统一场理论之一.

§5.1 波方程——推导和唯一性

对正常数 a, 一维波方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx}, \quad u = u(x,t) \tag{1}$$

与热方程 $u_t = ku_{xx}$ 相像. 本质区别在于出现时间的二阶导数. 注意到如果 $u(x,t)$ 是 (1) 的解, 则逆时间函数 $v(x,t) = u(x,-t)$ 也是解. 该性质对热方程一般不成立, 除非是与时间无关的解 $u(x,t) = cx + d$. 我们将证明在某种理想的条件下, 波方程的解可看作一振动的弦与时间有关的外形 (或振幅). 当一根实体的弦被拨弄了一下, 空气阻力和动能转化成内在热能最终将减弱振动的振幅. 然而, 在这种耗散作用力不存在的理想情况下, 我们无法判断弦的运动是向前还是往后. 对热的分布来说情况就不是这样, 其中特有的衰减性和平稳性告诉我们时间是前进的. 尽管有这些区别, 我们将发现用来求解热方程的基本方法可用于波方程.

波方程的推导

考虑一根齐次的弦, 它是绷紧的且抵抗弯曲的作用可忽略不计. 在静止时, 弦伸展在 $x = 0$ 和 $x = L$ 之间. 弦可以多种方式振动. 例如, 弦上的点可以在 x-轴上做简单的前后运动, 这样弦的形状保持平坦的. 这样的振动称为**纵向振**

动. 假设当某点的位置, 它当弦在静止时是 $(x,0,0)$, 由 $(r_1(x,t),r_2(x,t),r_3(x,t))$ 给出, 其中 r_1, r_2 和 r_3 为某些函数. 对纵向振动, 有 $r_2=r_3=0$. 一般地, 可以证明函数 r_1, r_2 和 r_3 由三个偏微组成的方程组, 其中的每个偏微都是典型地非线性的 (参看 [Antman] 和习题 7). 为了简化问题, 假设弦在平面中, 设为在 xy–平面中振动 (即 $r_3(x,t)\equiv 0$). 还假设考虑中的弦是以 $r_1(x,t)\equiv x$ 的方式振动, 这样对应于点 x 在时刻 t 的位移 $r_2(x,t)$ 只在 y–方向. 这样的振动称为**横向振动**. 为了简化记号, $r_2(x,t)$ 用 $u(x,t)$ 表示. 在证明 $u(x,t)$ 必须服从波方程的过程中, 将证明只有某种类型的弦会有非平凡的横向振动. 称这样的弦在给定的拉伸范围内是 "线性弹性的". (精确的定义在下面给出, 但粗略说来, 这意味着在弦上任一点处的张力与附近的伸展系数成正比). 虽然对一个任意大的拉伸范围, 没有一根实体物理弦是线性弹性的, 我们还是至少能说导致的波方程的解是有效的, 只要拉伸的程度不是太过分的话. 在下面的推导中, 我们不再作通常的 (但实际上是不必要的) 假设: 为了获得一个线性的波方程, 假设像 $u_x(x,t)^2$ 这样的项可忽略不计.

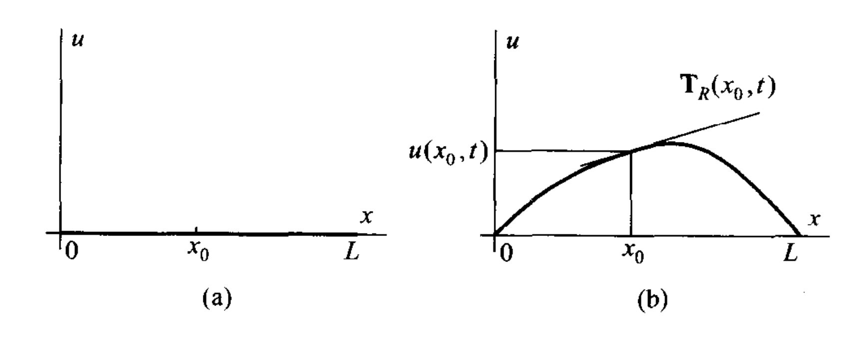


图 1

在图 1(b) 中, $u(x_0,t)$ 是弦在 x–轴上点 x_0 处在时刻 t 的垂直位移, 如果弦在静止时的位置如图 1(a). 由横向振动的假设, 没有水平方向的位移. 向量 $\mathbf{T}_R(x_0,t)$(参看图 2(b)[①]) 是弦在 x_0 的右端部分施于 x_0 的左端部分的作用力. 称 $\mathbf{T}_R$ 为在时刻 t 时在 x_0 处的**右张力**. 类似地, $\mathbf{T}_L(x_0,t)$ 定义为**左张力**. 假设在 x_0 处 $\mathbf{T}_R(x_0,t)$ 与 $u(x,t)$ 作为 x 的函数的图像相切, 并假设 $\mathbf{T}_R(x_0,t)=-\mathbf{T}_L(x_0,t)$. 最后的假设似乎隐含着弦上的点将不作运动, 因为在每点上的净作用力是 $\mathbf{T}_L+\mathbf{T}_R=0$. 然而, 由于每点的质量是 0, 由 Newton 方程 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, 一点的加速度是不确定的. 为了得到点 x_0 的加速度, 需要取弦在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上的净作用力与在这段区间上的弦的质量的比当 $h\to 0$ 的极限

①原文误为图 2(a).——译者

(参看图 2(a)).

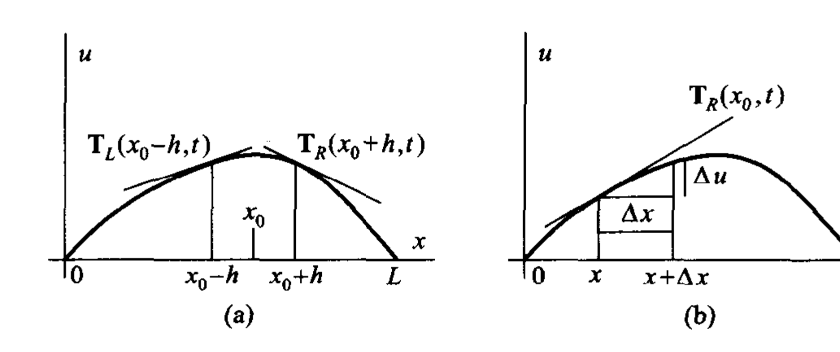


图 2

计算该极限如下. 令在 x_0 在时刻 t 时左 (或右) 张力的大小为 $T(x_0,t)$. 它称为在时刻 t 在 x_0 处的**张力**. 假设当弦是直线时 (如图 1(a)) 张力是正常数 T_0. 如果相对于静止时的长度弦以 s 的倍数被拉伸, 则新的张力具有形式 $g(s)\cdot T_0$, 其中 $g(s)$ 是依赖于弦的特性的某个函数. 即, 假设函数 g 只依赖于 s, 而与其他的量, 如拉伸率以及由于歪曲产生的温度的改变无关. 显然 $g(1)=1$, 因为如果当弦没有被拉伸 (即$s=1$) 时, 张力是 T_0. 假设关于拉伸 s, 这在振动期间会出现的, $g(s)$ 是 C^1. 利用这些假设以及振动是横向的限制, 将证明 Newton 第二定律隐含 $g(s)=s$(即, 弦上的张力与拉伸倍数 s 成正比). 然后将看到导致的关于 $u(x,t)$ 的偏微 (没有任何关于 u_x^2 可忽略不计的有疑问的叙述) 必然是个线性偏微, 即波方程.

> **定义**　一根弦当张力为 T_0、被拉伸倍数 s 在 $[a,b]$ 之内时其张力变为 $T_0 s$ (即 $g(s)=s$), 则称该弦对于 $a\leqslant s\leqslant b$ 是**线性弹性的**.

更精确地, 结合 Newton 定律, 我们将证明: 弦容许有非平凡的横向振动, 实际上隐含该弦对于 s 在这种振动期间出现的任一范围内是线性弹性的. 在上面的图 2(b) 中, 在区间 $[x,x+\triangle x]$ 之间的弦被拉伸大约 $\sqrt{\triangle x^2+\triangle u^2}/\triangle x$ 的倍数, 当 $\triangle x\to 0$ 时它趋于 $s\equiv\sqrt{1+u_x^2}$. 在 x 处右张力的方向近似等于单位向量 $(\triangle x\mathbf{i}+\triangle u\mathbf{j})/\sqrt{\triangle x^2+\triangle u^2}$, 当 $\triangle x\to 0$ 时它趋于确切的单位切向量 $(\mathbf{i}+u_x\mathbf{j})/\sqrt{1+u_x^2}=\frac{1}{s}(\mathbf{i}+u_x\mathbf{j})$. 因此,

$$\mathbf{T}_R(x,t)=g(s)\cdot T_0\cdot\frac{1}{s}(\mathbf{i}+u_x(x,t)\mathbf{j}),\quad 其中\quad s=\sqrt{1+u_x^2}.$$

从而, 如图 2(a) 所示, 在 $x-h$ 和 $x+h$ 之间弦上的净作用力是

$$\mathbf{F}(x,t)=\mathbf{T}_L(x-h,t)+\mathbf{T}_R(x+h,t)=\mathbf{T}_R(x+h,t)-\mathbf{T}_R(x-h,t).$$

由于只考虑横向振动, 所以弦从 $x-h$ 到 $x+h$ 这部分上的质量保持与这部分弦是直线静止状态时相同, 即 $2hD$, 其中 D 是当弦是直线时每单位长度的质量 (即, $D\equiv$ 在图 1(a) 中直线弦的线密度). 由 Newton 定律和纯横向振动的假设, 弦在 x 处的加速度是

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t)\mathbf{j} &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{F}}{2hD}=\frac{1}{D}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\big(\mathbf{T}_R(x+h,t)-\mathbf{T}_R(x-h,t)\big)\\ &=\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{T}_R)=\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x}\Big(T_0\frac{g(s)}{s}\Big)\mathbf{i}+\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x}\Big(T_0\frac{g(s)}{s}u_x\Big)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

由两边 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的分量相等, 有

$$0=\frac{T_0}{D}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{g(s)}{s}\Big) \tag{2}$$

和

$$u_{tt}=\frac{T_0}{D}\frac{g(s)}{s}u_{xx}+\frac{T_0}{D}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{g(s)}{s}\Big)u_x, \tag{3}$$

其中 $s=\sqrt{1+u_x^2}$. 因此, (2) 隐含 $G(s)\equiv\frac{g(s)}{s}$ 与 x 无关. 现有

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\big(G(\sqrt{1+u_x^2})\big) \quad 或 \quad G(s(x_1,t))=G(s(x_2,t)) \tag{2'}$$

对 $[0,L]$ 中所有的 x_1 和 x_2 成立 (为什么?). 对任意固定的时间 t, 可如此选取点 x_1, 使得 $u_x(x_1,t)$ 为 0.(这里假设弦的两端点固定, 然后利用 Rolle 定理.) 于是 $s(x_1,t)=1$, 而且由于 $G(1)=g(1)/1=1$, 所以由 (2') 得出: 对任意 x_2 以及振动期间的任意 t, 有 $G(s(x_2,t))=1$. 因此, 对横向振动中出现的任意拉伸率 s, $g(s)=s$. 于是, 偏微 (3) 化为波方程:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 其中 \quad a^2=\frac{T_0}{D}. \tag{4}$$

注记 在许多的推导中, 偏微 (3) 的线性化可通过直接假设 u_x^2 是可以忽略不计的得到, 这样可以 (实在太方便了!) 在偏微 (3) 中令 $s=1$, 则该偏微就成为线性波方程 (1). 然而, u_x^2 是小量的假设就预先假定了对典型的非线性偏微 (3) 的解的某些认识 (关于线性化的缺陷, 参看第 1.2 节的例 11). 我们非但没引

入这个有疑问的假设, 而根据横向振动的假设和 Newton 定律证明 $g(s) = s$ 来说明不必去做那种假设. 性质 $g(s) = s$ 意味着弦的行为像拉伸的弹簧或橡皮筋, 但不是被拉伸得太过分, 使得 Hooke 定律有效 (参看第 1.1 节的例 6). 然而, 不是所有的弦满足 $g(s) = s$ 的, 除了在 $s = 1$ 的一个很短的区间里. 例如, 在一根捻线中的张力即使拉伸很小可无限增加, 然而由乳脂糖做成的弦由于拉伸张力甚至最终会减弱. 从本质上来说, 我们已经证明对那些拉伸倍数 $\sqrt{1+u_x^2}$ 超过某点 (x,t) 的线性弹性的弦不容许有纯横向振动 $u(x,t)$. □

固定端点的弦的标准初值问题的求解

像处理热方程一样, 由分离变量法先找出 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的所有乘积解. 把 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, 得

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \quad \text{或} \quad \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = \pm\lambda^2,$$

其中 λ 是某个非负常数. 关于 $X(x)$ 的常微 $X'' = \pm\lambda^2 X$ 与第 3.1 节中关于热方程的常微完全相同, 但关于 $T(t)$ 的常微 $T'' = \pm\lambda^2 a^2 T$ 的解, 由于是时间的二阶导数, 它们是不同的. 可能的乘积解归入下面三种情形, 其中 c_1, c_2, d_1 和 d_2 是任意常数:

情形 1 $(c = -\lambda^2 < 0)$:

$$u(x,t) = (d_1 \sin(\lambda a t) + d_2 \cos(\lambda a t))(c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)). \tag{5}$$

情形 2 $(c = \lambda^2 > 0)$:

$$u(x,t) = (d_1 e^{\lambda a t} + d_2 e^{-\lambda a t})(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}). \tag{6}$$

情形 3 $(c = \lambda^2 = 0)$:

$$u(x,t) = (d_1 t + d_2)(c_1 x + c_2). \tag{7}$$

现在将用公式来表示波方程最简单的标准初边值问题之一. 回忆一下在求解 Newton 方程 $mx''(t) = F(t)$ 中, 为了获得关于粒子的位置的唯一解, 需要指定 $x(t_0)$ 和 $x'(t_0)$. 对于波方程 (它的推导基于 Newton 方程), 也是需要不仅指定弦的初始形状 $u(x,0)$, 还要指定初始速度 $u_t(x,0)$. 不然无法得到唯一解 $u(x,t)$.

先假设弦的端点固定 (即, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$), 虽然在第 5.3 节考虑一个端点或两个端点允许垂直滑动. 期望在合理的条件下下面标准问题有唯一解:

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0\leqslant x\leqslant L, \quad -\infty<t<+\infty;\\
&\text{B.C.} \quad u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0;\\
&\text{I.C.} \quad \begin{cases} u(x,0)=f(x), & (\text{初始位置}),\\ u_t(x,0)=g(x), & (\text{初始速度}). \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}$$

要求 $u(x,t)$ 在包含带形 $0\leqslant x\leqslant L$, $-\infty<t<\infty$ 的一个开区域上 (参看第 1.2 节) 有 C^2 延拓. 像处理热方程一样, 满足 B.C. 的唯一的乘积解具有形式 (5), 其中 $c_2=0$ 且 $\lambda=n\pi/L$, $n=1,2,3,\cdots$. 通过取 D.E. 和 B.C. 这样的解的线性组合, 得到如下形式的解:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\Big[A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}\Big]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{9}$$

注意到

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi a}{L}\Big[A_n\cos\frac{n\pi at}{L}-B_n\sin\frac{n\pi at}{L}\Big]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{10}$$

在 (9) 和 (10) 中用 $t=0$ 代入, 得

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{N}B_n\sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{和} \quad u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{N}A_n\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{11}$$

总之, 我们已建立了下面结果:

命题 1 问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0\leqslant x\leqslant L, -\infty<t<+\infty\\
&\text{B.C.} \quad u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0\\
&\text{I.C.} \quad \begin{cases} u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{N}B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}\\ u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{N}\bar{A}_n\sin\dfrac{n\pi x}{L} \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

的解由下式给出

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{L}{n\pi a}\bar{A}_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{13}$$

注记 这里已经分别用 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 正弦系数 B_n 和 $\bar{A}_n$ 来表示 $u(x,t)$. 注意在 (9) 中的 A_n 是 $\frac{L}{n\pi a}\bar{A}_n$. □

当然可提出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是有限正弦级数的问题. 然而, 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,L]$ 上是连续和分段 C^1 的, 且有 $f(0)=f(L)=0$ 和 $g(0)=g(L)=0$, 则我们知道在任意一个小的正误差之内 $f(x)$ 和 $g(s)$ 可由它们的 Fourier 正弦级数的部分和一致逼近 (参看第 4.3 节的定理 1). 于是, 这样的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可由在实验误差之内的有限正弦级数来替换. 后面将证明, 如果两个解的初始形状和初始速度是接近的话, 那这两个解必是接近的 (参看第 5.2 节定理 5 的推论).

例 1 求解初边值问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}\quad,\ 0\leqslant x\leqslant L,\ -\infty<t<+\infty;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad \begin{cases} u(x,0)=f(x)=2\sin\dfrac{3\pi x}{L},\\ u_t(x,0)=g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{L}-3\sin\dfrac{5\pi x}{L}.\end{cases}
\end{aligned}$$

解 对于 $B_3=2,\ \bar{A}_1=1,\ \bar{A}_5=-3$ 以及其他的 $\bar{A}_n$ 和 B_n 都为零直接应用命题 1. 则

$$u(x,t)=\frac{L}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L}+2\cos\frac{3\pi at}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}-\frac{3L}{5\pi a}\sin\frac{5\pi at}{L}\sin\frac{5\pi x}{L}.$$

注意到为了迅速得到解, 可以在 $f(x)$ 中涉及 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 的项中插入因子 $\cos\frac{n\pi at}{L}$, 在 $g(x)$ 中涉及 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 的项中插入因子 $\frac{L}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{L}$, 然后相加得解 $u(x,t)$. □

谐波

级数 (9) 中的每项, 即 (对于 $n=1,2,3,\cdots$)

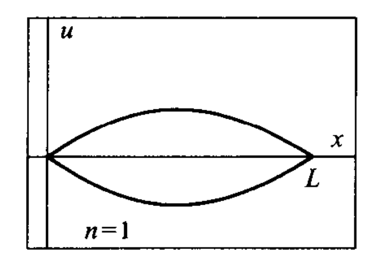
$$u_n(x,t)=\left[A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{14}$$

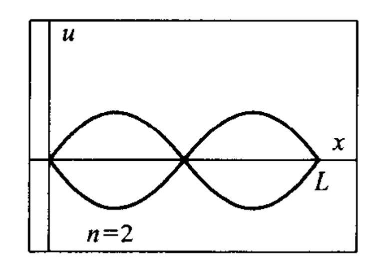
称为在 $x=0$ 和 $x=L$ 具固定端点的弦的**谐波**.

当 n 取遍 $1,2,3,\cdots$ 的值, 它们构成了 D.E.$u_{tt}=a^2u_{xx}$ 具 B.C.$u(0,t)=u(L,t)=0$ 的完全的乘积解族. 如果 A_n 和 B_n 不全为零, 可重写 $u_n(x,t)$ 如下. 令 $R_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2}$. 则存在 θ_n 使得 $\cos\theta_n=A_n/R_n$ 和 $\sin\theta_n=B_n/R_n$, 因为 $(A_n/R_n)^2+(B_n/R_n)^2=1$. 因此,

$$\begin{aligned}u_n(x,t)&=R_n\left[\cos\theta_n\sin\frac{n\pi at}{L}+\sin\theta_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}\\&=R_n\sin\left(\frac{n\pi at}{L}+\theta_n\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.\end{aligned}$$

可见随着 t 的变化 $u_n(x,t)$ 在 $\pm R_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ 之间振荡. R_n 称为 $u_n(x,t)$ 的**振幅**, θ_n 称为 $u_n(x,t)$ 的**相位**(参看图 3, 其中 $R_n=1$, $L=6$).





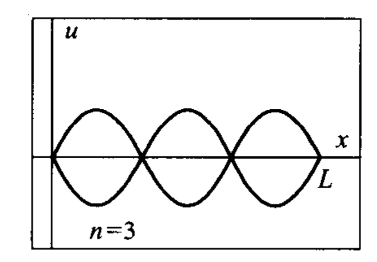


图. 3

谐波完成一次振荡所用的时间称为它的**周期**. 周期与 n 成反比. 为了求出第 n 个谐波的周期, 令 $\frac{n\pi at}{L}=2\pi$ 然后解 t, 得 $t=2L/na$. 每单位时间的振荡数称为谐波的**频率**, 它正好是周期的倒数. 于是, 弦 (端点固定) 的第 n 个谐波的周期和频率分别由下面给出:

$$P_n=\frac{2L}{na}\quad 和\quad \nu_n=\frac{1}{P_n}=\frac{na}{2L}. \tag{15}$$

唯一性和能量积分

与热方程一样, 存在唯一性问题. 对给定的 $f(x)$ 和 $g(x)$, 问题 (4) 会有不同的两个解吗?

> **定理 1 (唯一性)** 设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是下面问题的 C^2 解:
>
> $$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0\leqslant x\leqslant L,\ -\infty<t<+\infty;\\ &\text{B.C.} \quad u(0,t)=A(t), \quad u(L,t)=B(t);\\ &\text{I.C.} \quad u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x). \end{aligned}$$
>
> 对所有的 $0\leqslant x\leqslant L, \quad -\infty<t<+\infty, \quad u_1(x,t)=u_2(x,t).$

证明 令 $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. 注意到 v 满足相应的具齐次 B.C. 和 I.C. 的问题. 特别, $v(x,0)=0$ 和 $v_t(x,0)=0$. 需要证明对所有的 t, $v(x,t)=0$. 第 3.2 节在对应的定理 1 的证明中, 通过对 t 求导证明 $\int_0^L v(x,t)^2dx=0$ 来完成. 这里将证明函数

$$H(t)=\int_0^L[a^2v_x(x,t)^2+v_t(x,t)^2]dx \tag{16}$$

等于零. 一旦这个被证, 则对 $[0,L]$ 所有的 x 和所有的实数 t, $v_t(x,t)=0$, 以及 (如所希望的)

$$v(x,t)=v(x,t)-v(x,0)=\int_0^t v_t(x,t)dt=0.$$

通过积分号下求导 (参看附录 3) 和利用 $v_{tt}=a^2v_{xx}$, 来计算 $H'(t)$:

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_0^L[a^22v_xv_{xt}+2v_tv_{tt}]dx=2a^2\int_0^L[v_xv_{xt}+v_tv_{xx}]dx\\ &=2a^2\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}(v_xv_t)dx=2a^2[v_x(x,t)v_t(x,t)]|_0^L=0, \end{aligned}$$

因为 (由 B.C. $v(0,t)=0$ 和 $v(L,t)=0$) $v_t(0,t)=\frac{d}{dt}v(0,t)=0$, 以及类似地 $v_t(L,t)=0$. 由 $H'(t)=0$, 得知 $H(t)$ 是常数, 但该常数为 0, 因为根据关于 v 的初始条件 (注意到 $v_x(x,0)=\frac{d}{dx}v(x,0)=0$), 有 $H(0)=0$. □

注记 上面证明中的函数 $H(t)$ 实际上与由 $v(x,t)$ 确定的弦的总能量成正比. 的确, 从 x 到 $x+\triangle x$ 这段弦的动能近似地等于 $\frac{1}{2}(D\triangle x)[u_t(x,t)]^2$, 其中 D 是每单位长度的质量. 把弦段从 $\triangle x$ 拉伸到 $\sqrt{\triangle x^2+\triangle u^2}\approx\sqrt{1+u_x(x,t)^2}\triangle x = s\triangle x$ 所做的功 (消耗掉的能或势能) 是下面弦段在拉伸过程中长度增加 r 的作用力 (张力) 的积分:

$$\begin{aligned}\int_0^{(s-1)\triangle x} T_0\frac{\triangle x+r}{\triangle x}dr &= T_0\cdot(r+\frac{r^2}{2\triangle x})|_0^{(s-1)\triangle x}\\ &= T_0\triangle x(s-1+\frac{1}{2}(s-1)^2)=\frac{1}{2}T_0(s^2-1)\triangle x\\ &= \frac{1}{2}T_0[u_x(x,t)]^2\triangle x,\end{aligned}$$

其中, 如同波方程的推导, 已经假设了弦是线性弹性的, 且具有静止张力 T_0. 因此, 从 x 到 $x+\triangle x$ 弦段的势能是 $\approx\frac{1}{2}T_0[u_x(x,t)]^2\triangle x$. 把它与动能相加然后对所得结果积分, 得弦在时刻 t 的**能量积分**(或简单地称为**能量**)

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L[T_0[u_x(x,t)]^2+D[u_t(x,t)]^2]dx, \tag{17}$$

如果用 v 代替 u, 它是 (17) 中 $H(t)$ 的 $\frac{1}{2}D$ 倍. 对于非强迫弦, 我们认为 $E(t)$ 是常数. 因此在前面的证明中 $H'(t)=0$ 是没什么好惊讶的. 当然, 物理直觉不能替代上面 $H'(t)$ 的直接计算, 不过物理直觉确实促使我们首先考虑函数 $H(t)$. 换句话说, 唯一性 (定理 1) 证明的物理基础是能量守恒定律. □

例 2 计算第 n 个谐波的能量

$$u(x,t)=[A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

解 能量 $E(t)$ 由 (17) 定义, 从定理 1 的证明得知 $E(t)$ 是常数. 因此, $E(t)=E(0)$, 所以只需计算 $E(0)$:

$$\begin{aligned}E(0) &= \frac{1}{2}\int_0^L[T_0[u_x(x,0)]^2+D[u_t(x,0)]^2]dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^L[T_0[\frac{n\pi}{L}B_n\cos\frac{n\pi x}{L}]^2+D[\frac{n\pi a}{L}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}]^2]dx\\ &= \frac{1}{2}(\frac{n\pi}{L})^2[T_0B_n^2\int_0^L\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx+Da^2A_n^2\int_0^L\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx]\\ &= \frac{n^2\pi^2}{4L}(T_0B_n^2+Da^2A_n^2)=\frac{\pi^2}{4L}T_0(B_n^2+A_n^2)n^2=\frac{\pi^2}{4L}T_0R_n^2n^2,\end{aligned}$$

其中记住 $a \equiv \sqrt{\frac{T_0}{D}}$ 以及 $R_n^2 = A_n^2 + B_n^2$ 是谐波振幅的平方. 通过考虑 $u_x(x,t)^2$ 和 $u_t(x,t)^2$ 来直接计算 $E(t)$ 是可能的, 但相当长. 当然, 我们知道不论如何最终结果是 $E(0)$. □

注记 注意到对给定的振幅, 第 n 个谐波的能量与 n^2 成正比, 而且它与张力和振幅的平方成正比. 然而, 不像频率 $\nu_n = \frac{1}{2}nL\sqrt{\frac{T_0}{D}}$ 那样, 能量与线密度 D 无关. □

例 3 (被拨弄过的弦的运动) 求关于被拨弄过的弦的运动问题的形式解:

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ -\infty < t < +\infty \\
&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $f(x)$ 是由图 4 中所展示图像的函数. 换句话说, 弦在 $(0,L)$ 某固定点 x_0 处被 "拨弄", 被提升位移 u_0 然后以零初始速度释放, 即 $u_t(x,0) = 0$.

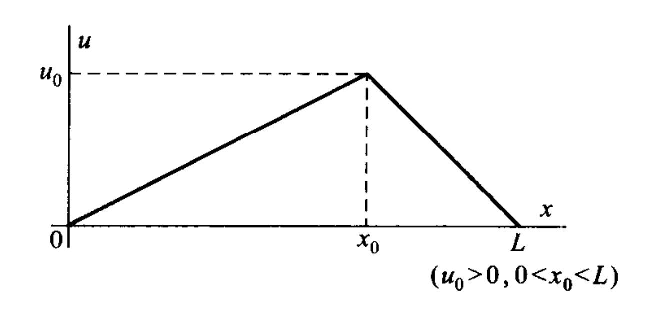


图 4

解 我们有

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{u_0}{x_0}x, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_0\dfrac{x-L}{x_0-L}, & x_0 \leqslant x \leqslant L. \end{cases}$$

问题 (18) 的形式解可通过计算 $f(x)$ 的 Fourier 正弦系数 B_n 以及对 $N = \infty$ 运用公式 (13) 获得 (参看命题 1).(形式解的概念在第 4.3 节中引入.) 注意到 $f(x)$ 是连续的和分段 C^1 的. 分部积分对这种函数适用. 因此,

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{2}{L}f(x)\left(\frac{-L}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L + \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)\int_0^L f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.
\end{aligned}$$

端点值为零, 因 $f(0)=f(L)=0$, 且由事实

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{u_0}{x_0}, & 0\leqslant x\leqslant x_0,\\ \dfrac{u_0}{x_0-L}, & x_0\leqslant x\leqslant L,\end{cases}$$

得到

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\left[\int_0^{x_0}\frac{u_0}{x_0}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\int_{x_0}^{L}\frac{u_0}{x_0-L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right]\\ &= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left(\frac{u_0}{x_0}\sin\frac{n\pi x_0}{L}-\frac{u_0}{x_0-L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\right)\\ &= \frac{2Lu_0}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{L-x_0}\right)\sin\frac{n\pi x_0}{L}\\ &= \frac{2L^2u_0}{\pi^2x_0(L-x_0)}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{L}.\end{aligned}$$

形式解是

$$u(x,t)=\frac{2L^2u_0}{\pi^2x_0(L-x_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{19}$$

令 $u_N(x,t)$ 表示 (19) 的前 N 项和. 则 $u_N(x,t)$ 是 D.E. 具给定 B.C. 的 C^∞ 解. 另外, $u_N(x,0)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数第 N 部分和, 这样就知道对充分大的 N, $u_N(x,0)$ 将在事先指定的误差内逼近 $f(x)$(参看第 4.3 节的定理 1). 于是, 作为实用目的, 被拨弄的弦的问题是可解的. 虽然可能证明和 (19) 是收敛的 (即 $u(x,t)$ 对所有的 (x,t) 有定义), 但 $u(x,t)$ 不是 C^2 的, 因此不是 D.E. 的严格解. 利用第 5.3 节的技巧, 可以证明对很多时间 t, (19) 中 $u(x,t)$ 的图像由三条线段组成, 它们的斜率在两个交汇的内角处不相等. 的确, 这两个角沿着由原形状和它经在 x-轴上点 $\frac{1}{2}L$ 反射形成的平行四边形上以相反的方向移动 (以水平速度 a)(参看图 5). 注意到 $u(x,t+\frac{2L}{a})=u(x,t)$. 特别, 在 $t=\frac{2L}{a}$ 时, 弦又回复到原来被拨弄时的位置并重复它的运动. 使 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 为零的值 $\frac{L}{n}$, $\frac{2L}{n}$, $\frac{3L}{n}$, $\cdots$, $\frac{(n-1)L}{n}$ 称为谐波 $\cos\frac{n\pi at}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$ 的**节点**. 公式 (19) 显示以 x_0 作为一个节点的那些谐波在和式中消失了, 这是由于有 $\sin\frac{n\pi x_0}{L}$ 的因子. □

概要 5.1

1. 波方程推导: 在一根线密度为 D 的弦在两点之间受到张力是 T_0 的拉伸下只作横向振动的假设下, 证明了 (根据 Newton 方程 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$) 振动的振幅

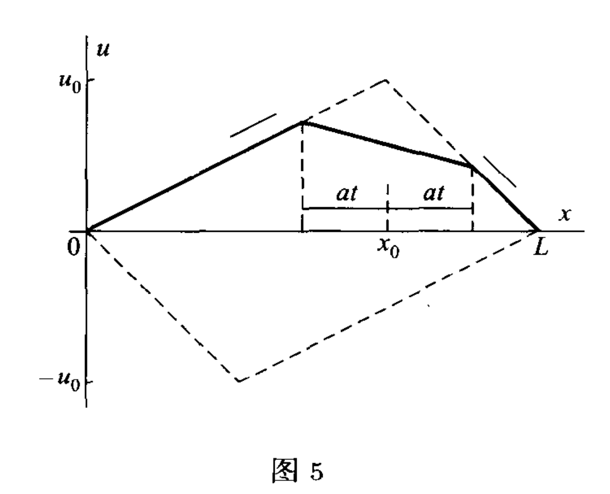


图 5

$u(x,t)$ 必须服从波方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$, 其中 $a^2\equiv\frac{T_0}{D}$. 在推导过程中, 证明了作横向振动的弦必是线性弹性的 (即, 在任意点的张力具有形式 sT_0, 其中 $s\equiv\sqrt{1+u_x^2}$ 是局部拉伸系数). 因此, 对横向振动的弦, 为了得到一个关于 $u(x,t)$ 的线性波方程, 不需要假设 u_x^2 是可忽略不计的.

2. 固定端点的标准问题 (命题 1): 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<+\infty;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad\begin{cases}u(x,0)=f(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L},\\u_t(x,0)=g(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}\bar{A}_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}\end{cases}\end{aligned}\tag{S1}$$

的解由下式给出:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}[\frac{L}{n\pi a}\bar{A}_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}]\sin\frac{n\pi x}{L}.\tag{S2}$$

3. 谐波: (S1) 的 D.E. 和 B.C. 的乘积解称为**谐波**, 它们具形式 (其中 $n=1,2,3,\cdots$):

$$u_n(x,t)=[A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}]\sin\frac{n\pi x}{L}=R_n\sin(\frac{n\pi at}{L}+\theta_n)\sin\frac{n\pi x}{L},\tag{S3}$$

其中 $R_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$ 是谐波的振幅,

$$\frac{A_n}{R_n}=\cos\theta_n\quad 和\quad \frac{B_n}{R_n}=\sin\theta_n$$

定义**相位**θ_n.

4. 能量: (S1) 的任意解在时刻 t 的能量由下式给出

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [T_0[u_x(x,t)]^2 + D[u_t(x,t)]^2]dx, \tag{S4}$$

在唯一性定理 (定理 1) 的证明中已证明它是常数. 在例 2 中已计算出 (S3) 中谐波 $u_n(x,t)$ 的能量为 $\frac{\pi^2}{4L}T_0R_n^2n^2$.

5. 唯一性: 定理 1 隐含 (S2) 是问题 (S1) 的唯一解. 更一般地, 即使 (S1) 中的 B.C. 用 $u(0,t)=A(t)$ 和 $u(L,t)=B(t)$ 来替换, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不必是有限的 Fourier 正弦级数, 定理 1 表明由此得到的问题至多只有一个 C^2 解 (可能无解). 通过证明两个解的差的能量与时间无关且最初时为零来进行定理的证明.

6. 被拨弄的弦: 在例 3 中求出了关于被拨弄过的弦的问题的形式解. 通过截取该形式解, 可构造出 D.E. 和 B.C. 的 C^∞ 解, 该解在任意事先指定的实验误差内满足 I.C.. 然而, 可以证明形式解的全部和收敛到一个具有若干角点的函数 (它不是 C^1 的), 这些角点以相反的方向沿着一个平行四边形移动, 如图 5 所示那样.

练习 5.1

1. 对下列情形求解问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ -\infty<t<+\infty\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x).
\end{aligned}$$

(a) $f(x)=3\sin\frac{\pi x}{L}-\sin\frac{4\pi x}{L},\quad g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}$,

(b) $f(x)=\sin^3\frac{\pi x}{L},\quad g(x)=0$,

(c) $f(x)=0,\quad g(x)=\sin\frac{\pi x}{L}\cos^2\frac{\pi x}{L}$,

(d) $f(x)=\sin^3\frac{\pi x}{L},\quad g(x)=\sin\frac{\pi x}{L}\cos^2\frac{\pi x}{L}$.

提示 对于 (b) 和 (c), 利用三角恒等式. 对 (d), 利用叠加原理.

2. 假设 $u(x,t)$ 满足 $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $(a\neq 0)$.

(a) 令 α, β, x_0 和 t_0 是常数, 且 $\alpha\neq 0$. 证明函数 $v(x,t)$ 满足 $v_{tt}=(\beta a/\alpha)^2v_{xx}$, 其中 $v(x,t)=u(\alpha x+x_0,\beta t+t_0)$.

(b) 对任意常数 ω, 令 $\bar{x}=\cosh(\omega)x+a\sinh(\omega)t$ 和 $\bar{t}=a^{-1}\sinh(\omega)x+\cosh(\omega)t$. 回忆起 $\cosh^2\omega-\sinh^2\omega=1$, 证明 $x=\cosh(\omega)\bar{x}-a\sinh(\omega)\bar{t}$ 和 $t=-a^{-1}\sinh(\omega)\bar{x}+\cosh(\omega)\bar{t}$(即 $(x,t)\to(\bar{x},\bar{t})$ 是可逆的变量变换.)

(c) 定义 $\bar{u}(\bar{x},\bar{t})=u(x,t)$. 证明 $u_{tt}-a^2u_{xx}=\bar{u}_{\bar{t}\,\bar{t}}-a^2\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$.

提示 由链法则, $u_x=\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_x+\bar{u}_{\bar{t}}\bar{t}_x=\bar{u}_{\bar{x}}\cosh\omega+\bar{u}_{\bar{t}}a^{-1}\sinh\omega$, 类似地计算 u_{xx} 和 u_{tt}.

注记 变换 $(x,t)\to(\bar{x},\bar{t})$ 称为耦合空间和时间的 **Lorentz变换**. (c) 部分表明波方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 在 Lorentz 变换下保持形式不变. 用这种方法, Albert Einstein(1879—1955) 提出了他著名的时空统一理论 (即相对论). 在许多物理学的书籍中, 把 $\cosh\omega$ 写成 $\sqrt{1-v^2/a^2}$, 则 $\sinh\omega$ 就写成 $\pm\frac{v}{a}\sqrt{1-v^2/a^2}$ (为什么?), 其中 vi 是两位观察者的相对速度, $a=c=$ 光速 $\approx 2.99\times10^8$m/sec.

3. 在波方程的推导中 (第 5.1 节) 我们没有考虑重力的作用, 重力在 x_0-h 和 $x-0+h$ 之间的弦段上施有附加的力 $2hDg\mathbf{j}$, 其中 $g=32\text{ft/sec}^2$ 是重力加速度.

(a) 如果考虑重力的作用, 推断 $u(x,t)$ 服从 $u_{tt}=a^2u_{xx}-g$.

(b) 求 $u_{tt}=a^2u_{xx}-g$ 满足 B.C. $u(0,t)=0$ 和 $u(L,t)=0$ 的一个解, 且该解与 t 无关 [即 $u(x,t)=U(x)$]. 该解代表了什么?

4. 在第 5.3 节, 我们证明 B.C. $u_x(0,t)=0$ 意味着弦在端点 $x=0$ 可自由垂直滑动 (对端点 $x=L$ 类似). 证明: 定理 1 的证明得出在一个或两个端点都是自由滑动的情形的唯一性.

5. 设 $v(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 是下面问题的 C^2 解

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\qquad 0\leqslant x\leqslant L,\ -\infty<t<+\infty$$

$$\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0.$$

(a) 利用定理 1 证明的技巧来证明

$$\frac{d}{dt}\int_0^L[a^2v_x(x,t)w_x(x,t)+v_t(x,t)w_t(x,t)]dx=0.$$

提示 $v_{xt}w_x+v_xw_{xt}+v_{xx}w_t+v_tw_{xx}=(v_tw_x+v_xw_t)_x$.

(b) 令 $B(v,w)=\int_0^L[\frac{1}{2}T_0v_xw_x+\frac{1}{2}Dv_tw_t]dx$. 在 (a) 部分, 证明了 $B(v,w)$ 是与 t 无关的常数. 注意到 $u(x,t)$ 的能量 E_u 是 $B(u,u)$. 建立结果:

$$B(v+w,v+w)=B(v,v)+B(w,w)+2B(v,w),\tag{$*$}$$

即, $E_{v+w}\neq E_v+E_w$, 除非 $B(v,w)=0$.

提示 把 $B(v+w,v+w)$ 用积分形式写出来更合适, 注意到性质 $B(u_1,u_2)=B(u_2,u_1)$ 和 $B(u_1+u_2,u)=B(u_1,u)+B(u_2,u)$ 是显然的, 这些都是得到 $(*)$ 所需的.

(c) 证明对任意两个谐波, 比如 $u_n(x,t)$(公式 (14)) 和 $u_m(x,t)$, 其中 $m \neq n$, 有 $B(u_m, u_n) = 0$. 由 (b) 得出 $u_m + u_n$ 的能量是 u_n 和 u_m 的能量的和. 如果 $n = m$ 这个结果仍为真吗? 为什么不是?

(d) 证明

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} [\frac{L}{n\pi a}\bar{A}_n \sin\frac{n\pi at}{L} + B_n \cos\frac{n\pi at}{L}] \sin\frac{n\pi x}{L}$$

的能量是

$$E_u = \frac{\pi^2 T_0}{4L}\sum_{n=1}^{L} n^2 [B_n^2 + (\frac{L\bar{A}_n}{n\pi a})^2].$$

提示 $E_u = B(u,u) = B(\sum_{n=1}^N u_n, \sum_{n=1}^N u_n) = \sum_{n=1}^N B(u_n,u_n) + 2\sum_{m<n\leqslant N}^N B(u_m,u_n) = \sum_{n=1}^N B(u_n,u_n)$.

6. 考虑问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ -\infty < t < +\infty;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0) = x(\pi - x), \quad u_t(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

(a) 求 D.E. 和 B.C. 在 0.001 的误差之内满足 I.C. 的一个解.

(b) 通过在 $(x,t) = (0,0)$ 处计算 u_{tt} 和 u_{xx} 来证明本问题没有 C^2 解.

7. 考虑一根弦在 xy–平面中振动, 但不必是横向振动. 当弦是静止时弦上的点具有形式 $(x,0)$ 的坐标 $(0 \leqslant x \leqslant L)$. 假设在时刻 t, 在静止时位置是 $(x,0)$ 的点具有 xy–坐标 $(r(x,t), u(x,t))$,[例如, 对于横向振动 $r(x,t) = x$, 对纵向振动 $u(x,t) = 0$].

(a) 证明对应于点 x 的局部拉伸系数 s 是 $\sqrt{r_x^2 + u_x^2}$.

(b) 假设对应于点 x 的张力仍然是具有形式 $g(s)T_0$. 根据 Newton 方程 ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) 证明 $r(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 满足方程组

$$r_{tt} = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x}(T_0 \frac{g(s)}{s} r_x) \quad \text{和} \quad u_{tt} = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x}(T_0 \frac{g(s)}{s} u_x),$$

其中 $s = \sqrt{r_x^2 + u_x^2}$, 并有 B.C. $r(0,t) = u(0,t) = u(L,t) = 0$ 和 $r(L,t) = L$.

(c) 什么时候这些方程是非耦合的, 即它们可分别求解?

(d) 如果 D 和 T_0 允许是 x 的 C^1 函数, 这些方程仍然有效, 但 $T_0(x)$ 不能从圆括号中提出来. 假设 $g(s) = s$ 以及 $\int_0^L [T_0(x)]^{-1} dx < \infty$, 求方程组唯一的具有给定 B.C. 的与时间无关 (稳态) 的解 $(R(x), U(x))$. 什么时候 $R(x) \equiv x$? 即, 当弦是以标准形状 $(x,0)$, $0 \leqslant x \leqslant L$ 时, 在什么情况下该弦是真正静止的?

8. 对于在一介质, 比如在空气中横向振动的弦, 必须把空气的阻力考虑进去. 假设空气阻力与速度 $u_t(x,t)\mathbf{j}$ 成正比 (是反向的正比), 证明 $u(x,t)$ 服从方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx} - k u_t$, 其中 $k > 0$ 为某个实数.

9. 利用分离变量求下面具空气阻力以及端点固定的弦问题 ($k>0$) 所有的乘积解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}-ku_t,\qquad 0\leqslant x\leqslant L,\ -\infty<t<+\infty;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0.\end{aligned}$$

§5.2 波问题的 D'Alembert 解法

我们已经知道下面问题的解 (其中 $N<\infty$)

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)=\textstyle\sum_{n=1}^N B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}, u_t(x,0)=g(x)=\textstyle\sum_{n=1}^N \bar{A}_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}\end{aligned}\tag{1}$$

由级数给出

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^N\Big[\frac{L}{n\pi a}\bar{A}_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}\Big]\sin\frac{n\pi x}{L}.\tag{2}$$

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是有限的 Fourier 正弦级数, 但是连续的和分段 C^1 的, 且在 $x=0$ 和 $x=L$ 处为零, 通过截取它们的 Fourier 正弦级数, 可在任一 (正的) 实验误差之内逼近 $f(x)$ 和 $g(x)$(参看第 4.3 节的定理 1). 因此, 对这样的 $f(x)$ 和 $g(x)$, 问题 (1) 就实用目的来说, 像大家所知的几乎都已得解. 然而, 为了理论具有精确的价值, 我们需要知道在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 方面的小变化引起在解方面的小变化. 否则, 两个不同的逼近, 它们都在实验误差之内, 可能导致引起显著不同的解. 这种"解关于 I.C. 方面变化的连续性"性质, 热方程已经利用最大值原理建立 (参看第 3.2 节的定理 2). 然而, 把最大值原理直接转到波问题 (1) 的情形是失效的, 如下例所示.

例 1 在问题 (1) 中取 $f(x)=0$ 和 $g(x)=\sin(\pi x/L)$. 证明解 $u(x,t)$ 的最大值不在 $t=0$, $x=0$ 或 $x=L$ 上出现.

解 解是 $u(x,t)=\frac{L}{\pi a}\sin(\pi at/L)\sin(\pi x/L)$. 注意到 $u(x,t)$ 在端点以及在初始时取零 (即 $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$, $u(x,0)=0$). 然而, $u(x,t)\neq 0$, 似乎应

该作为热方程最大值原理的直接结论所隐含的. 的确, $u(x,t)$ 的最大值出现在 $x=\frac{1}{2}L,\ t=\frac{1}{2}L/a$ (以及出现在 $t=(2n+\frac{1}{2})L/a,\ n=0,\pm1,\cdots$). □

最大值原理直接转换失败的原因是 (1) 中 I.C. 的两个条件没有都被考虑进去. 最终 (参看定理 5), 我们证明 (1) 的解 $u(x,t)$ 服从下面类型的最大值原理:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant L,\ -\infty<t<\infty}|u(x,t)|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant L}|f(x)|+\frac{L}{2a}\max_{0\leqslant x\leqslant L}|g(x)|. \tag{3}$$

注意到其中涉及 $f(x)$ 和 $g(x)$, 而且绝对值不能去掉. 利用 (3), 将建立所期望的结果 (参看定理 5 的推论): 在 I.C. 方面的小变化导致解方面的小变化. 对热方程在第 3.2 节的定理 3 已经得到. 得到 (3) 的关键是具 I.C.$u(x,0)=f(x)$ 和 $u_t(x,0)=g(x)$ 的无限弦 $(-\infty<x<\infty)$ 波方程解的 **D'Alembert公式**, 即

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(r)dr. \tag{4}$$

该公式本身就非常有意义, 它避免了以 Fourier 级数逼近的无穷级数的收敛问题. 我们首先的目的是推导 D'Alembert 公式 (4).

D'Alembert 公式的推导

可把波方程写成下面形式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=0, \tag{5}$$

其中在圆括号中表示的是一个微分算子, 它作用到函数 u 得 $u_{tt}-a^2u_{xx}$. 它可分解成两个一阶算子相乘:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)u. \tag{6}$$

可以利用这个分解求出波方程的通解. 假设 $u(x,t)$ 是 (5) 的任一 C^2 解. 注意到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)[u_t+au_x]=u_{tt}-a^2u_{xx}=0.$$

换句话说, 函数 $y(x,t) \equiv u_t + au_x$ 满足偏微 $y_t - ay_x = 0$. 由于该偏微的特征线 (参看第 2.1 节) 具有 $x+at=$ 常数 的形式, 所以得知解 y 必具 $y(x,t)=h(x+at)$ 的形式, 其中 h 为某个 C^1 函数. 因此,

$$u_t + au_x = y(x,t) = h(x+at).$$

这个关于 u 的一阶偏微的特征线是 $x-at=$ 常数. 鉴于右端 $h(x+at)$ 的形式, 作变量变换

$$w = x - at \quad \text{和} \quad z = x + at.$$

令 $v(w,z) = u(x,t)$, 得

$$u_t + au_x = v_w w_t + v_z z_t + a(v_w w_x + v_z z_x) = 2av_z = h(z).$$

从而, $v(w,z) = \int \frac{1}{2a} h(z)dz + G(w) = F(z) + G(w)$, 或

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at). \tag{7}$$

于是证明了波方程的任意解能写成 (7) 的形式, 其中 F 和 G 是任意 C^2 函数. 反过来, 容易验证任一形式 (7) 的函数是波方程的解 (即 (7) 是通解). 如果对固定的 t 要绘出作为 x 的函数 $F(x+at)$ 的图像, 可通过把 $F(x)$ 的图像向左平移 “at” 的距离得到, 正如读者可验证的. 因此, $F(x+at)$ 描述了具初始形状 $F(x)$ 的波以速度 a 向左移动. 类似地,$G(x-at)$ 产生以速度 a 向右传播的波. 我们已经证明 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的解是以速度 a 沿相反方向传播的两个波的叠加.

例 2 我们知道 $\cos(\lambda at)\sin(\lambda x)$ 是 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的 (乘积) 解. 因此, 必能把 $\cos(\lambda at)\sin(\lambda x)$ 写成 $F(x+at) + G(x-at)$ 的形式. 请写出这种形式.

解 对 $\alpha = \lambda x$ 和 $\beta = \lambda at$ 利用恒等式 $\cos\beta\sin\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$, 得

$$\cos(\lambda at)\sin(\lambda x) = \frac{1}{2}[\sin(\lambda(x+at)) + \sin(\lambda(x-at))].$$

这就表示为 “驻波” 乘积解, 作为以速度 a 向右和向左传播的波的叠加. □

定理 1(D'Alembert 公式) 对 $-\infty < x < \infty$, 设 $f(x)$ 是 C^2 的, $g(x)$ 是 C^1 的. 则问题

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < t < \infty \\ \text{I.C.} & u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \end{array} \tag{8}$$

的唯一解由下式给出

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(r)dr. \tag{9}$$

证明 我们知道, 如果 (8) 的解存在, 则它必有一般形式 $u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$, 其中 F 和 G 是 C^2 函数. 由 I.C., 得

$$f(x) = u(x,0) = F(x+0\cdot a) + G(x-0\cdot a) = F(x) + G(x), \tag{10}$$

$$g(x) = u_t(x,0) = F'(x)a - G'(x)a. \tag{11}$$

对第二个方程积分, 得到下面关于未知函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的一对方程:

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad F(x) - G(x) = \frac{1}{a}\int_0^x g(r)dr + C,$$

其中 C 是任意常数. 两式相加及相减, 得

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{a}\int_0^x g(r)dr + C\right] \tag{12}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{a}\int_0^x g(r)dr - C\right] = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{a}\int_x^0 g(r)dr - C\right]. \tag{13}$$

这些等式对所有的 x 是恒等的, 就如同 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 是恒等的. 由此, 在 (12) 中用 $x+at$ 替换 x 而在 (13) 中以 $x-at$ 替换 x, 得到有效的结果 [例如, $\sin^2(x+at) = 1 - \cos^2(x+at)$], 即

$$F(x+at) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + \frac{1}{a}\int_0^{x+at} g(r)dr + C\right], \tag{14}$$

$$G(x-at) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^0 g(r)dr - C\right]. \tag{15}$$

将这些表达式相加就得到 (9). 然而, 上述的证明是基于问题 (8) 的解存在的假设的. 我们刚证明了如果解存在, 则该解必由 D'Alembert 公式 (9) 给出. 最后我们必须证明由 (9) 给出的 $u(x,t)$ 确实满足 (8). 注意到由 (12) 和 (13) 定义的 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是 C^2 的, 因为 $f(x)$ 是 C^2 的, $g(x)$ 是 C^1 的 ($\int_0^x g(r)dr$ 是 C^2 的, 因为它的导数是 C^1 的).(9) 的右边是 $F(x+at)+G(x-at)$, F 和 G 是 C^2 函数, 因此可知由 (9) 定义的 $u(x,t)$ 满足 D.E.. 初始条件 (8) 满足, 因为根据 F 和 G 构造, 由 (12) 和 (13) 定义的 $F(x)$ 和 $G(x)$ 满足 (10) 和 (11). □

注记 在问题 (8) 中没有边界条件, 因为弦没有端点. 对一有限弦, 比如 $0 \leqslant x \leqslant L$, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 只定义在 $[0,L]$ 上, 且 $f(x \pm at)$ 对大的 t 将无定义, 造成解 (9) 不确定. 后面通过把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 延拓成 (以多种方式延拓, 这取决于 B.C.) 对所有的 x 有定义的函数来解决这个问题. □

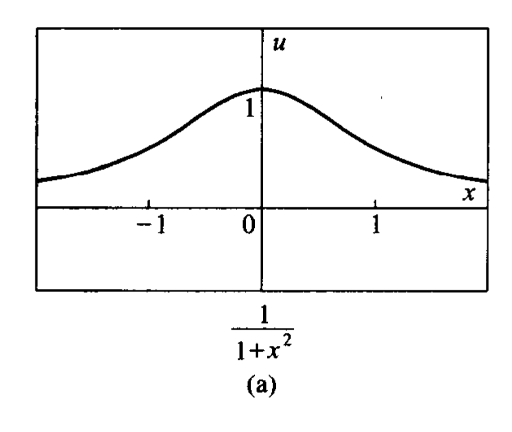
例 3 求解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x,\ t < \infty \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

解 这是以 $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ 和 $g(x)=0$ 的问题 (8). 由 (9), 该解为

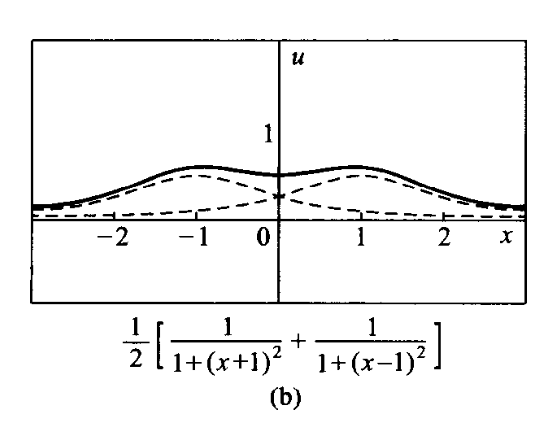
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1+(x+at)^2} + \frac{1}{1+(x-at)^2}\Big]. \tag{16}$$

初始形状 $u(x,0)$ 的图像由下面的图 1(a) 显示.



$\frac{1}{1+x^2}$

(a)



$\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1}{1+(x-1)^2}\Big]$

(b)

图 1

在 $t=1/a$ 时 $u(x,t)$ 的图像是图 1(b) 中实线的曲线, 它由叠加在 $t=1/a$ 时对应于解 (16) 中的两项的两个虚线图像来获得. 最终, 该解看上去像两个形如 (a)

中的波形, 但具有一半的振幅, 一个以速度 a 向左移动, 而另一个以速度 a 向右移动. 你也许希望通过用一根长绳做实验来证实这种行为确实会发生. □

例 4 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x,\ t < \infty\\&\text{I.C.} \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \frac{2}{1+x^2}.\end{aligned}$$

在任意固定的 x, 当 $t \to \infty$ 时 $u(x,t)$ 的振幅的极限是多少?

解 这时弦最初是平直的 ($u(x,t)=0$), 但在 $t=0$ 有可变的向上速度. 在 x 处的向上速度是 $2(1+x^2)^{-1}$. 由 (9),

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{2}{1+r^2}dr = \frac{1}{a}[\arctan(x+at) - \arctan(x-at)].$$

在 $t = 1/a$ 时两条虚线曲线的和 (实线) 的图形在下面图 2(a) 中展示:

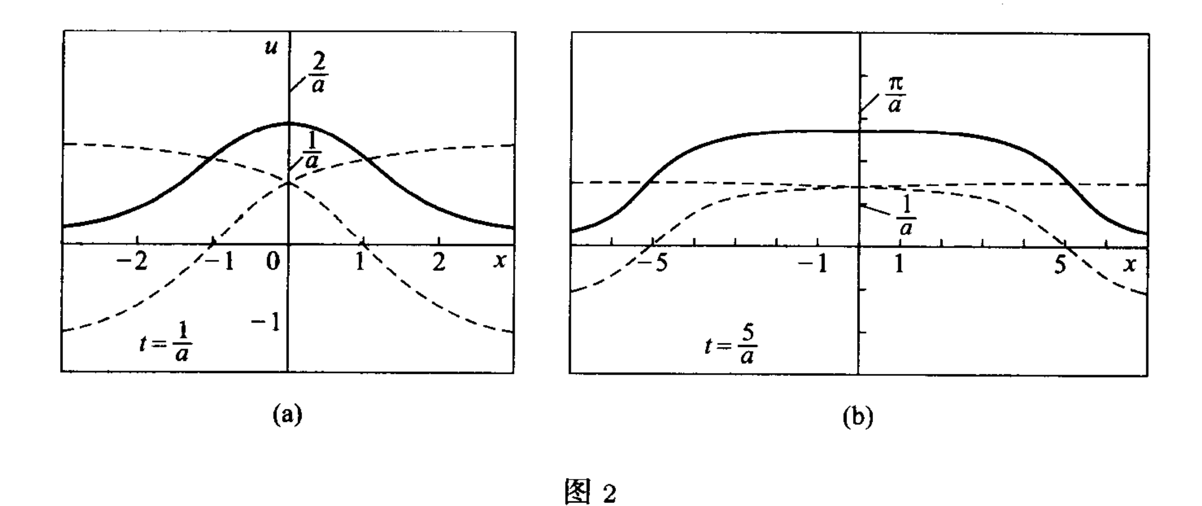


图 2

随着时间的进展, 虚线曲线往左和往右移动, 它们的和的图像如图 2(b) 展示. 注意到对每个固定的 x, 有

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{a}[\arctan\infty - \arctan(-\infty)] = \frac{\pi}{a}.$$

□

定理 2 (最大绝对值原理)　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $-\infty < x < \infty$ 上 C^2 和 C^1 的. 假设 $M_f = \max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty$,(见下面的注记) 并设 I_g 是当 c 和 d 在所有可能的取值中变化时绝对值 $|\int_c^d g(x)dx|$ 的最大值. 则

$$\begin{aligned}&\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < t < \infty\\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)\end{aligned}$$

的解满足

$$|u(x,t)| \leqslant M_f + \frac{1}{2a} I_g \quad (-\infty < x,\ t < \infty).$$

证明　利用 D'Alembert 公式 (9), 得

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}(|f(x+at)| + |f(x-at)|) + \frac{1}{2a}\left|\int_{x-at}^{x+at} g(r)dr\right| \leqslant \frac{1}{2} 2M_f + \frac{1}{2a} I_g. \quad \square$$

注记　因为有些读者知道这种区别, 这里以及所有地方 (参看第 211 页), "max" 应理解成可以是 $+\infty$ 的 "sup". 同样, 下面的 "min" 应理解为 "inf". 当 $g(x) \equiv 0$ 时, 得 $|u(x,t)| \leqslant M_f$, 即, $u(x,t)$ 的绝对值不超过在 $t=0$ 时 u 的最大绝对值. 的确, 当 $g(x) \equiv 0$ 时, 可得下面通常意义的最大值最小值原理 (参看习题 8):

$$\min_{-\infty<x<\infty} f(x) = \min_{-\infty<x<\infty} u(x,0) \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{-\infty<x<\infty} u(x,0) = \max_{-\infty<x<\infty} f(x).$$

当对所有的 $x, g(x) \geqslant 0$ 时, 注意到 $I_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$. 在例 4 中, 有 $I_g = \int_{-\infty}^{\infty} 2(1+x^2)^{-1}dx = 2\pi$, 于是,$|u(x,t)| \leqslant \pi/a$. 认识到下面情形是重要的: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$ 会是无穷, 然而 I_g(如定理 2 中定义) 也许是有限的. 的确, 对 $g(x) = \sin x$ 就是这种情形, 这时 $I_g = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$, 而 $\int_{-\infty}^{\infty} |\sin x| dx = \infty$. □

D'Alembert 公式除了得出最大绝对值原理之外, 还得出无限弦波问题解的许多性质.

性质 1　干扰以速度 a 传播.

值 $u(x_0, t_0)$ 只依赖于 g 在区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 中的值和 f 在该区间的端点值. 从几何上看, 这是由过点 (x_0, t_0) 的特征线所截取的区间, 如图 3 所示.

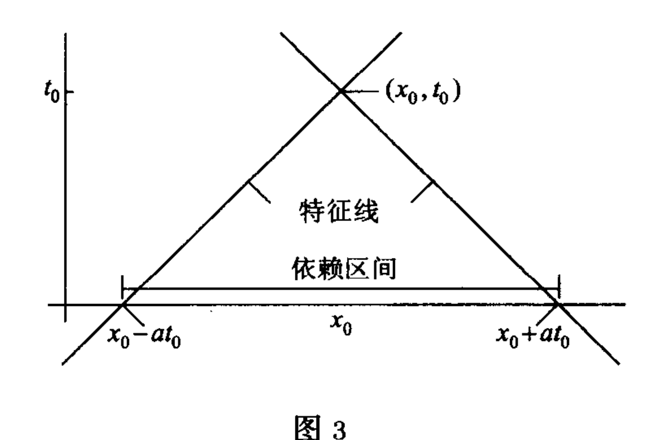


图 3

定义 区间 $[x_0-at_0, x_0+at_0]$ 称为关于点 (x_0,t_0) 的**依赖区间**, [因为 $u(x_0,t_0)$ 只依赖于 x 在这个区间中的 $u(x,0)$ 和 $u_t(x,0)$ 的值].

物理解释是 a 表示干扰沿着弦移动的速度. 这种干扰在时间 t_0 内不能达到弦上 x_0 的点, 除非在 $t=0$ 时弦没有比离开 at_0 单位更远的位置 (即, 除非弦在 (x_0,t_0) 的依赖区间之内). 在第七章, 我们将发现, 若 $t_0>0$, 关于无限杆热方程点 (x_0,t_0) 的依赖区间由整个杆组成 (即, 针对热方程 [但不是 "真实" 的, 因为速度的极限是光速 c], 热以无限速度传播). □

性质 2 奇/偶初始数据产生奇/偶解.

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是奇的, 则 $u(x,t)$ 关于 x 变量是奇的, 因为

$$\begin{aligned}
u(-x,t) &= \frac{1}{2}[f(-x+at)+f(-x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at} g(r)dr \\
&= \frac{1}{2}[-f(x-at)-f(x+at)]-\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at} g(-s)ds \\
&= -\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at} g(s)ds \\
&= -\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds \\
&= -u(x,t).
\end{aligned}$$

实际上, 由唯一性推理可得到 $u(-x,t)=-u(x,t)$. 显然易见函数 $v(x,t)=-u(-x,t)$ 满足 D.E. $v_{tt}=a^2v_{xx}$ 以及 $v(x,0)=-u(-x,0)=-f(-x)=f(x)$

和 $v_t(x,0) = -u_t(-x,0) = -g(-x) = g(x)$, 即, $v(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 满足同样的定理 1 的问题 (8). 唯一性以及 v 的定义隐含 $u(x,t) = v(x,t) = -u(-x,t)$. 于是 $u(-x,t) = -u(x,t)$. 用类似的论证方法可以证明, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是偶的, 则 $u(x,t)$ 也是偶的 [即, $u(-x,t) = u(x,t)$]. □

性质 3 周期初始数据产生周期解.

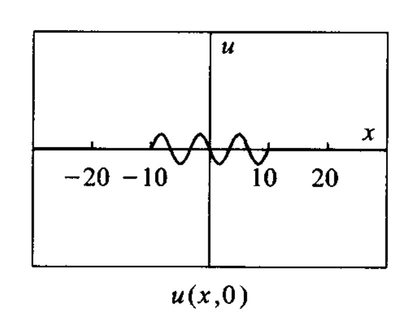
如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 则 $u(x,t)$ 关于 x 也是周期是 $2L$ 的周期函数. 由 D'Alembert 公式容易得出这个结论, 而这也是用唯一性论证方法 [$v(x,t) \equiv u(x+2L,t)$ 满足相同的问题]. 这个事实在处理有限弦时是有用的. 可以证明 (参看习题 11) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数且 $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0$, 则 $u(x,t)$ 不仅关于 x 是以 $2L$ 为周期的周期函数, 而且关于 t 是以 $2L/a$ 为周期的周期函数. □

例 5 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 C^2 函数且当 $|x| \geqslant 10$ 时为 0. 假设 $u(x,t)$ 是波方程 $u_{tt} = 4u_{xx}$ 且满足 $u(x,0) = f(x)$ 和 $u_t(x,0) = g(x)$ 的解. 验证对 $t \leqslant 15$, $u(40,t) = 0$.

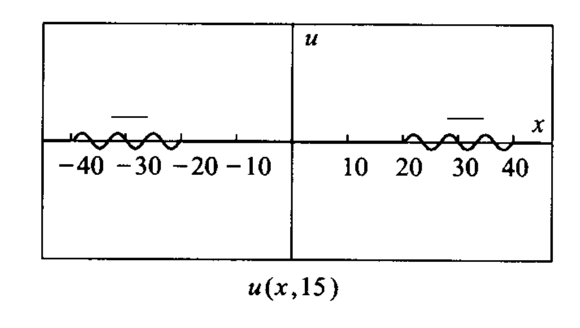
解 这里 $a = 2$, 直觉上预料初始扰动 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的传播速度不会超过 2. 由于这些干扰在 $t = 0$ 时是局限在区间 $(-10,10)$ 内 (参看图 4), 所以认为在区间 $(-10-2t, 10+2t)$ 外 $u(x,t)$ 为零. 点 $x = 40$ 只有当 $t > 15$ 时落在该区间, 因此对于 $t \leqslant 15$, $u(40,t) = 0$. 的确, 利用 D'Alembert 公式, 有

$$u(40,t) = \frac{1}{2}[f(40+2t) + f(40-2t)] + \frac{1}{4}\int_{40-2t}^{40+2t} g(r)dr,$$

此式在 $t \leqslant 15$ 时为零, 因为在 $t \leqslant 15$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[40-2t, 40+2t]$ 上为零. □



$u(x,0)$



$u(x,15)$

图 4

例 6 (半无限弦) 令 $f(x)$ 是定义在 $x \geqslant 0$ 上的 C^2 函数, 且 $f(0) = 0$ 和 $f''(0) = 0$. 解下面在端点 $x = 0$ 固定的半无限弦 $(0 \leqslant x < \infty)$ 问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad -\infty < t < \infty \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0 \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

解 利用性质 2. 注意到 $f(x)$ 是定义在 $x \geqslant 0$ 上, 但可考虑 (参看图 5) 奇延拓 $f_o(x)$, $-\infty < x < \infty$ (即, $f_o(x) = f(x)$, $x \geqslant 0$ 和 $f_o(x) = -f(-x)$, $x \leqslant 0$).

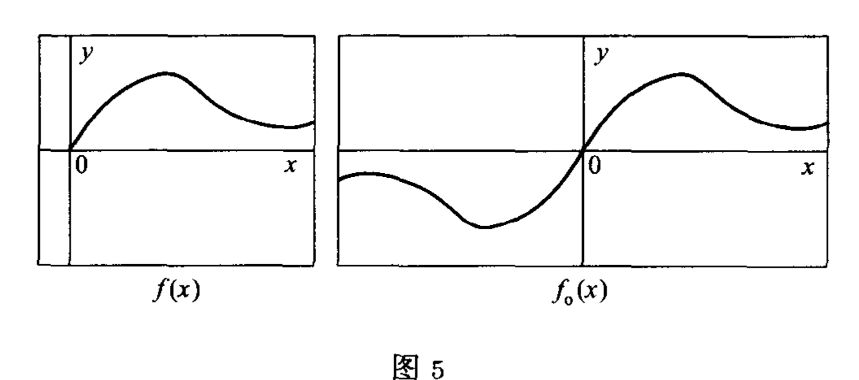


图 5

"相应的延拓问题" 是

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty \leqslant x,\ t < \infty \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f_o(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

根据 D'Alembert 公式, 该问题的解是

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f_o(x+at) + f_o(x-at)]. \tag{19}$$

由性质 2, 得知 (19) 中的 $u(x,t)$ 关于 x 是奇的, 因 $f_o(x)$ 是奇的. 因此, $u(0,t) = 0$(如直接从 (19) 可看出), 所以 (19) 中的 $u(x,t)$ 满足 (17) 中的 B.C.. 为了 $f_o(x)$ 在 $x = 0$ 处是 C^2 的, 需假设 $f''(0) = 0$(不然 $f_o''(0^+) \neq f_o''(0^-)$ ①. 于是 $u(x,t)$ 是 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的 C^2 解. 此外,

$$u(x,0) = \frac{1}{2}[f_o(x + a \cdot 0) + f_o(x - a \cdot 0)]f_o(x),$$

当 $x \geqslant 0$ 时它与 $f(x)$ 相等 (即,(17) 的 I.C. 满足). □

①原文误为 $f''(0^+) \neq f''(0^-)$.——译者

注记 例 6 中用的方法称为**镜像法**. 我们以在 $x=0$ 处的边界条件开始着手区间 $0 \leqslant x < \infty$ 上的问题 (17). 通过考虑初始数据的倒镜像 (奇延拓), 可把问题 (17) 转化成熟悉的关于无限弦的问题 (18). 奇延拓迫使 (18) 在 $x=0$ 处为零. 若 (17) 的 B.C. 换成 $u_x(0,t)=0$(物理上看, 这意味着在端点 $x=0$ 处可自由垂直滑动; 参看第 5.3 节), 则在相应的延拓问题中我们应该取 f 的偶延拓 f_e(因为假设 $f'(0)=0$).(18) 用 f_e 代替 f_o 的解是 $u(x,t)=\frac{1}{2}[f_e(x+at)+f_e(x-at)]$, 且 $u_t(0,t)=\frac{1}{2}[(f_e)'(at)+(f_e)'(-at)]=0$. 若 $g(x)$ 不为零, 就利用 $g(x)$ 的与 $f(x)$ 相同类型的延拓. 这由下面例子来说明. □

例 7 在端点固定半无限弦上, 在 $t=0$ 时波具有曲线 $f(x)$(参看图 6). 假设对小的 t, $u(x,t)=f(x+at)$, 即, 波以速度 a 向左移动. 在 $t=2$ 时波触碰到端点. 在 $t=2$ 之后会发生什么?

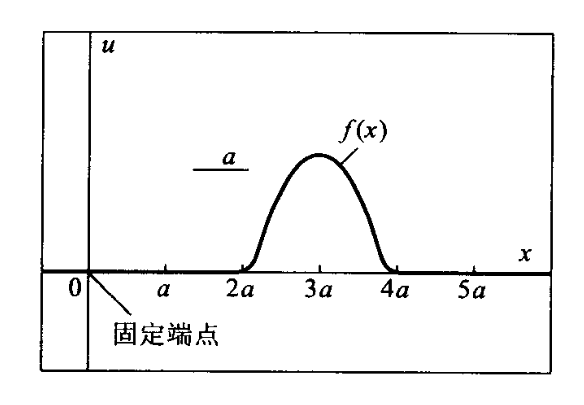


图 6

解 我们有 $u(x,0)=f(x)$ 和 $u_t(x,t)=af'(x+at)$, 由此, 得 $u_t(x,0)=af'(x)$. 于是, 寻求下面问题的解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad -\infty < t < \infty;\\
&\text{B.C.} \quad u(0,t)=0;\\
&\text{I.C.} \quad u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=af'(x).
\end{aligned}$$

由于这样的 B.C., 取 $f(x)$ 和 $g(x)=af'(x)$ 的奇延拓. $g(x)$ 的奇延拓不是 $a(f_o)'(x)$. 的确, $(f_o)'(x)$ 是偶的 (参看第 4.3 节的习题 3, 该题说明奇函数的导函数是偶的, 反之亦然). 而 $f'(x)$ 的奇延拓是 $(f_e)'(x)$, 因为 $(f_e)'(x)$ 是奇的

且当 $x \geqslant 0$ 时与 $f'(x)$ 相等. 因此, 相应的经延拓的无限弦问题是

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x,\ t < \infty \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = f_o(x), \quad u_t(x,0) = a(f_e)'(x).
\end{aligned}$$

由 D'Alembert 公式, 该延拓问题的解是

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}[f_o(x+at) + f_o(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} a(f_e)'(r)dr \\
&= \frac{1}{2}[f_o(x+at) + f_e(x+at)] + \frac{1}{2}[f_o(x-at) - f_e(x-at)] \\
&= \frac{1}{2}(f_o + f_e)(x+at) + \frac{1}{2}(f_o - f_e)(x-at). \qquad (20)
\end{aligned}$$

在图 7 中, 绘出了 $f_o(x)$, $f_e(x)$, $\frac{1}{2}(f_o+f_e)(x)$ 和 $\frac{1}{2}(f_o-f_e)(x)$ 的图像.

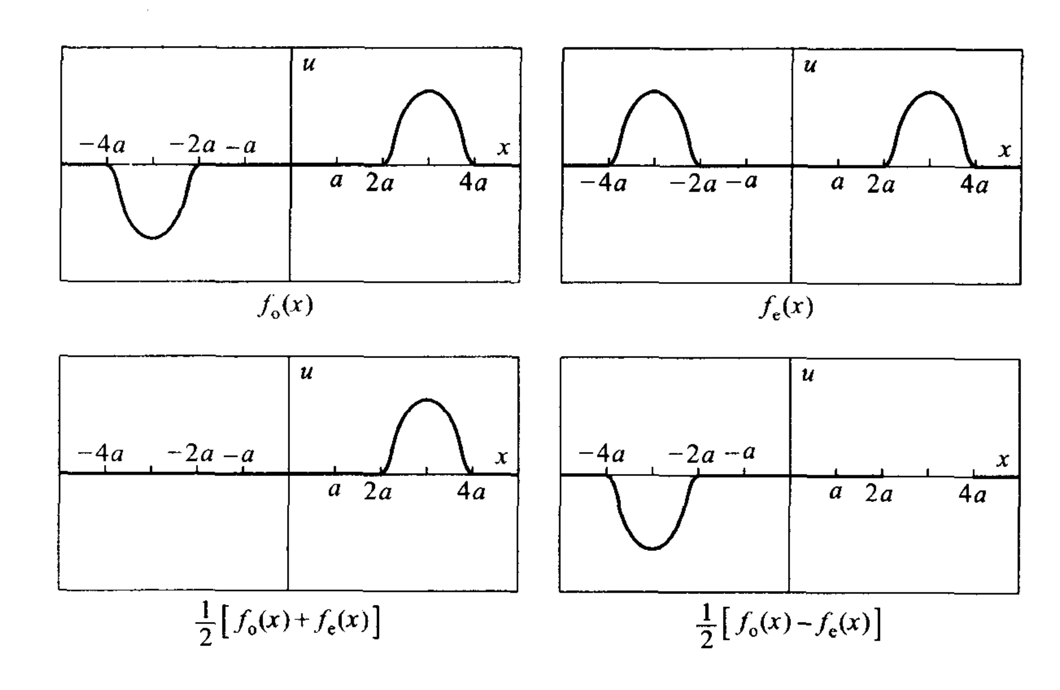


图 7

现在可见,(20) 是向左移动具初始曲线 $\frac{1}{2}[f_o(x)+f_e(x)]$ 的波和向右移动具初始曲线 $\frac{1}{2}[f_o(x)-f_e(x)]$ 的波的叠加. 这些波在 $t=2$ 时互相触碰且对于 $2<t<4$ 部分互相抵消. 当 $t>4$ 时, 移动到左边的波已完全进入 "想象" 的区域 $x<0$,

而原先虚构向右移动的波完全浸没在区域 $x>0$ 中. 因此, 在原先图中往端点 $x=0$ 移动的波出现回弹, 但在返回中该波是倒转的. □

用镜像法和 D'Alembert 公式解有限弦问题

镜像法也可用来求解有限弦问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)\quad u_t(x,0)=g(x),\end{aligned}\tag{21}$$

此问题前面在假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的且分段 C^1, 并假设在 $x=0$ 和 $x=L$ 处它们为零时, 利用 Fourier 正弦级数已经解答过 (在实验误差之内). 这里用不同的方法来解这个问题. 在半无限情形时, 延拓 $f(x)$ 和 $g(x)$, 然后用公式来表示相应的延拓后的关于无限弦问题. 函数 $f(x)$, $0\leqslant x\leqslant L$ 可通过两步来延拓:

(a) 令 $f_o(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 上的奇延拓.

(b) 令 $\tilde{f}_o(x)$, $-\infty<x<\infty$, 是 $f_o(x)$ 以 $2L$ 为周期的周期延拓.

这两步骤在图 8 中用图解说明.

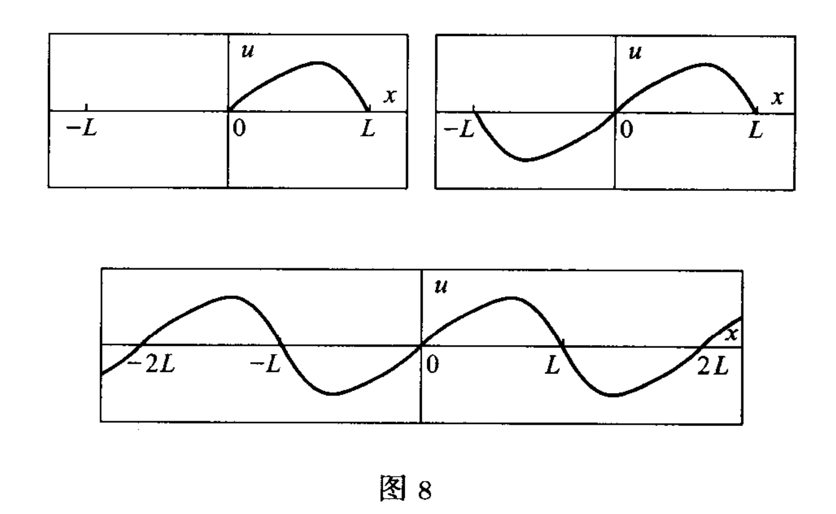


图 8

因此, 我们已想象地把有限弦 $f(x)$ 的初始曲线延拓成无限弦 $\tilde{f}_o(x)$ 的曲线. 对初始速度 $g(x)$ 可做相同的延拓, 得到 $\tilde{g}_o(x)$. 下面的定理表明有限弦的行为犹如

I.C. 是以 $\tilde{f}_o(x)$ 和 $\tilde{g}_o(x)$ 给出的无限弦的一部分的行为.

定理 3 令 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的函数, 设 $\tilde{f}_o(x)$ 和 $\tilde{g}_o(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的奇延拓的周期延拓. 假设 $\tilde{f}_o(x)$ 是 C^2 的, $\tilde{g}_o(x)$ 是 C^1 的. (如果 $f(0) = f(L) = 0$, $f''(0) = f''(L) = 0$ 和 $g(0) = g(L) = 0$, 以及对$0 \leqslant x \leqslant L$, $f(x)$ 是 C^2 的,$g(x)$ 是 C^1 的, 则这个假设就成立.) 则问题 (21) 的 (唯一) 解由下式给出

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}_o(x+at) + \tilde{f}_o(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}_o(r)dr, \tag{22}$$

此为初始条件是 $u(x,0) = \tilde{f}_o(x)$ 和 $u_t(x,0) = \tilde{g}_o(x)$, $-\infty < x < \infty$ 的无限弦的解.

证明 由定理 1, 用 $\tilde{f}_o(x)$ 和 $\tilde{g}_o(x)$ 替换 $f(x)$ 和 $g(x)$, 得知 (22) 满足具 I.C. $u(x,0) = \tilde{f}_o(x)$ 和 $u_t(x,0) = \tilde{g}_o(x)$ 的 D.E.. 现对于 $0 \leqslant x \leqslant L$, $\tilde{f}_o(x) = f(x)$ 和 $\tilde{g}_o(x) = g(x)$, 由此 (22) 满足 (21) 中的 I.C. 以及 D.E.. 由于第 5.1 节的定理 1 隐含唯一性, 所以只需验证 (22) 满足 B.C.. 确实, 因为 $\tilde{f}_o$ 和 $\tilde{g}_o$ 是奇的, 所以

$$u(0,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}_o(at) + \tilde{f}_o(-at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \tilde{g}_o(r)dr = 0.$$

为了验证 B.C.$u(L,t) = 0$ 满足, 注意到 $\tilde{f}_o$ 和 $\tilde{g}_o$ 在 $x = L$ 处在 $\tilde{f}_o(L-x) = -\tilde{f}_o(L+x)$ 的意义下是奇的. 这从图 8 容易看出, 但也可计算 $\tilde{f}_o(L-x) = -\tilde{f}_o(-L+x) = -\tilde{f}_o(2L-L+x) = -\tilde{f}_o(L+x)$. 于是,

$$u(L,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}_o(L+at) + \tilde{f}_o(L-at)] + \frac{1}{2a}\int_{L-at}^{L+at} \tilde{g}_o(r)dr,$$

正如所要求的. □

下面的定理表明 (22) 与利用 Fourier 正弦级数得到的解相同.

定理 4　如果 $\tilde{f}_o(x)$ 是 C^2 的, $\tilde{g}_o(x)$ 是 C^1 的, 则问题 (21) 的解由下面公式给出:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}]\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{23}$$

其中

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \text{ 和 } A_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{24}$$

证明　由性质 3, (22) 给出的 $u(x,t)$ 对每个固定的 t 是关于 x 的 C^2 周期函数, 因为 $\tilde{f}_o(x)$ 是 C^2 的,$\tilde{g}_o(x)$ 是 C^1 的. 此外, $u(0,t)=u(L,0)=0$. 因此, 第 4.3 节的定理 1 隐含对每个固定的 t, $u(x,t)$ 等于它的 Fourier 正弦级数, 即

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{25}$$

其中

$$b_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{26}$$

剩下来证明

$$b_n(t)=A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}. \tag{27}$$

由于 $u(x,t)$ 是 C^2 的, 所以在 (26) 中可在积分号下求导 (参看附录 3), 得

$$\begin{aligned}
b_n''(t) &= \frac{2}{L}\int_0^L u_{tt}(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2a^2}{L}\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\
&= \frac{2a^2}{L}\{u_x(x,t)s_n(x)-u(x,t)s_n'(x)|_0^L+\int_0^L u(x,t)s''(x)dx\}\\
&= -\frac{2a^2}{L}(\frac{n\pi}{L})^2\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=-(\frac{n\pi a}{L})^2 b_n(t),
\end{aligned}$$

其中用了 Green 公式 (参看第 4.1 节的 (9)). 因此, $b_n(t)$ 是常微 $b_n''(t)+(n\pi a/L)^2b_n(t)=0$ 的解, 因此 $b_n(t)$ 必有形式

$$b_n(t)=c_n\sin\frac{n\pi at}{L}+d_n\cos\frac{n\pi at}{L}. \tag{28}$$

利用 (24), (26) 和 (28), 得

$$d_n = b_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = B_n$$

和

$$\frac{n\pi a}{L}c_n = b_n'(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u_t(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{n\pi a}{L}A_n.$$

于是, $d_n = B_n$ 和 $c_n = A_n$, (27) 得证. □

注记 定理 4 是这样一种情形的第一个例子, 即, 证明了一个形式的无穷级数在某种假设下 ($\tilde{f}_o(x)$ 是 C^2 的, $\tilde{g}_o(x)$ 是 C^1 的) 是偏微的一个真实解. 注意, 通过验证 (23) 中的每项都满足 D.E. 还没有证明这个结论. 一般而言, 没有无穷项的叠加原理. 我们不是采用这种证法, 而是利用镜像法和 D'Alembert 公式获得 C^2 解的存在性, 然后 (因为知道了这样的解存在) 确定它的 Fourier 正弦级数应该是什么. 然而, 对热方程我们没有做这样的推理, 因为对热方程尚未建立类似于 D'Alembert 公式的任何结果. 最后在第七章我们来做这种推理, 从而在某种假设下对热方程来证明无穷级数解的有效性. □

我们也可用 D'Alembert 公式来证明下面具固定端点的有限弦的波问题最大绝对值原理.

定理 5 (最大绝对值原理) 如果 $\tilde{f}_o(x)$ 是 C^2 的, $\tilde{g}_o(x)$ 是 C^1 的, 则下面问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad -\infty < t < \infty; \\ &\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \end{aligned}$$

的解满足

$$|u(x,t)| \leqslant M_f + \frac{L}{2a}M_g, \text{其中 } M_f = \max_{0\leqslant x\leqslant L}|f(x)| \text{和 } M_g = \max_{0\leqslant x\leqslant L}|g(x)|.$$

证明 由定理 3 中的 (22) 得知

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}_o(x+at) + \tilde{f}_o(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}_o(r)dr. \tag{29}$$

显然, $|\tilde{f}_o(x)| \leqslant M_f$, 由此, $\frac{1}{2}|\tilde{f}_o(x+at)+\tilde{f}_o(x-at)| \leqslant M_f$. 还需证明

$$\left|\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}_o(r)dr\right| \leqslant LM_g. \tag{30}$$

由于 $\int_{-L}^{L}\tilde{g}_o(r)dr = 0$ 以及 $\tilde{g}_o$ 是周期的, 所以 $\tilde{g}_o$ 在任一长度为 $2L$ 的区间上的积分为 0 (第 4.2 节, 命题 1). 通过在区间 $[x-at, x+at]$ 从左端点出发删去长度为 $2kL$($k \geqslant 0$ 是整数) 的子区间, 可得 $\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}_o(r)dr$ 简化成 $\tilde{g}_o(r)$ 在长度不超过 $2L$ 的区间上的积分. 如果剩下的区间长度 $\leqslant L$, 则 $\tilde{g}_o(r)$ 在该区间上的积分的绝对值就不超过 LM_g. 如果剩下的区间的长度在 L 和 $2L$ 之间, 则该区间至少含有 $0, \pm L, \pm 2L, \pm 3L, \cdots$ 中一个点. 然而, 回忆一下 $\tilde{g}_o$ 关于这些点是奇的. 因此, 删去关于这些点的对称子区间上 $\tilde{g}_o$ 的积分, 将转化成长度 $\leqslant L$ 的区间上的积分. 于是证明了 (30). □

推论 (关于初始数据的连续依赖性) 令 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 分别是下面问题的解 $(0 \leqslant x \leqslant L,\ -\infty < t < \infty)$:

$$\begin{array}{llll}
\text{D.E.} & u_{tt} = a^2 u_{xx}; & \text{D.E.} & u_{tt} = a^2 u_{xx}; \\
\text{B.C.} & \begin{cases} u(0,t) = A(t), \\ u(L,t) = B(t); \end{cases} & \text{B.C.} & \begin{cases} u(0,t) = A(t), \\ u(L,t) = B(t); \end{cases} \\
\text{I.C.} & \begin{cases} u(x,0) = f_1(x), \\ u_t(x,0) = g_1(x); \end{cases} & \text{I.C.} & \begin{cases} u(x,0) = f_2(x), \\ u_t(x,0) = g_2(x). \end{cases}
\end{array}$$

如果对于 $\epsilon,\ \delta > 0$, $|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant \epsilon, |g_1(x) - g_2(x)| \leqslant \delta$, 则

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \epsilon + \frac{L\delta}{2a}. \tag{31}$$

证明 对 $u = u_1 - u_2$, $f = f_1 - f_2$ 和 $g = g_1 - g_2$ 的情形应用定理 5. 注意到 $M_f \leqslant \epsilon$ 和 $M_g \leqslant \delta$. □

注记 这个推论表明, 在初始位置和初始速度方面的小的变化, 将产生在解的方面的一个小的变化. 由于 u, f 和 ϵ 具有长度单位, 而 u_t, g 和 δ 具有速度单位, 所以需要有 "换算因子" $\frac{L}{2a}$, 使得 $\frac{L\delta}{2a}$①具有长度单位. 实际上, 可选择时间标度使得 $\frac{L}{\delta} = 1$. 用这样的时间单位, 扰动从一个端点传到另一个端点所需的时间是 $\frac{L}{a} = 2$. 用这种时间标度 (31) 成为 $|u_1 - u_2| \leqslant \epsilon + \delta$. □

①原文误为 $\frac{L}{2\delta a}$.——译者

例 8 在第 5.1 节的例 3 中, 假设被拨弄过弦的最大初始高度 u_0 仅知道是在 $\triangle u_0$ 的误差之内, 且在拨弄点处的初始速度为零只知道是在 $\triangle v_0$ 的误差之内 (比如, 由于手的不稳定引起的误差). 估计由于这些不确定性造成的在 "解" 方面的误差 $\triangle u$.(我们忽视此问题没有 C^2 解的事实, 因为 $f(x)$ 不是 C^1 的. 通过用截取 $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数来替换 $f(x)$ 能克服这个问题, 这种截取在比 $\triangle u_0$ 和 $\triangle v_0$ 小得多的误差之内是有效的).

解 初始形状方面的误差在 x_0 处最大, 其为 $\triangle u_0$, 因为误差随着点趋于端点线性地逐渐减少到 0. 类似地, 初始速度的最大误差是 $\triangle v_0$. 由不等式 (31), 得 $|\triangle u(x,t)| \leqslant \triangle u_0 + \frac{L}{2a}\triangle v_0$. □

注记 习题 10 是关于利用 D'Alembert 公式来分析被拨弄弦的运动的. □

概要 5.2

1. 波方程通解: 利用对波算子作因式分解 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)$, 我们可相继解两个一阶偏微得到波方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 在整个 xt–平面上的通解

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at).$$

2. D'Alembert 公式 (定理 1): 设对于 $-\infty < x < \infty$, $f(x)$ 是 C^2 的, $g(x)$ 是 C^1 的. 则问题 (关于无限弦)

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x,\ t < \infty \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \end{aligned} \tag{S1}$$

的唯一解由下式给出

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(r)dr. \tag{S2}$$

3. 无限弦的最大绝对值原理 (定理 2): 令 $M_f = \max_{-\infty<x<\infty}|f(x)|$, 其中 $f(x)$ 是 C^2 的, 设 I_g 是当 c 和 d 取遍所有实数时所有绝对值 $|\int_c^d g(x)dx|$ 的最大值. 则问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x,\ t < \infty \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

的解 $u(x,t)$ 满足

$$|u(x,t)| \leqslant M_f + \frac{1}{2a} I_g \quad (-\infty < x,\ t < \infty).$$

4. 无限弦问题 (S1) 解的性质:

性质 1 解的值 $u(x_0,t_0)$ 只依赖于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在**依赖区间**$[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 上的值 (即, 干扰以速度 a 传播).

性质 2 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇的 (或都是偶的), 则解 $u(x,t)$ 关于 x 是奇的 (或偶的). 特别, 在奇的情形 $u(0,t)=0$, 而在偶的情形 $u_x(0,t)=0$.

性质 3 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 则解 $u(x,t)$ 关于 x 是以 $2L$ 为周期的. 如果还有 $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0$, 则 $u(x,t)$ 关于 t 是以 $\frac{2L}{a}$ 为周期的周期函数.

5. 镜像法: 对于端点固定 (即, 具 B.C. $u(0,t)=0$) 的半无限弦问题 $(x \geqslant 0)$, 将初始数据 $f(x)$ 和 $g(x)$ (原先定义在 $x \geqslant 0$) 奇延拓形成相应的具初始数据 $f_o(x)$ 和 $g_o(x)$ 的无限弦问题. 由上面第 4 部分的性质 2, 该相应问题的解关于 x 是奇的, 因此满足 B.C.. 对于 B.C.$u_x(0,t)=0$(自由端点), 要用 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的偶延拓作为相应的无限弦问题的初始数据. 对在 $x=0$ 和 $x=L$ 有固定端点的有限弦问题, 可通过在相应的无限弦问题中利用周期延拓 $\tilde{f}_o(x)$ 和 $\tilde{g}_o(x)$ 来求解 (参看定理 3 和 4).

6. 具固定端点的最大绝对值原理 (定理 5): 如果 $\tilde{f}_0(x)$ 是 C^2, $\tilde{g}_0(x)$ 是 C^1 的, 则问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad -\infty < t < \infty \\
&\text{B.C.} \quad u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0 \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x)
\end{aligned}$$

的解 $u(x,t)$ 满足

$$|u(x,t)| \leqslant M_f + \frac{L}{2a} M_g, \text{ 其中 } M_f = \max_{0\leqslant x\leqslant L} |f(x)| \text{ 以及 } M_g = \max_{0\leqslant x\leqslant L} |g(x)|.$$

练习 5.2

1. 就下列情形求

$$\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x,\ t < \infty$$
$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

的解.

(a) $f(x) = x^2,\ g(x) = x$　　(b) $f(x) = e^{-x^2},\ g(x) = 2axe^{-x^2}$

(c) $f(x) = 0,\ g(x) = 1$　　(d) $f(x) = 1,\ g(x) = 0$

(e) $f(x) = \sin x,\ g(x) = a\cos x$　　(f) $f(x) = 0,\ g(x) = \sin^2 x$.

2. 假设 $u(x,t)$ 满足习题 1 中的 D.E. 和 B.C., 其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对于 $|x| \leqslant 10$ 时为零, 且 $a = 2$. 证明 $u(0,4) = 0$, 并用点 $(0,4)$ 的依赖区间的术语来解释它 (参看性质 1).

3. 令 $u(x,t)$ 是习题 1 中的 D.E. 和 B.C. 的解, 其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是偶的.

(a) 利用 D'Alembert 公式证明 $u(x,t)$ 关于 x 是偶的 (即 $u(-x,t) = u(x,t)$).

(b) 令 $v(x,t) = u(-x,t)$, 直接证明 (不用 D'Alembert 公式) $v(x,t)$ 满足 D.E. 和 B.C..

(c) 为什么能从 (b) 得出 $v(x,t) = u(x,t)$, 从而得到 (a) 中的结果?

提示　参看性质 2 的论证.

4. 求解

$$\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad -\infty < t < \infty$$
$$\text{B.C.} \quad u_x(0,t) = 0$$
$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 0.$$

提示　参看例 6 后面的注记. 注意到 $f_e(x) = |x|^3$.

5. 就端点 $x = 0$ 是自由垂直滑动 (即, 具 B.C. $u_x(0,t) = 0$) 的情形重做例 7. 特别, 证明波 "反射回来" 没有被倒转.

6. 假设在习题 1 中 $f(x)$ 是 C^2 的, $g(x)$ 是 C^1 的, 且都在某个有限区间, 比如 $[-b,b]$ 之外为零.

(a) 证明对任意固定的 x, 有

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} g(r)dr = \frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} g(r)dr.$$

(b) 证明不管某个固定的 t_0 值有多大, 存在某个值 x_0, 使得 $u(x_0,t_0) = 0$.

(c) 对固定的 t, 证明 $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$.

7. 考虑问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=3\sin\frac{\pi x}{L}-\sin\frac{4\pi x}{L},\quad u_t(x,0)=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}.
\end{aligned}$$

直接验证 D'Alembert 公式 (22) 和 Fourier 级数解 (23) 确实相等 (因为由唯一性来保证).(两个解都将成为第 5.1 节习题 1(a) 的解答).

8. (a) 作为

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad -\infty<x,\ t<\infty;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=0
\end{aligned}$$

的解 $u(x,t)$, 证明有最大值最小值原理 (其中 max 和 min 视为 sup 和 inf, 对那些会区别这些不同的读者所做的说明)

$$\min_{-\infty<x<\infty} f(x)\leqslant u(x,t)\leqslant \max_{-\infty<x<\infty} f(x),\quad -\infty<x,t<\infty.$$

(b) 对固定端点且具有相同的 I.C. 的有限弦问题证明类似的最大值最小值原理不成立, 但仍然有 $|u(x,t)|\leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant L} f(x)$.

提示 考虑 $\cos\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L}$.

9. (a) 根据 B.C. 和 I.C., 通过考虑在 $x=0,\ t=0$ 的 D.E., 证明下面问题无解:

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)=x(L-x),\quad u_t(x,0)=g(x)=0.
\end{aligned}$$

(b) 假设在上面 (a) 部分的问题中交换 $f(x)$ 和 $g(x)$. 证明这时有解 (参看定理 3).

10. 利用镜像法和 D'Alembert 公式, 证明在第 5.1 节的例 3 中的被拨弄过的弦的行为如在那个例子中的图 5 所示.

提示 考虑 $\tilde{f}_0(x)$, 先检验当弦是在 $x_0=\frac{1}{2}L$ 被拨弄的情形.

11. 证明如果 C^2 函数 $f(x)$ 和 C^1 函数 $g(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 且 $\int_{-L}^{L} g(x)dx=0$, 则由 D'Alembert 公式所给出的 $u(x,t)$ 关于 t 是以 $\frac{2L}{a}$ 为周期的周期函数.

§5.3 其他边界条件和非齐次波方程

前面我们提到边界条件 $u_x(0,t)=0$ 意味着端点 $x=0$ 是自由垂直滑动的. 现在通过证明下面事实来得到这个结果: 如果 $F(t)\mathbf{j}$ 是施加在 $x=0$ 上的垂直作用力且 T_0 是静止张力, 则

$$u_x(0,t)=-\frac{F(t)}{T_0}. \tag{1}$$

作用在区间 $[0,\triangle x]$ 上弦段部分的垂直分量为 $F_{\triangle x}(t)\equiv T_0u_x(\triangle x,t)+F(t)$, 它是在 $x=\triangle x$ 处的右张力 (参看在第 5.1 节的波方程的推导) 的垂直分量与施加在 $x=0$ 处的作用力的垂直分量的和. 由 Newton 第二定律, 在 $0\leqslant x\leqslant \triangle x$ 部分的平均垂直加速度则为 $F_{\triangle x}(t)/(D\triangle x)$(其中 D 是弦的线密度). 则在端点 $x=0$ 的垂直加速度由下面极限给出

$$\begin{aligned}\lim_{\triangle x\to 0}\frac{F_{\triangle x}(t)}{D\triangle x}&=\lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{T_0[u_x(\triangle x,t)-u_x(0,t)]}{D\triangle x}+\frac{T_0u_x(0,t)+F(t)}{D\triangle x}\right)\\&=\frac{T_0}{D}u_{xx}(0,t)+\lim_{\triangle x\to 0}\frac{T_0u_x(0,t)+F(t)}{D\triangle x}.\end{aligned}$$

要使该极限存在 (即, 在端点 $x=0$ 处加速度有意义) 只有当分子 $T_0u_x(0,t)+F(t)$ 为零时. 换言之, $u_{tt}(0,t)$ 将不存在, 除非 (1) 成立. 特别, 如端点是自由的, 即, 当 $F=0$ 时 $u_x(0,t)=0$. 用类似的方法, 可以证明如果在端点 $x=L$ 施加有垂直外力 $G(t)\mathbf{j}$, 则

$$u_x(L,t)=\frac{G(t)}{T_0}. \tag{2}$$

如同热方程, 产生下面关于齐次边界条件的标准可能情况:

(a) 两个端点是固定的 (即, $u(0,t)=u(L,t)=0$),
(b) 一个端点自由而另一个端点固定 (例如, $u_x(0,t)=0$ 和 $u(L,t)=0$),
(c) 两个端点自由 (即,$u_x(0,t)=0$ 和 $u_x(L,t)=0$).

作一些适当的修改, 几乎所有用于情形 (a) 的结果和技巧都可用于情形 (b) 和 (c). 例如, 读者可验证第 5.2 节的定理 1(唯一性) 的证明, 当 B.C. 中的 $u(0,t)$ 和 $u(L,t)$ 分别用 $u_x(0,t)$ 和 $u_x(L,t)$ 来替换时仍然适用 (参看第 5.1 节的习题 4). 在下面的这些例子中, 我们举例说明 Fourier 级数法和镜像法在具有一个或两个端点是自由的问题的求解中的应用. 然后考虑非齐次情形, 最后讨论了 Duhamel 原理的一种变形, 该变形用于求解由于弦在两个端点之间受于外部推动力而产生的非齐次波方程.

例 1 用分离变量和 Fourier 余弦级数求解下面以适当的初始数据 $f(x)$ 和 $g(x)$ 作为自由端点的有限弦问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=0,\quad u_x(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x).\end{aligned}\tag{3}$$

解 分离变量得到 D.E. 的三种情形的乘积解 (参看第 5.1 节的 (1),(2) 和 (3)). 对于情形 1 的乘积解

$$u_x(x,t)=[d_1\sin(\lambda at)+d_2\cos(\lambda at)][c_1\lambda\cos(\lambda x)-c_2\lambda\sin(\lambda x)].$$

为了避免由于 $d_1=d_2=0$ 而得的无用的平凡解, B.C. $u_x(0,t)=0$ 要求 $c_1=0$(注意到 $\lambda>0$). 由 B.C. $u_x(L,t)=0$ 得, $\sin(\lambda L)=0$ 或 $\lambda=\frac{n\pi}{L},n=1,2,\cdots$. 由此得 D.E. 和 B.C. 的一个无穷乘积解族, 即谐函数

$$u_n(x,t)=\left[A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right]\cos\frac{n\pi x}{L}.\tag{4}$$

读者可验证, 除了 $u(x,t)=0$, 没有情形 2 的乘积解满足 B.C., 然而, 存在情形 3 的一种乘积解满足 B.C.,

$$u_0(x,t)=A_0t+B_0.\tag{5}$$

该解反映一直线的弦以速度 A_0 垂直漂移. 当一个或两个端点固定时不会遇到这样的解. 由叠加原理, 得 D.E. 和 B.C. 更一般的解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(A_0t+B_0)+\sum_{n=1}^{N}\left[A_n\sin\frac{n\pi at}{L}+B_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right]\cos\frac{n\pi x}{L}.\tag{6}$$

我们有

$$u(x,0)=\frac{1}{2}B_0+\sum_{n=1}^{N}B_n\cos\frac{n\pi x}{L},\tag{7}$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{n\pi a}{L} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{8}$$

因此, 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是具形式 (7) 和 (8) 的有限余弦级数, 则 $u(x,t)$ 由 (6) 给出. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的和分段 C^1 的, 第 4.3 节的定理 2 确保 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 余弦级数一致收敛到 $f(x)$ 和 $g(x)$. 因此, 在任一正实验误差之内, 如此的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 通过在足够多的项截取它们的 Fourier 余弦级数, 可用形式 (7) 和 (8) 表示. □

注记 如令 N 趋于 ∞, 则表示式 (6) 也许不收敛到原问题的 C^2 解 (即, (6) 也许只是形式解), 而且即使它是 C^2 解, 不借助于无穷和逐项求导的定理来给出一个直接证明将是困难的. 然而, 我们就像在端点固定的情形所见到的那样 (参看第 5.2 节的定理 3), 用镜像法和 D'Alembert 公式来 (参看下例) 以不同方式表示解, 没出现无穷项的和以及与无穷项和有关的困难. □

例 2 用镜像法和 D'Alembert 公式求解例 1 中的问题.

解 镜像法对具自由端点的问题 (3) 与相应的端点固定的情形 (参看第 5.2 节的 (21)) 的处理只在一个方面有所区别. 的确, 我们所做的是用偶周期延拓 $\tilde{f}_e(x)$ 和 $\tilde{g}_e(x)$ 来替换奇周期延拓 $\tilde{f}_o(x)$ 和 $\tilde{g}_o(x)$. $[0,L]$ 上的函数 $f(x)$ 的延拓 $\tilde{f}_e(x)$ 由图 1 所示.

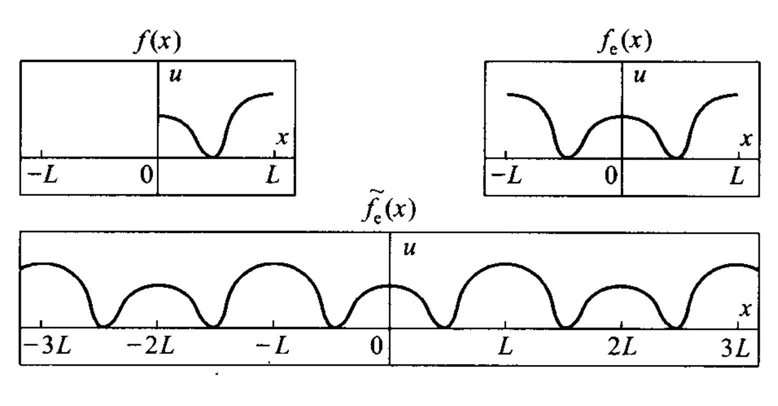


图 1

如果延拓 $\tilde{f}_e(x)$ 是 C^2 的以及 $\tilde{g}_e(x)$ 是 C^1 的, 则可证 (参看第 5.2 节定理 3 的证明) 问题 (3) 的 C^2 解由下式给出

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}_e(x+at) + \tilde{f}_e(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}_e(r)dr. \tag{9}$$

初始数据 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=L$ 处已作了偶延拓, 因此函数 $u(x,t)$ 关于 $x=0$ 和 $x=L$ 将是偶的. 于是, $u_x(0,t)=0$ 和 $u_x(L,t)=0$ (为什么?). 因此,

由 (9) 得到 (3) 关于 $0 \leqslant x \leqslant L$ 的解, 只要 $\tilde{f}_e(x)$ 是 C^2 的, $\tilde{g}_e(x)$ 是 C^1 的, 这只要 $f(x)$ 是 C^2 的, 且 $f'(0) = f'(L) = 0$ 以及 $g(x)$ 是 C^1 的, 且 $g'(0) = g'(L) = 0$ 即可 (为什么?). □

注记 当 $\tilde{f}_e(x)$ 是 C^2 的和 $\tilde{g}_e(x)$ 是 C^1 时, 由于已经确定由 (9) 给出的 C^2 解 $u(x,t)$ 的存在性, 所以由第 5.2 节定理 4 的类似定理 (用类似的证明), 得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(A_0 t + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sin\frac{n\pi at}{L} + B_n \cos\frac{n\pi at}{L}\right]\cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{10}$$

其中 $A_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)dx$,

$$A_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ (n \geqslant 1) \quad 和\ B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ (n \geqslant 0).$$

以此我们证实了例 1 中的 Fourier 级数法即使对 $N = \infty$ 也是有效的 (即(10) 确实收敛到一个 C^2 函数), 只要 $\tilde{f}_e(x)$ 是 C^2 的和 $\tilde{g}_e(x)$ 是 C^1 的. □

例 3 设 $u(x,t)$ 满足问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -\infty < t < \infty \\
&\text{B.C.} \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0 \\
&\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x) = \tfrac{1}{2}x^3(2-x)^3, \quad u_t(x,0) = g(x) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

因此, 端点 $x = 0$ 是固定的, 而端点 $x = 2$ 是自由的. 利用镜像法确定 $u(x,t)$ 在 $t = 0, 2, 4, 6, 8$ 时的形状.

解 $u(x,0) = \frac{1}{2}x^3(2-x)^3$ 的图像由图 2 所示.

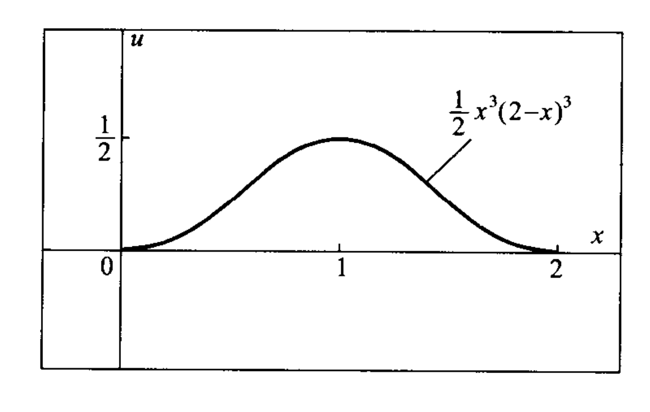


图 2

镜像法表明对该初始图像以如下方式延拓到所有 x, $-\infty < x < \infty$: 关于 $x = 0$ 是奇的 (为了确保 $u(0,t) = 0$) 而关于 $x = 2$ 是偶的 (为了确保 $u_x(2,t) = 0$). 具有这些性质的唯一延拓由下面的图 3 绘出.

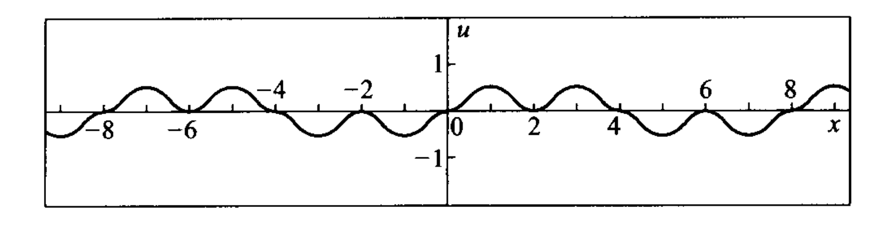


图 3

令 $F(x)$ 是该图像的函数. 注意到 $F(x)$ 是周期为 8 的周期函数, 关于 0 是奇的, 而关于 2 是偶的. 在所有各种区间中写出关于 $F(x)$ 的显式表达式是不方便的. 然而, 不写出这些表达式, 由它的图像和 $f(x)$ 直接求出 $F(x)$ 的值更容易 (例如, $F(-9)=-\frac{1}{2}, F(4.25)=-\frac{1}{2}(0.25)^3(1.75)^3$, 等等). 自然, 关于 $g(x)=0\ (0\leqslant x\leqslant 2)$ 的相应的延拓是 $G(x)=0\ (-\infty<x<\infty)$. 根据 D'Alembert 公式, 相应的无限弦问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=u_{xx},\quad -\infty<x,\ t<\infty\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=F(x),\quad u_t(x,0)=G(x)=0\end{aligned}$$

的解由下式给出

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[F(x+t)+F(x-t)]. \tag{12}$$

如果把 $u(x,t)$ 限制在区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 内就得到 (11) 的解.(注意到 F 是 C^2 的, 因此 (12) 中的 $u(x,t)$ 是 C^2 的. 如果在 $f(x)$ 的定义中用 x^2 代替 x^3, 将会出现问题, 因为这时 $F''(0^+)\neq F''(0^-)$ 且 F 将不是 C^2 的). 现 (12) 表明初始形状中的每个 "隆起部分" 分裂为两个具原来一般振幅的波以单位速度沿相反方向移动. 在 $t=2$ 时由区间 $[2,4]$ 向左移动隆起部分在 "真实" 区间 $[0,2]$ 将遇到由区间 $[-2,0]$ 向右移动 (倒转的) 隆起部分. 这些隆起部分在 $t=2$ 是正好互相抵消掉, 因此 $u(x,2)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 2$. 类似地, 在 $t=4$ 由 $[4,6]$(倒转的) 向左移动的隆起部分将遇到由 $[-4,-2]$(倒转的) 向右移动的隆起部分, 导致 $u(x,4)=-f(x),\ 0\leqslant x\leqslant 2$. 读者可验证 $u(x,6)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 2$. 且在 $t=8$ 时, 弦回复到原来的位置. 的确, 由 (12) 和 $F(x)$ 是周期为 8 的周期函数可知这个事实. □

注记 虽然非常冗长, 如同例 1 的做法, 利用 Fourier 级数法也能解这个问题. 用任意长度 L 替换 2 (且 D.E. 用 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 来替换), 求得 (11) 的 D.E. 和 B.C. 的乘积解为

$$u_n(x,t)=\left[A_n\sin[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi at}{L}]+B_n\cos[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi at}{L}]\right]\sin[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}], \tag{13}$$

$n=0,1,2,\cdots$.

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u_x(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x)\end{aligned}\tag{14}$$

的形式解由下面给出

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t),\tag{15}$$

其中 $u_n(x,t)$ 由 (13) 给出, 且对于 $n=0,1,2,\cdots$,

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right]dx,$$

$$A_n=\frac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi a}\int_0^L g(x)\sin[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}]dx.\tag{16}$$

对于在 (11) 中 $L=2$ 和 $a=1$ 给出的特殊的 $f(x)$ 和 $g(x)$, 能 (用一些努力) 算出 B_n. 当然 $A_n=0$. 即使没算出 B_n, 也能回答例 3 中提出的问题. 的确, $u(x,2)=0$, 因为当 $t=2$ 时 $\cos[(n+\frac{1}{2})\pi t/2]=0$. 同样, $u(x,4)=-f(x)$, 因为 $\cos[(n+\frac{1}{2})4\pi/2]=-1$. 类似地, $u(x,6)=0$, 以及 $u(x,8)=f(x)$. 注意到 $\cos[(n+\frac{1}{2})\pi t/2]$ 是周期为 8 的周期函数. 对任意时刻 t , 另一公式 (12) 大大地比 (15) 优越, 因为 (15) 不仅牵涉到一个无穷和, 而且为了确定对 t 的任意值的这些和项, 必须计算 B_n. □

第 3.3 节对标准的与时间无关的 B.C. 的方法,可毫无困难的用于波方程的情形. 我们在下面举例说明.

例 4　求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=-1,\quad u_x(\pi,t)=2;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=\sin\frac{x}{2}+2x-1,\quad u_t(x,0)=-2\sin\frac{3x}{2}.\end{aligned}\tag{17}$$

解　如在第 3.3 节那样, 选取 D.E. 和 B.C. 的一个特解. 最简单的选取是稳态 (与时间无关) 函数 $u_p(x,t)=2x-1$. 则 (17) 的解是 $u(x,t)=u_p(x,t)+v(x,t)$,

其中 $v(x,t)$ 是相应的齐次问题的解:

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad v_{tt}=a^2v_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad v(0,t)=0,\quad v_x(\pi,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad \begin{cases} v(x,0)=u(x,0)-u_p(x,0)=\sin\dfrac{x}{2},\\ v_t(x,0)=u_t(x,0)-(u_p)_t(x,0)=-2\sin\dfrac{3x}{2}.\end{cases}
\end{aligned}\tag{17'}$$

通过对乘积解 (13) 应用叠加原理 (参看 (11) 和 (17′) 中的 D.E. 和 B.C.), 得

$$v(x,t)=\cos\frac{at}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{4}{3a}\sin\frac{3at}{2}\sin\frac{3x}{2}.$$

因此, $u(x,t)=2x-1+v(x,t)$ 是 (17) 的解. 如果 (17′) 的 I.C. 不是一个有限 $\sin[(n+\frac{1}{2})x]$ 级数, 则得到的是一个形式解, 此解有可能被截取, 使之在实验误差之内仍然满足 I.C.. 我们也能像例 3 那样尝试用镜像法来求解关于 v 的相应的齐次问题. □

例 5 求解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty\\
&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=c,\quad u_x(L,t)=d\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x).
\end{aligned}\tag{18}$$

解 注意到 B.C. 表明在端点 $x=0$ 受到向下的力 c/T_0 而在端点 $x=L$ 受到向上的力 d/T_0 (参看方程 (1) 和 (2)). 因此, 预料如果 $c\neq d$ 的话弦将作垂直漂移. 的确, 除非 $c=d$, D.E. 和 B.C. 没有稳态的特解. 我们试图去求形如 $u_p(x,t)=kt+H(x)$ 的特解来替代稳态解. 这个特解将行不通, 因为 D.E. 隐含 $H''=0$, 于是 $H(x)=c_1x+c_2$, 但 B.C. 不满足, 除非 $c=c_1=d$. 下一个猜测是 $u_p(x,t)=kt^2+H(x)$. 则由 D.E., 得 $2k=a^2H''(x)$, 由此得 $H(x)=kx^2/a^2+c_1x+c_2$. 利用 B.C., 常数 k 和 c_1 可用 c 和 d 来表示, 简单地取 $c_2=0$. 因此,

$$u_p(x,t)=\frac{a^2(d-c)}{2L}t^2+\frac{d-c}{2L}x^2+cx.\tag{19}$$

则 (18) 的解, 如果存在的话, 为 $u(x,t)=u_p(x,t)+v(x,t)$, 其中 $v(x,t)$ 满足下面熟悉的相应的齐次问题 (参看例 1):

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad v_{tt}=a^2v_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad v_x(0,t)=0,\quad v_x(L,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad v(x,0)=f(x)-u_p(x,0),\quad v_t(x,0)=g(x)-(u_p)_t(x,0).
\end{aligned}$$

□

非齐次波方程和相关问题

如同热问题 (参看第 3.4 节), 在波问题中引入与时间有关的 B.C. 产生非齐次 D.E.. 例如, 考虑

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=c(t),\quad u(L,t)=d(t);\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x).
\end{aligned}$$

函数 $w(x,t)=\frac{x}{L}(d(t)-c(t))+c(t)$ 满足 B.C., 但不满足 D.E.. 因此, $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$ 将不满足这个波方程, 而是满足下面相应问题中的 D.E.

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad v_{tt}-a^2v_{xx}=-(w_{tt}-a^2w_{xx})=-\frac{x}{L}(d''(t)-c''(t))-c''(t);\\
&\text{B.C.}\quad v(0,t)=u(0,t)-w(0,t)=0,\quad v(L,t)=u(L,t)-w(L,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad \begin{cases} v(x,0)=u(x,0)-w(x,0)=f(x)-\dfrac{x}{L}(d(0)-c(0))-c(0),\\ v_t(x,0)=u_t(x,0)-w_t(x,0)=g(x)-\dfrac{x}{L}(d'(0)-c'(0))-c'(0).\end{cases}
\end{aligned}\tag{20}$$

因此, 我们需考虑非齐次波方程:

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=h(x,t),\tag{21}$$

其中 $h(x,t)$ 是给定的函数, 它与作用在弦上的外力密度的垂直分量成比例. 的确, 可把 (21) 重写成下面形式

$$D\triangle xu_{tt}=T_0\triangle xu_{xx}+D\triangle xh(x,t),\tag{22}$$

其中 D 是线密度, T_0 是弦在静止时的张力以及 $\triangle x$ 是中心在 x 的一小部分弦段的长度. 方程 (22) 是这部分弦上的 Newton 方程. (22) 右端的第一项近似等于由这部分弦的端点的张力所引起的力 (参看第 5.1 节中的推导, 那里 $\triangle x=2h$). 第二项必是施加在这部分弦上的外力. 因此, $Dh(x,t)$ 是施加在弦上的**线力密度**(即, 每单位长度上的力). 在重力的情况下, 有 $Dh(x,t)\triangle x=-D\triangle xg$ 或 $h(x,t)=-g=-32\text{ft/sec}^2$. 注意 $h(x,t)$ 可认为是在 (x,t) 处的**施于加速度**.

由于内在的热源导致的具非齐次 D.E. 的热问题在第 3.4 节利用 Duhamel 原理得到解决, 藉此原理, 解非齐次 D.E. 是通过解一组相应的问题来实现的,

在这组问题里热源出现在初始条件中而不是 D.E. 中. 相同的想法对具非齐次 D.E.(21) 的波问题仍适用. 为简单起见, 我们先考虑无限弦问题.

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_{tt} - a^2 u_{xx} = h(x,t), \quad -\infty < x,\ t < \infty; \\ \text{I.C.} & u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{array} \tag{23}$$

Duhamel 方法的动因如下. 假设在时刻 $t = s - \triangle s$ 施加在弦上的加速度是 $h(x,t)$, 且该加速度在 $t = s$ 时立刻消失. 弦将获得速度 $h(x,s)\triangle s$, 它的位置改变为 $h(x,s)(\triangle s)^2/2$. 假设 $\triangle s$ 是小量, 则位置的改变是 "可以忽略的". 施加的加速度的作用是 $v(x,t;s)\triangle s$, 其中 $v(x,t;s)$ 是下面问题的解:

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant s; \\ \text{I.C.} & v(x,s;s) = 0, \quad v_t(x,s;s) = h(x,s). \end{array} \tag{24}$$

该问题具有给在任意时刻 $t = s$ 的初始条件, 而不是给在 $t = 0$. 可写成 $v(x,t;s) = \tilde{v}(x,t-s;s)$, 其中 $\tilde{v}(x,t;s)$ 满足具给在 $t = 0$ 的 I.C. 的熟悉问题:

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & \tilde{v}_{tt} = a^2 \tilde{v}_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant 0; \\ \text{I.C.} & \tilde{v}(x,0;s) = 0, \quad \tilde{v}_t(x,0;s) = h(x,s). \end{array} \tag{25}$$

由 D'Alembert 公式, 得知 (25) 的解由下式给出

$$\tilde{v}(x,t;s) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(r,s)dr, \tag{26}$$

因此, (24) 的解是

$$v(x,t;s) = \tilde{v}(x,t-s;s) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} h(r,s)dr.$$

我们料想 (23) 的解将是从 $s = 0$ 到 $s = t$ 的积分, 即关于 s 叠加所有 $v(x,t;s)\triangle s$ 的作用. 换言之, 让我们假设 (23) 的解是由下面给出:

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;s)ds=\int_0^t \tilde{v}(x,t-s;s)ds=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} h(r,s)drds. \tag{27}$$

上述启发性的论证不是证明. 严格的叙述和证明如下:

定理 1 (波方程 Duhamel 原理) 设 $h(x,t)$ 是 C^1 函数, $-\infty < x,\ t < \infty$. 则 (27) 是下面问题的唯一解

$$\begin{aligned} &\text{D.E.}\quad u_{tt}-a^2u_{xx}=h(x,t), \quad -\infty<x,\ t<\infty;\\ &\text{I.C.}\quad u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0. \end{aligned} \tag{28}$$

证明 由 (26) 知 $\tilde{v}(x,t;s)$ 是 C^2 的, 因假设 $h(x,t)$ 是 C^1 的. 则可两次应用第 3.4 节的引理 1, 先是对 $g(t,s)=v(x,t;s)=\tilde{v}(x,t-s;s)$ 应用, 然后对 $g(t,s)=\tilde{v}_t(x,t;s)$ 应用, 得

$$u_t(x,t)=\tilde{v}(x,0;s)+\int_0^t \tilde{v}_t(x,t-s;s)ds=\int_0^t \tilde{v}_t(x,t-s;s)ds, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= \tilde{v}_t(x,0;t)+\int_0^t \tilde{v}_{tt}(x,t-s;s)ds = h(x,t)+\int_0^t a^2\tilde{v}_{xx}(x,t-s;s)ds\\ &= h(x,t)+a^2u_{xx}(x,t), \end{aligned}$$

其中在最后的式子中已用了 (25) 的 D.E. 和 Leibniz 法则 (参看附录 3). 这表明 (27) 中的 $u(x,t)$ 是 (28) 中 D.E. 的 C^2 解. 由 (27), $u(x,0)=0$, 而由 (29) 得 $u_t(x,0)=0$. 由如下事实唯一性是显然: 如果 u_1 和 u_2 是 (28) 的两个解, 则 $v=u_1-u_2$ 满足 $v_{tt}=a^2v_{xx}$ 且有 I.C. $v(x,0)=0$ 和 $v_t(x,0)=0$. 于是, 由唯一性结果 (第 5.2 节的定理 1), 得 $v\equiv 0$. □

注记 关于 r 和 s 的二重积分 (27) 含有一个合意的几何解释. 的确, 它是函数 h 在点 (x,t) 的**特征三角形** (或**影响区域**) 上的积分, 特征三角形如图 4 所示.
关于 r 的积分 "总计" 了 h 沿着三角形水平线段上的值, 关于 s 的积分 "总计" 了这些线段的结果. 式子 (27) 表明 $u(x,t)$ 是 h 在点 (x,t) 的特征三角形上的积分. □

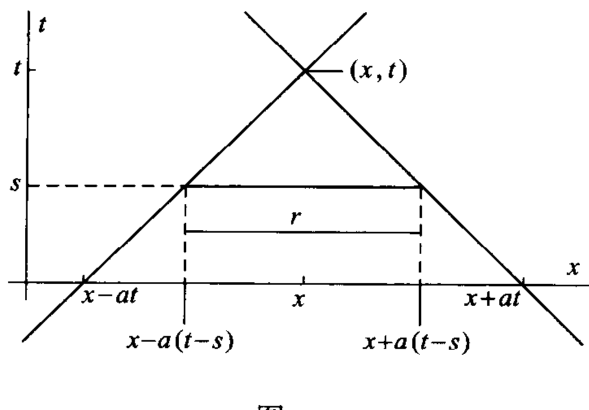


图 4

如同前面我们在第 3.4 节针对热方程所做的那样, 当 (28) 中的 I.C. 不再是平凡时, 可通过把问题分解成两个问题来处理. 下面举例说明这种做法.

例 6 求解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}-u_{xx}=x-t,\quad -\infty<x,\ t<\infty;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=x^2,\quad u_t(x,0)=\sin x.\end{aligned}\tag{30}$$

解 把问题分解成两个关于 u_1 和 u_2 的熟悉的问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad (u_1)_{tt}-(u_1)_{xx}=0; &&\text{D.E.}\quad (u_2)_{tt}-(u_2)_{xx}=x-t;\\&\text{I.C.}\quad \begin{cases}u_1(x,0)=x^2,\\(u_1)_t(x,0)=\sin x;\end{cases} &&\text{I.C.}\quad \begin{cases}u_2(x,0)=0,\\(u_2)_t(x,0)=0.\end{cases}\end{aligned}$$

则 (30) 的解 $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ (为什么?). 由 D'Alembert 公式, 得

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}[(x+t)^2+(x-t)^2]-[\cos(x+t)-\cos(x-t)].$$

利用定理 1 和 (27) 计算 $u_2(x,t)$ 如下:

$$\begin{aligned}u_2(x,t)&=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)}(r-s)drds=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\frac{r^2}{2}-sr\right]_{x-t+s}^{x+t-s}ds\\&=\frac{1}{2}\int_0^t\Big(\frac{(x+t-s)^2}{2}-\frac{(x+s-t)^2}{2}-s(x+t-s)+s(x+s-t)\Big)ds\\&=\frac{1}{2}\int_0^t\Big(2s^2-2s(x+t)+\frac{(x+t)^2}{2}-\frac{(x-t)^2}{2}\Big)ds\\&=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2(x+t)}{2}+t^2x=-\frac{t^3}{6}+\frac{t^2x}{2}.\end{aligned}$$

解 $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ 可直接验证. □

如下面诸例所表明的, Duhamel 原理也可用于有限弦情形. 在例 7 中, 存在施加的力密度, 但 B.C. 和 I.C. 是齐次的. 例 8 是具依赖于时间的 B.C.(但具齐次的 D.E.) 的这类问题的例子, 这类问题是这个子节的原始动因 (参看 (20)). 如同例 6, 通过把问题分解成两部分然后对这两部分的解相加, 可处理 D.E. 和 B.C. 都是非齐次的情形.

例 7 端点固定且最初是静止的长度为 π 的弦, 受到一个与 $\sin(\omega t)\sin x$ 成比例的调和垂直力密度的驱动, 其中 ω 是正常数. 通过解下面问题求位移 $u(x,t)$

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+A\sin(\omega t)\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0.\end{aligned}\tag{31}$$

解 Duhamel 原理对像这里的齐次线性边界条件适用. 换言之, 可期望 (31) 的解由 $u(x,t)=\int_0^t\tilde{v}(x,t-s;s)ds$ 给出, 其中 $\tilde{v}(x,t;s)$ 是下面问题的解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad \tilde{v}_{tt}=a^2\tilde{v}_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad \tilde{v}(0,t;s)=0,\quad \tilde{v}(\pi,t;s)=0;\\&\text{I.C.}\quad \tilde{v}(x,0;s)=0,\quad \tilde{v}_t(x,0;s)=A\sin(\omega s)\sin x.\end{aligned}\tag{32}$$

因 s 只是个常数, 所以易得

$$\tilde{v}(x,t;s)=\frac{A}{a}\sin(\omega s)\sin(at)\sin x.$$

则,

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\tilde{v}(x,t-s;s)ds=\int_0^t\frac{A}{a}\sin(\omega s)\sin(a(t-s))\sin x ds\\&=\frac{A}{a}\sin x\int_0^t\sin(\omega s)\sin(a(t-s))ds.\end{aligned}$$

记最后的积分为 $I(t)$. 根据 Green 公式:

$$\int_0^t(f''(s)g(s)-f(s)g''(s))ds=[f'(s)g(s)-f(s)g'(s)]\Big|_0^t,$$

得,

$$\begin{aligned}(a^2-\omega^2)I(t)&=\big[\omega\cos(\omega s)\sin(a(t-s))+a\sin(\omega s)\cos(a(t-s))\big]\Big|_0^t\\&=a\sin(\omega t)-\omega\sin(at).\end{aligned}$$

对 $\omega \neq a$, 则得

$$u(x,t)=\frac{A}{a(a^2-\omega^2)}[a\sin(\omega t)-\omega\sin(at)]\sin x. \tag{33}$$

为了求出对于 $\omega = a$ 的解, 在 (33) 中取当 $\omega \to a$ 的极限, 利用 L'Hospital 法则, 得

$$u(x,t)=\frac{A}{a}\sin x\lim_{\omega\to a}\frac{at\cos(\omega t)-\sin(at)}{-2\omega}=-\frac{A}{2a}[t\cos(at)-\frac{\sin(at)}{a}]\sin x. \tag{34}$$

关于这些方法的任何疑问都可通过直接验证 (33) 或 (34) 满足 (31) 而消除. 注意到 (33) 作为 t 的函数保持有界, 且它的振幅随着 $\omega \to a$ 增加. 换句话说, 当驱动项 $A\sin(\omega t)\sin x$ 接近被驱动弦本身的谐波 $A\sin(at)\sin x$ 时会有共振现象. 的确, 对 $\omega = a$ 我们所得的解 (34), 它的振幅当 $t \to \infty$ 时不是有界的. 附带提一下, 已经知道由于共振现象, 桥梁 (在某种意义下可视为弦) 在周期性的风力的影响下会倒塌. □

注记 对有限弦问题, 利用 Duhamel 原理作为又一种解法, 可实行以下步骤:

步骤 1. 试图用 Fourier 级数 (以与 B.C. 相称的类型) 来逼近 D.E. $u_{tt} = a^2u_{xx}+h(x,t)$ 中的强迫项 $h(x,t)$, 它的 Fourier 系数是 t 的函数, 比如, 当端点固定时, $h(x,t)=\sum_{n=1}^{N}h_n(t)\sin(n\pi x/L)$[在 (31) 中 $h(x,t)$ 具有这种形式].
步骤 2. 假设 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n(t)\sin(n\pi x/L)$(比如, 当端点固定时) 并把这个形式代入 D.E.$u_{tt}-a^2u_{xx}=h(x,t)$. 令两边的系数相等, 得常微 $u_n''(t)-(an\pi/L)^2u_n(t)$, $n=1,2,\cdots,N$.
步骤 3. 由初始条件 $u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{N}B_n\sin(n\pi x/L)$ 和 $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{N}A_n\sin(n\pi x/L)$(为有限和, 比如是在实验误差之内), 得知$u_n(0)=B_n$ 和 $u_n'(0)=A_n$. 求解满足这些初始条件步骤 2 中的常微.
步骤 4. 解是 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n(t)\sin(n\pi x/L)$, 其中 $u_n(t)$ 由步骤 3 中求出.

在例 7 中, 我们得 $u_1''(t)+a^2u_1(t)=A\sin(\omega t)$ 具初始条件 $u_1(0)=0$ 和 $u_1'(0)=0$ 的解是 (33)[或 (34), 如果 $\omega=a$ 的话] 中 $\sin x$ 的系数. 对于 $n>0$, $u_n(t)\equiv 0$. 如果出现 $h(x,t)$ 关于 x 的 Fourier 级数不是有限项的, 则在另外得到证明之前, 由这个过程得到的无穷级数必须看作是形式解 (参看第 4.3 节中

的定义). 利用 Duhamel 原理的一个优点 (与镜像法比较) 是可以避免无穷和, 如果想避免的话.

例 8 求下面问题的形式解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=A\sin(\omega t);\\
&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\frac{A\omega x}{L}.
\end{aligned}\tag{35}$$

解 函数 $\omega(x,t)=A(x/L)\sin(\omega t)$ 满足 (35) 的 B.C.. 因此, 由 $u(x,t)=\omega(x,t)+v(x,t)$, 得下面关于 $v(x,t)$ 的相应的具齐次 B.C. 问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E}\quad v_{tt}-a^2v_{xx}=A\frac{x}{L}\omega^2\sin(\omega t),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad v(0,t)=0,\quad v(L,t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad v(x,0)=0,\quad v_t(x,0)=\frac{A\omega x}{L}-\frac{A\omega x}{L}=0.
\end{aligned}\tag{36}$$

注意到 I.C. 的选取 $u_t(x,0)=A\omega x/L$ 与 B.C. $u(L,t)=A\sin(\omega t)$ 在 $x=L$ 处是相容的. 相互抵消产生 $v_t(x,0)=0$ 是碰巧的. 满足 B.C. 的 $\omega(x,t)$ 的选取有一些自由性 (即, $\omega(x,t)$ 不必关于 x 是线性的). 或许 $\omega(x,t)$ 的选取应该以关于 $v(x,t)$ 的相应问题变得简单为出发点. 利用 Duhamel 原理, 可形式上解答问题 (36), 但用前述注记后面的过程也能得到相同的结果. 根据 Duhamel 原理, $v(x,t)=\int_0^t\tilde{v}(x,t-s;s)ds$, 其中 $\tilde{v}(x,t;s)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad \tilde{v}_{tt}=a^2\tilde{v}_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad \tilde{v}(0,t;s)=0,\quad \tilde{v}(L,t;s)=0;\\
&\text{I.C.}\quad \tilde{v}(x,0;s)=0,\quad \tilde{v}_t(x,0;s)=A\frac{x}{L}\omega^2\sin(\omega s).
\end{aligned}\tag{37}$$

该问题没有精确解, 因为第二个 B.C. 与第二个 I.C. 在 $x=L$ 处矛盾. 通过取 $\tilde{v}$ 的初始速度奇的、周期的延拓 (周期为 $2L$) 并利用 D'Alembert 公式可得到一个形式解, 但该延拓不是连续的, 更不用说是 C^1 的了. 我们没有用这种方法, 而是由 x 在 $[0,L]$ 上的 Fourier 正弦级数构造 (37) 的一个形式解. 的确, 由

$$\text{FSS }x=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

得

$$\tilde{v}(x,t;s)=\frac{2AL\omega^2}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin(\omega s)\sin\frac{n\pi at}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

如果假设 $\omega \neq \frac{n\pi a}{L}$ 并利用公式

$$\int_0^t \sin(\omega s)\sin(\frac{n\pi a}{L}(t-s))ds = \frac{\frac{n\pi a}{L}\sin(\omega t) - \omega\sin\frac{n\pi at}{L}}{(\frac{n\pi a}{L})^2 - \omega^2},$$

得形式解

$$u(x,t) = \frac{A}{L}x\sin(\omega t) - \frac{2AL\omega^2}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{n\pi a}{L}\sin(\omega t) - \omega\sin\frac{n\pi at}{L}}{n^2[(\frac{n\pi a}{L})^2 - \omega^2]}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

对 $v(x,t)$ 读者可验证该无穷和与用前述注记后面的过程得到的是相同的形式解. 再者, 注意到, 对某个 n, 当 $\omega \to \frac{n\pi a}{L}$ 时又有 (参看例 7) 共振现象. 如果 $\omega = \frac{n\pi a}{L}$, 则和中的第 n 项应由当 $\omega \to \frac{n\pi a}{L}$ 时它的极限来代替. 此项当 $t \to \infty$ 时是无界的. 如果在 $n = N$ 处截取该无穷和, 则产生的函数 $u_N(x,t)$ 满足 (35) 的 B.C. 和 I.C., 但它不完全满足 D.E.:

$$(u_N)_{tt} - a^2(u_N)_{xx} = \frac{A\omega^2}{L}[x - \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}]\sin(\omega t).$$

只要 $0 \leqslant x < L$, 方括号中的量当 $N \to \infty$ 时趋于 0. 如果 $x = L$, 则不管 N 是多少, 右端等于 $A\omega^2\sin(\omega t)$. 隐含原问题没有严格的解. 这可能不是一个严重的困境. 的确, 对任一小的 δ, 如果把 x 限制在区间 $[0, L-\delta]$ 内, 则对足够大的 N, $u_N(x,t)$ 在任一给定的实验误差之内满足波方程. 如果取 δ 比一个原子的半径小得多, 则在应用中人们似乎不会认为这是一个要引起注意的缺陷. □

概要 5.3

1. 边界条件: 如果弦的端点 $x = 0$ 允许垂直 (即, 横向) 滑动并施有垂直的外力 $F(t)\mathbf{j}$, 则 $u_x(0,t) = -F(t)/T_0$. 因此, 如果该端点没有受到垂直的作用力 (即, 该端点是自由的), 则边界条件 $u_x(0,t) = 0$ 成立, 类似地, 对在 $x = L$ 的自由端点, 有 $u_x(L,t) = 0$.

2. 具固定端点或自由端点波问题的求解: 对于每个端点是固定或自由的波问题可用两种不同方法求解:

A. **Fourier 级数法:** 求出 D.E. 满足 B.C. 的乘积解, 把 I.C. $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,t) = g(x)$ 中的每个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 写成 (或近似) 与 B.C. 相

称的类型的 Fourier 级数 (例如, 如果两个端点都是自由的话, 是 Fourier 余弦级数). 然后为了满足 I.C. 组成一个乘积解的叠加 (参看例 1).

B. **镜像法**: 把定义在 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的初始位移 $u(x,0)=f(x)$ 延拓成对所有 x 有定义的函数, 延拓后的函数关于每个自由的端点是偶的, 关于每个固定的端点是奇的.(这样的延拓是唯一的.) 对初始速度 $u_t(x,0)=g(x)$ 做同样的处理. 则有限弦问题的解由具上述经延拓的对所有 x 有定义的初始数据的无限弦的 D'Alembert 公式给出 (参看例 2 和例 3).

用方法 A 或 B 得到的解, 即使分别关于 $u(x,t)$ 的表示形式看上去不同, 却给出相同的 $u(x,t)$ 的值. 如果 $f(x)$ 的延拓是 C^2 的, $g(x)$ 的延拓是 C^1 的, 则存在波问题的唯一 (C^2) 解.

3. 非齐次与时间无关的 B.C.: 对具有形式 $u(0,t)=a$ 或 $u_x(0,t)=a$ 和 $u(L,t)=b$ 或 $u_x(L,t)=b$ 的 B.C. 的波问题, 先求出满足 D.E. 和 B.C. 的 $u_p(x,t)$. 然后构成关于 $v(x,t)=u(x,t)-u_p(x,t)$ 的具齐次 B.C. 的相应的问题, 该问题可用上述 2 中的任一技巧解之.

4. 非齐次波方程: 在具依赖于时间的 B.C. (例如, $u(0,t)=A(t)$) 的问题中, 当考虑相应的具齐次 B.C. 的问题时典型地要遇到以下形式的非齐次波方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+h(x,t). \tag{S1}$$

函数 $h(x,t)$ 可解释为与一与时间有关的外加的作用力密度成比例. 对于具零初始振幅和初始速度的无限弦, 该非齐次波方程的解是

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}h(r,s)drds, \tag{S2}$$

这是 h 在点 (x,t) 的特征三角形上的积分. 如果初始数据不是平凡的, 则简单地把 D'Alembert 解加到 (S2). 解 (S2) 是应用波方程的 Duhamel 原理获得的. Duhamel 原理也可用来解答带有外部作用力项的有限弦波问题 (参看例 7 和例 8). 解也可通过先把源 $h(x,t)$ 写成具有依赖时间的系数 $h_n(t)$ 的 Fourier 级数 (以与 B.C. 相称的类型), 然后假设解具有同样的形式获得 (参看例 8 前的注记), 其中系数 $u_n(t)$ 由解具有由 I.C. 确定的初值 $u_n(0)$ 和 $u_n'(t)$ 的二阶常微 $u_n''(t)+(n\pi a/L)^2u_n(t)=h_n(t)$ 来确定.

练习 5.3

1. (a) 证明 $u_x(L,t)=\frac{G(t)}{T_0}$(参看 (2)), 其中 $G(t)\mathbf{j}$ 是施加在端点 $x=L$ 上的力.

(b) 解释怎么将会产生具形式 $u_x(0,t)=bu(0,t)$ $(b>0)$ 的边界条件.

2. 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=0,\quad u_x(\pi,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=\cos^2 x,\quad u_t(x,0)=\sin^2 x.\end{aligned}$$

(a) 利用 Fourier 级数法,

(b) 利用镜像法.

3. 给出简单的论证说明例 3 的函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 唯一的关于 2 是偶的关于 0 是奇的延拓.

4. 对 B.C. 用下面替换后重做例 3:

$$\text{(a)}\begin{cases}u(0,t)=0,\\u(2,t)=0;\end{cases}\qquad\qquad \text{(b)}\begin{cases}u_x(0,t)=0,\\u_x(2,t)=0.\end{cases}$$

在 $t=1,2,3,4$ 和 $0\leqslant x\leqslant 2$ 情形确定 $u(x,t)$ 的形状.

5. (a) 简述以下事实的推导:(13) 中的谐函数 $u_n(x,t)$ 组成下面问题乘积解的完全族

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0.\end{aligned}$$

(b) (13) 中的谐函数最小的频率是多少? 它与当两个端点都是固定时的最小的频率相比怎样?

6. 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=4u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=-1,\quad u_x(\pi,t)=1;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=\frac{x^2}{\pi}-x+2\cos(3x),\quad u_t(x,0)=\cos x.\end{aligned}$$

7. 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+e^{-t}\cos x,\quad -\infty<x,t<\infty;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0.\end{aligned}$$

8. 解

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+e^{-t}\cos x,\quad -\infty<x,t<\infty;$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x).$$

9. 解

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+\cos(\omega t)\sin(3x),\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \omega>0,\quad -\infty<t<\infty;$$
$$\text{B.C.}\quad u(0,t)=0\ (\text{固定端点}),\quad u_x(\frac{\pi}{2},t)=0\ (\text{自由端点});$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0.$$

(a) 利用 Duhamel 原理.
(b) 通过假设解具有形式 $\sum_{n=0}^{N}u_n(t)\sin((2n+1)x)$.
(c) 对常数 ω 的什么值获得共振?

10. 求以下问题的形式解

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad -\infty<t<\infty;$$
$$\text{B.C.}\quad u_x(0,t)=0,\quad u_x(L,t)=\sin(\omega t);$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\frac{\omega}{2L}x^2.$$

对 ω 的什么值产生共振?

11. 求以下问题的形式解

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad -\infty<t<\infty;$$
$$\text{B.C.}\quad u(0,t)=\sin(\omega t),\quad u_x(1,t)=0;$$
$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\omega\cos(\pi x).$$

对 ω 的什么值产生共振?

第六章　Laplace 方程

Laplace 方程在位势理论, 静电学, 稳态温度问题, 流体力学等方面的一系列重大应用起了很重要的作用. 在第 1.2 节, 部份这些应用已概括性地讨论过. 本章我们集中于二维 Laplace 方程, 即 $u_{xx} + u_{yy} = 0$. 在第 6.1 节, 概述了在这种二维背景方面的应用, 讨论 Laplace 方程在平移和坐标旋转下的不变性, 并引入 Laplace 方程两个基本的边值问题, 即 Dirichlet 问题和 Neumann 问题. 在第 6.2 节, 求解了矩形区域的边值问题. 在第 6.3 节为了得到调和函数的平均值定理以及求解两个同心圆之间的圆环区域的 Dirichlet 问题, 用极坐标来表示 Laplace 方程. 同样在第 6.3 节, 建立了在圆周上有给定的连续数据的圆盘上 Dirichlet 问题解的 Poisson 积分公式. 虽然在第 6.2 节和 6.3 节中的许多地方用到 Laplace 方程的最大最小值原理, 但它的证明放在第 6.4 节给出, 到那时对一个更具理论性质的结果会有丰富的思路. 在第 6.5 节, 利用 Laplace 方程与复变量理论之间的紧密联系来求解二维理想流体流问题, 稳态温度问题和静电学问题. 共形映照的应用保持在非常具体的层次, 而且我们不假设任意预先的复变量理论知识.

关于 Laplace, Dirichlet, Poisson 和 Neumann 的历史注记

这里我们包括了一些关于对早期位势理论 (即 Laplace 方程和 Poisson 方程的边值问题理论) 的发展做出贡献的关键人物的简要传记描述.

法国理论物理学家和数学家 **Pierre Simon de Laplace**(1749—1827) 在他的年代极富盛名, 被称为是法国的 Newton. 在 D'Alembert 的支持下, Laplace 成为巴黎军事学院教授. Laplace 早期兴趣是天体力学, 概率论以及他个人的晋升 (但在这个排列中不是不可或缺的). 的确, 在他的一生中, 为了最大限度获得自己的权利和财富, 他的政治观点似乎随着法国多变的社会倾向在摆动. 然而, 他的趋炎附势可能也是在法国大革命期间使他避免监禁或死刑. 在 Laplace 发表的五卷巨作《天体力学》(1799—1825) 中发展了位势理论. 虽然 Laplace 不总是知道其他数学物理学家的贡献 (在他的著作中一个显见的疏忽是 Lagrange 的名字), 但他极大地发展了位势理论的范围, 以至于关键方程 $\Delta u = 0$ 以他的名字命名. 然而, 我们注意到, L.Euler 在研究流体力学中, 早就 (在 1752 年) 发现这个方程. 在 Laplace 另一部杰作《*Théore Analytique de Probabilités*》(1812) 中包括了许多他在概率论中的发现. 虽然 Laplace 追逐名誉, 权利和财富, 但他也对许多年轻科学家给予大量的帮助. 在众多受到他提携的人当中, 有 Cauchy 和 Poisson.

杰出的德国数学家 **Gustav Peter Dirichlet**(1805—1859) 是 Georg Simon Ohm (1787—1854) 的学生, Georg Simon Ohm 是德国物理学家, 以发现 Ohm 定律 ($E = RI$) 而盛名. 虽然 Dirichlet 的主要兴趣是在数论方面, 但他对代数, Fourier 级数和理论力学做出了重要的贡献. 在 Dirichlet 的生涯的初期受到 Laplace 和 Poisson 工作的激励, 他是在巴黎遇到他们的. 在 1850 年,Dirichlet 发表了一篇重要的讨论以他自己名字命名的边值问题的文章. 在 1855 年, 当伟大的数学天才 Karl Friedrich Gauss (1777—1855) 去世时, Dirichlet 成为 Gauss 在 Göttingen 大学的继任者. 在 Dirichlet 故世后, 他关于应用数学的笔记以及著名的《*Vorlesungen über Zahlentheorie*》才由他的学生和朋友 Richard Dedekind 编辑和发表出来.

在当时另一位才华横溢的法国数学物理学家是 **Siméon-Denis Poisson** (1781—1840). Poisson 是 Laplace 的学生和被提携人, 且由于他的老师, 他在新建立的École Polytechnique 获得他的第一个职位. 在 Poisson 的一生中从事许多有影响的行政和教学任务. 尽管如此, 他的将近 300 篇原始发表的文献列表给人深刻印象. Poisson 的大多数书是在他最后的 10 年期间出版的, 根据历史学家观点, 这些书对当时数学物理现状的一个完全揭示提供了罕见的礼物. Poisson 与 Laplace 密切合作. 在 1833 年, Poisson 指出, 在密度为 ρ 的区域中, 重力位势 u 服从 Laplace 方程的非齐次形式, 即 $\Delta u = 4\pi G\rho$(参看第 1.2 节的 (1)), 该方程现称为 Poisson 方程. 作为他的研究领域广博的标志，在概率论中有 Poisson

分布, 理论力学中有 Poisson 括号, 弹性理论中有 Poisson 比率, 还有 Poisson 积分公式 (参看第 6.3 节), Fourier 变换理论的 Poisson 求和公式 (参看第 7.2 节习题 18), 等等.

Neumann 问题 (参看第 6.1 节的 (11)) 是以德国物理学家 **Carl Gottfried Neumann**(1832—1925) 命名的. Neumann 过着平静的生活, 是一位多产的研究员而且是莱比锡大学成功的教授, 从 1868 年一直做到 1911 年他退休. 他在位势理论领域尤其突出. Neumann 还由于在创建和编辑享有声望的德国数学期刊 *Mathematische Annalen* 所做的贡献受到人们的铭记.

§6.1 概述

关于函数 $u = u(x, y)$ 的二维 Laplace 方程是

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{或} \quad \triangle u = 0, \tag{1}$$

其中 $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是 **Laplace算子**; 将 Laplace算子作用于某函数上的运算简称为 Laplace运算. 在某个开区域 D 中所有的点 (x, y) 满足 (1) 的函数 u 称为在 D 上是**调和的**.(同样的术语对高维情形的解也适用.) 回忆起二阶方程的解要求有连续的二阶偏导数 (例如, D 上的调和函数在 D 上是 C^2 的.) 就如在第 6.3 节将证明的, 调和函数实际上是无穷可微的 (即, C^∞).

虽然我们生活在三维空间, 但许多应用中产生的方程 (1) 以及关于 (1) 相应的边值问题通常是比三维情形更易求解的. 如下面举例说明的, 常常出现要求的三维 Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ 的解 $u(x, y, z)$ 已经知道是与 z 无关的, 在这种情形, 只需对 (1) 解 $u(x, y)$.

例 1 假设一均匀的电量密度施加在 z–轴. 求由此产生的调和静电位势 $u(x, y, z)$ 的最一般的形式.

解 由于物理状况在 z 方向平移下是不变的, 所以推断出 $u(x, y, z)$ 与 z 无关, 记为 $u(x, y, z) = u(x, y)$. 因此, 我们寻求 (1) 适当的解. 还注意到物理状况在关于 z–轴旋转下是不变的, 在这种情形推断出 $u(x, y) = f(r)$, 其中 f 是 C^2 函数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是 (x, y, z) 到 z–轴的距离, 即 (x, y) 到 $(0, 0)$ 的距离. 经与第 1.2 节例 1 相同的计算, 得到用 $f(r)$ 来表示, (1) 成为

$$f''(r)(x^2 + y^2)\frac{1}{r^2} + f'(r)(\frac{2}{r} - (x^2 + y^2)\frac{1}{r^3}) = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) = 0. \tag{2}$$

令 $g(r) = f'(r)$, (2) 成为关于 g 的一阶线性 (或分离的) 方程. 得 $g(r) = Cr^{-1}$, 所以 $f(r) = C\ln r + K$, C 和 K 为任意常数. 于是,

$$u(x,y) = \frac{1}{2}C\ln(x^2+y^2) + K \tag{3}$$

是该位势的一般形式. 注意到对 $C > 0$, 不同于第 1.2 节的例 1 的位势 $-C(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + K$, 位势 (3) 当 $x^2+y^2 \to \infty$ 时是递增无界的. 这意味着有限的能量不足以把一粒带反向电荷的粒子运送到任意远离 z-轴. 在重力的环境下, 二维的逃逸速度是无限的. □

就如我们在第 1.2 节的例 2 中已注意到的, 当 u 是稳态温度时热方程 $u_t = k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$ 化为 Laplace 方程, 因为如果 u 与 t 无关, $u_t = 0$. 此外, 如果 u 不依赖于 z, 比方说在一块平板上, 上下两面都是绝热的, 则一稳态温度分布满足 (1). 读者也许仍然想知道为什么高维的热方程具有形式 $u_t = k\triangle u$, 涉及到的是 Laplace 算式 $\triangle u$, 而不是其他空间变量导数的组合, 比如 $u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}$. 下个例子说明对称性的考虑是怎样指定关于二维热流的热方程是由 $u_t = k(u_{xx}+u_{yy})$ 给出. 这种论证方法比通常基于非平凡的 Green 公式的高维形式来推导的方法更为初等.

例 2 证明: 如果在一块平坦的, 均匀的热传导平板 (没有热源) 的温度 $u(x,y,t)$ 服从一个二阶线性偏微, 则该偏微必有形式:

$$u_t = k(u_{xx}+u_{yy}), \tag{4}$$

$k > 0$ 为某个常数.

解 关于 $u = u(x,y,t)$ 的一般线性二阶偏微是

$$q_1u_{xx} + q_2u_{yy} + ru_{xy} + r_1u_{xt} + r_2u_{yt} + su_{tt} + a_1u_x + a_2u_y + bu_t + cu = f. \tag{5}$$

所有的系数和 f 必是常数, 因为平板是均匀的且物理环境 (例如, 热传导常数) 不依赖于时间. 因为当 u 不依赖于 y 时, (5) 必化为一维热方程 $(ku_{xx} - u_t = 0)$, 所以必有 $r_1 = 0$, $s = 0$, $a_1 = 0$, $c = 0$ 和 $f = 0$, 且我们可认为 $q_1 = k$ 和 $b = -1$(为什么?). 类似地, 当 u 不依赖于 x 时, (5) 必化为 $ku_{yy} - u_t = 0$, 这时 $r_2 = 0$, $a_2 = 0$ 和 $q_2 = k$. 至此, 我们已推得 (5) 必具有形式:

$$k(u_{xx}+u_{yy}) + ru_{xy} - u_t = 0. \tag{6}$$

因此, 只需证明在假设性热方程 (6) 中的 $r = 0$. 注意到函数 $u(x,y,t) = rt + xy$ 满足 (6). 如果把 xy-坐标轴以顺时针的方向旋转 90°, 则原坐标为 (x,y) 的点的

坐标将是 $(y, -x)$. 由于热传导法则不受所选的坐标角度位置的影响, 所以知道 u 仍然是 (6) 中的 x 经 y 替换 y 经 $-x$ 替换后的解. 然而, 在这种替换下, 函数 u 变成 $rt - xy$, 它不是 (6) 的解, 除非 $r = 0$. 因此, (4) 是能支配在给定的条件下热流的唯一的二阶线性偏微. □

注记 同样可证明, 关于一均匀横向振动薄膜的振幅 $u(x, y, t)$ 的唯一可能的二阶线性偏微, 是具干扰速度 a 的二维波方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{7}$$

类似地论证得到三维热方程和三维波方程. 在某种情形下, 更精确的热方程或波方程会是非线性的. 例如, 稳定膜的振幅 $u(x, y)$, 比如绷在非平面线圈上的肥皂膜, 已知是服从第 1.2 节的例 11 的极小曲面方程 (24), 而不是服从像 (7) 所暗示的 Laplace 方程. 然而, (7) 是唯一可能的对关于振幅 "真实" 偏微的线性逼近 (如果有的话), 且 (1) 是极小曲面方程 (参看第 1.2 节的例 11) 的最佳线性逼近. □

Laplace 算子 △ 的旋转不变性

我们现来证明在任意点 $p = (x_0, y_0)$, $u_{xx} + u_{yy}$ 是 u 在 p 处沿 xy-平面上所有过 p 的直线的二阶方向导数的平均的两倍. 由于这种平均在坐标旋转下是不变的, 所以这个证明隐含 Laplace 运算 $u_{xx} + u_{yy}$ 在坐标旋转下保持形式不变.(在习题 1 中要求这个性质的直接证明.) 过点 p 的直线, 与正 x-轴方向 $\mathbf{i}$ 形成角度 θ, 可由参数表示 $\mathbf{r}(t) = (x_0 + t\cos\theta,\ y_0 + t\sin\theta)$. 在 p 处 u 沿着该直线的一阶导数是

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{r}(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}u(x_0+t\cos\theta,\ y_0+t\sin\theta)|_{t=0} = u_x(x_0, y_0)\cos\theta+u_y(x_0, y_0)\sin\theta.$$

则在 p 处 u 沿该直线的二阶导数是

$$\frac{d^2}{dt^2}u(\mathbf{r}(t))|_{t=0} = u_{xx}(p)\cos^2\theta + 2u_{xy}(p)\cos\theta\sin\theta + u_{yy}(p)\sin^2\theta. \tag{8}$$

随着角度 θ 的变化, 这些二阶导数数值的平均为

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u_{xx}(p)\cos^2\theta+2u_{xy}(p)\cos\theta\sin\theta+u_{yy}(p)\sin^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}[u_{xx}(p)+u_{yy}(p)],} \tag{9}$$

因为 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\theta d\theta=\pi$ 以及 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=0$(即, $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是正交的并具平方模 π). 如果所有直线在 p 处旋转相同的量, 由于这些二阶导数的平均 (参看 (9)) 是相同的, 所以, 如在坐标旋转下 (x,y) 变成 $(\bar{x},\bar{y})$, 我们推得 $u_{xx}+u_{yy}=u_{\bar{x}\bar{x}}+u_{\bar{y}\bar{y}}$. 类似的论证可用来证明 $u_{xx}+u_{yy}$ 在关于平面上某点旋转变换下是不变的. 在这种情形, 二阶方向导数的平均取在一个圆周上, 圆周上方向代表单位方向.

Laplace 方程的边值问题

我们在这里要叙述 Laplace 方程两个标准边值问题. 它们称为 Dirichlet 问题和 Neumann 问题. 令 D 是 xy–平面中的一个区域并假设 D 由有限多条 “好的” 封闭曲线 (不属于 D 的部分) 所界定, 所有这些点组成的集合记为 C(参看图 1).

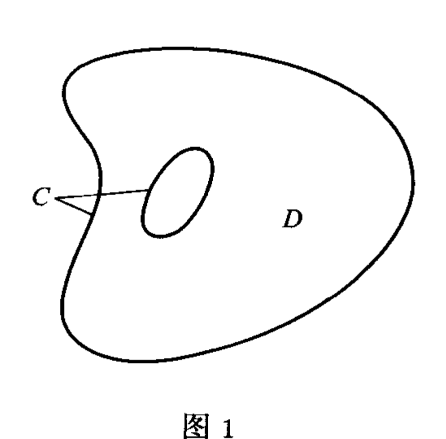


图 1

如果把开集 D 与 C 中所有的边界点合并起来, 则得到一个闭集, 记为 $D\cup C$, 是 D 与 C 的并. 设 f 是给定的定义在边界 C 上的连续函数. 从物理学的观点, 把 D 看作导热板, f 看作在该板的边界 C 上指定的温度分布. 因此, Dirichlet 问题寻求由在边界 C 上这个指定的温度 f 所产生的 (在板的内部) 稳态温度. 由数学的观点, Dirichlet 问题寻求 D 上 Laplace 方程的解 (即, D 上的调和函数), 使得在 C 上任意点 p, 通过要求 (x,y)(在 D 内) 是充分靠近 p, 则 $u(x,y)$ 可任意接近 $f(p)$. 换句话说, 如果在 C 上的每点 p, 定义 $u(p)=f(p)$, 从而把 u 的定义域从 D 延拓到 $D\cup C$, 且要求经延拓后的函数 u 在 $D\cup C$ 上是连续的并在 D

上满足 Laplace 方程. Dirichlet 问题简单地写成

Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad \text{于 } D\text{中};\\ &\text{B.E.} \quad u(p)=f(p), \quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } p, \end{aligned} \tag{10}$$

其中隐含要求函数 u 连续地延拓 (根据 f 在 C 上的值) 到 $D\cup C$. 不然的话, 任何人可通过取 u 在整个 D 为 0 在 C 上等于 f 来断言该问题获解.

注记 注意到 D.E. 只要求在 D 内成立, 而不是在 $D\cup C$ 上成立. 因此, 这里不必要求 u 具有越过边界的 C^2 延拓, 不同于前面的章节, 那里 D.E. 要求在包括边界的一个带形内成立. 换言之, 就 Dirichlet 问题而言, 只要求函数 u 本身 (不是它的二阶偏导数) 连续地延拓到边界. 这样, 为了求解 Dirichlet 问题, 不必假设 f 在 C 上是 C^2 的 (即, 只需假设 f 在 C 上是 C^0 的). 当然, 没有办法用实验方法来确定一个温度分布的可微性的程度. 的确, 这个问题是无意义的. 我们总能在实验误差之内用一个 C^∞ 函数来逼近一个物理温度分布 (即, 由任一数据点的有限集合, 可画出一条光滑的曲线). 然而, 数学考虑超过了具体的工程问题所相关的范围, 我们也将在较小的程度上超过具体问题所关心的范围. □

利用上面相同的记号, Neumann 问题寻求 D 上调和函数 u, 使得在 C 上每点 p, u 沿着外法向 $\mathbf{n}(p)$(与 C 垂直) 的方向导数等于值 $g(p)$, 其中 g 是某个给定的定义在 C 上的连续函数 (参看图 2).(有关在 C 的角点处的外法向的含义, 如果有的话, 存在技术上的困难, 在此不表.)

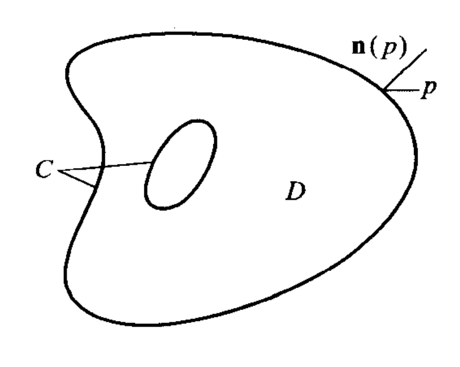


图 2

简明地写成

Neumann 问题:

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & u_{xx}+u_{yy}=0, \quad \text{于}D\text{中};\\ \text{B.E.} & \nabla u(p)\cdot \mathbf{n}(p)=g(p), \quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } p,\end{array} \tag{11}$$

其中默许假设 ∇u 连续地从 D 延拓到 $D\cup C$. 用物理学术语, 温度梯度的法向分量在一块导热板的边界上给定 (即, 热经由边界损失或获取的比率是指定的), 我们要求确定在板内产生的稳态温度 (如果这样的温度存在). 由物理学基础, 为使这样的稳态温度分布存在, 通过 C 的净热流量必须是零. 因此, 我们猜想 (恰当地)Neumann 问题将无解, 除非假设函数 g 在 C 上值的平均为零. 这个假设称为**相容性条件**. 在一杆 $(0\leqslant x\leqslant L)$ 中一维热流的这种相容性条件的类似条件是 $-u_x(0,t)+u_x(L,t)=0$ (参看第 3.3 节的例 6, 那里, 除非 $a=b$, 没有稳态特解).

Laplace 方程还有其他重要的边值问题. 例如, 组合 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件得到**第三类 B.C.**, 即, 对给定的定义在 C 上的连续函数 h 和常数 k(在应用中它通常是正的),$\nabla u(p)\cdot\mathbf{n}(p)+ku(p)=h(p)$. 再者, 在上述问题中, Laplace 方程可用它的非齐次形式来代替, 即 **Poisson方程**

$$u_{xx}+u_{yy}=q(x,y). \tag{12}$$

就稳态温度而言, 也许由于放射性或微波, 函数 $q(x,y)$ 跟与时间无关的内部热源密度成比例. Poisson 方程 (12) 的特解常能由以下积分公式获得

$$u_p(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int\int_D \ln[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]q(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y}, \tag{13}$$

当 q 是 D 上 "适当好的" 的函数时, 上式是 (12) 的解(参看第 6.4 节的习题 9). 利用特解 (13), 可以把 Poisson 方程的边值问题化为 Laplace 方程相应的问题, 就如以下举例说明的.

例 3 把 Poisson 方程的 Dirichlet 问题化为 Laplace 方程相关的 Dirichlet 问题.

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=q(x,y),\quad \text{于 } D\text{中};\\&\text{B.C.}\quad u(x,y)=g(x,y),\quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } (x,y).\end{aligned}\tag{14}$$

解 设 $u_p(x,y)$ 是 D.E. 的一个特解 (例如, (13)), 令 v 是以下相关的 Dirichlet 问题的解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad v_{xx}+v_{yy}=0,\quad \text{于 } D\text{中};\\&\text{B.C.}\quad v(x,y)=g(x,y)-u_p(x,y),\quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } (x,y).\end{aligned}\tag{15}$$

则 (14) 的解是 $u(x,y)=u_p(x,y)+v(x,y)$. 于是, 通过求解 (15) 我们得到 (14) 的一个解. □

Laplace 方程的通解

回忆一下波方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 的通解是通过以下方式得到 (在第 5.2 节): 把波算子分解成两个一阶算子

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

然后对 $u_t-au_x=0$ 和 $u_t+au_x=0$ 的通解相加, 得到波方程的通解 $u(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$. 如果以 y 替换 t 并令 $a=i=\sqrt{-1}$, 则波方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 变成 Laplace 方程. 因此, 波方程通解暗示 Laplace 方程的通解是 (在某种意义下)

$$u(x,y)=f(x+iy)+g(x-iy).\tag{16}$$

要精确定义 (16) 中允许怎样的复变量 $z=x+iy$(或 $\bar{z}=x-iy$) 函数 f(或 g) 是相当棘手的. 最简单适当的函数是幂函数 $f(z)=z^n$(或 $g(\bar{z})=\bar{z}^n$), 其中 $n\geqslant 0$ 是不同的整数. 例如, 注意到 $z^2=(x^2-y^2)+i2xy$, 它是 Laplace 方程的复解 (即, 实部和虚部都是调和的). Laplace 方程的一个复解称为**复调和函数**. 利用 z^n, $n=0,1,2,3,\cdots$, 可生成无穷多线性无关的复调和函数 (参看习题 5). 更一般地, 如果 $f(z)$ 是个幂级数 (即, 函数 z^n 的一个无穷叠加), 设为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n(a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots$ 是复常数), 它对 z 在围绕 $z=0$ 的某个开圆盘收敛, 则 $f(z)$ 是复调和函数. 这样的幂级数函数称为是**复解析的**(关于 $z=0$). 例如,

$$e^z=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\exp(x+iy)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

是调和的和复解析的. 在围绕 $z=0$ 的某个圆盘收敛, 且具 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n$ 形式的幂级数函数称为**共轭解析的**(关于 $\bar{z}=0$), 它们也是复调和函数. 经一些努力, 诸位能证明任意定义在 $z=0$ 附近的复调和函数能写成 (16) 的形式, 其中 $f(z)$ 是解析的, $g(\bar{z})$ 是共轭解析的. 因此, 有了这些适当的解释, (16) 是 Laplace 方程的通解. 在第 6.5 节将会看到更多的调和函数与复变量函数之间的密切联系, 那里解析函数用来求围绕某种障碍的理想流体流的流线, 或在二维静电学中围绕带电导体的等势曲线.

概要 6.1

1. Laplace 方程的应用: Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ 的解 $u=u(x,y,z)$ (或 $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u=u(x,y)$) 可认为是稳态温度分布, 静电位势, 重力位势, 某种流体流的速度势 (参看第 6.5 节), 等等.

2. Laplace 运算的旋转不变性: 关于 u 的二维 Laplace 运算, 即 $u_{xx}+u_{yy}$, 在任一点 $p=(x,y)$, 是 u 在 p 处沿着所有过 p 的直线方向的二阶方向导数平均的两倍. 几何解释是 Laplace 运算与坐标平移和坐标旋转无关. Laplace 算子 $\triangle$ 出现在许多应用中与 $\triangle$ 的旋转不变性有关.

3. Laplace 方程的边值问题: 设 D 是 xy–平面中的区域, 它由有限多条 "好的" 曲线 (不属于 D 的部分) 所界定, 它们的并是 C, 为 D 的边界. 在 D 上的 Laplace 方程有两种标准类型的边值问题, 一是

Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad \text{于 } D\text{中};\\&\text{B.C.}\quad u(p)=f(p),\quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } p.\end{aligned}$$

另一个是

Neumann 问题:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad \text{于 } D\text{中};\\&\text{B.C.}\quad \nabla u(p)\cdot \mathbf{n}(p)=g(p),\quad \text{对 } C\text{上所有的 } p.\end{aligned}$$

这里, f 和 g 是给定的在 C 上连续的函数. 函数 $u(x,y)$ 要求是在 D 上 D.E. 的 C^2 解. 在 Dirichlet 问题中, 函数 u 在 D 上以及在 C 上指定的值 $f(p)$, 要求在

$D \cup C$ 上是连续的. 在 Neumann 问题中, u_x 和 u_y 必须以使 B.C. 成立的方式下连续地延拓到 C.

练习 6.1

1. 在 xy–平面中由

$$\bar{x} = ax + by + e \quad 和 \quad \bar{y} = cx + dy + f$$

定义新坐标, 其中 a, b, c, d, e 和 f 是常数, 且为了确保逆变换存在, $ad - bc \neq 0$. 令 $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = u(x, y)$ (即, $\bar{u}$ 就是以新变量表示的 u).

(a) 证明如果 u 是 C^2 的, 则

$$u_{xx} + u_{yy} = (a^2 + b^2)\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + 2(ac + bd)\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + (c^2 + d^2)\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}}.$$

(b) 假设 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是由原坐标轴经以逆时针方向旋转某个角度 θ 得到的新坐标. 则验证 $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = -\sin\theta$ 和 $d = \cos\theta$. 由 (a) 推断这时 $u_{xx} + u_{yy} = \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}}$, 所以 Laplace 方程的形式在旋转下保持不变, 在坐标轴的平移下也是保持不变.

2. 设 u_1 和 u_2 是调和函数 (即 Laplace 方程的解).

(a) 证明对任意常数 c_1 和 c_2, $c_1u_1 + c_2u_2$ 是调和函数.

(b) 如果 $u(x, y)$ 是调和的, 推断只当 $u(x, y) = ay + b$ 时 $xu(x, y)$ 是调和的, 其中 a 和 b 是常数.

(c) 给出两个调和函数它们的乘积不是调和函数的例子.

3. 利用分离变量求所有具形式 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ 的调和函数. 记住考虑分离常数是正的, 负的和零的情形.

4. 证明 $(x + iy)^2$ 的实部和虚部是调和的.(在习题 5(d) 中要求读者对 $x + iy$ 的任意非负整数幂证明这个事实.)

5. 注意到 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. 这两个因式引导我们考虑两个复一阶方程 $f_x + if_y = 0$ 和 $f_x - if_y = 0$.

(a) 证明复值函数 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 满足 $f_x + if_y = 0$ 当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 满足一阶方程组 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$. 这两个方程称为 **Cauchy-Riemann 方程**.

(b) 如果 u 和 v 是 C^2 函数, 且满足 Cauchy-Riemann 方程, 则证明 u 和 v 必是调和的.

(c) 假设 $U(x, y) + iV(x, y) = (x + iy)(u + iv)$, 其中 u 和 v 是满足 Cauchy-Riemann 方程的 C^2 函数. 证明 U 和 V 也满足 Cauchy-Riemann 方程.

(d) 由 (b) 和 (c) 推断, 对所有非负的整数 n, $(x + iy)^n$ 的实部和虚部是调和的.

注记　如果 $f=u+iv$, 其中 u 和 v 是满足 Cauchy-Riemann 方程 (或等价地, $f_x+if_y=0$) 的 C^1 函数, 则 $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是复变量 $z=x+iy$ 的复解析函数. 函数 $\bar{f}=u-iv$ 满足 $\bar{f}_x-i\bar{f}_y=0$, 所以 $\bar{f}$ 是 z 的共轭解析函数.

6. 用稳态温度分布来叙述 Laplace 方程的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题之间物理意义的区别.

7. (a) 在 Poisson 方程 $u_{xx}+u_{yy}=q(x,y)$ 中, 以稳态温度情形 $q(x,y)$ 的物理意义是什么?

(b) 给出一个物理解释, 为什么 Poisson 方程的 Neumann 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=q(x,y),\quad \text{于 } D \text{中}\\&\text{B.C.}\quad \nabla u(p)\cdot\mathbf{n}(p)=g(p),\quad \text{对 } C \text{ 上所有的 } p\end{aligned}$$

无解, 除非假设以下的**相容性条件**满足:

$$\int\int_D q(x,y)dxdy=\int_C g(p(s))ds,$$

其中 s 表示沿着区域 D 的边界 C 的弧长参数.

§6.2 矩形上的 Dirichlet 问题

下面的唯一性定理的证明留在第 6.4 节给出 (第 6.4 节的定理 2; 对矩形情形可参看习题 10).

> **定理 1 (Dirichlet 问题的唯一性定理)**　有界开集 D 上的 Dirichlet 问题, 在 D 的边界上有连续的给定函数 F, 最多只有一个解.

因此, 由于知道求得的任一解是唯一的满足给定边值的解, 现来着手解 D 是矩形 $0<x<L$, $0<y<M$ 情形的 Dirichlet 问题. 假设 F 在三条边上为 0, F 在剩下的边 $y=0$(参看图 1) 上等于一个适当的连续函数 $f(x)$.

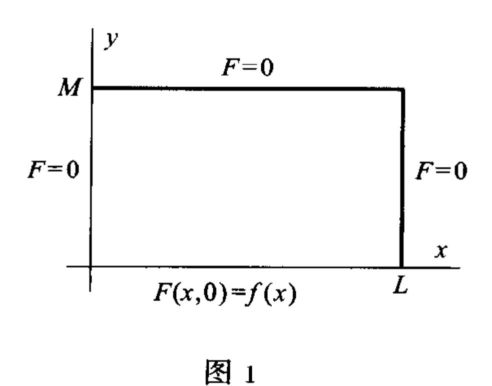


图 1

更精确地, 我们试图解以下 Dirichlet 问题:

$$
\begin{array}{ll}
\text{D.E.} & u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<L, \quad 0<y<M; \\
\text{B.C.} & \begin{cases} u(x,0)=f(x), & u(x,M)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant L, \\ u(0,y)=0, & u(L,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant M. \end{cases}
\end{array} \tag{1}
$$

为了 B.C. 相容, 我们需假设 $f(0)=f(L)=0$. D.E. 的乘积解 $u(x,y)=X(x)Y(y)$ 易由分离变量确定. 由 D.E., 得 $X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$, 因此对某个常数 c,

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{-Y''(y)}{Y(y)}=c=\pm b^2.$$

于是得下面结果:

情形 1 $(c=-b^2<0)$:

$$u(x,y)=\big(c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\big)\big(d_1e^{by}+d_2e^{-by}\big). \tag{2}$$

情形 2 $(c=b^2>0)$:

$$u(x,y)=\big(c_1e^{bx}+c_2e^{-bx}\big)\big(d_1\cos(by)+d_2\sin(by)\big). \tag{3}$$

情形 3 $(c=0)$:

$$u(x,y)=(c_1+c_2x)(d_1+d_2y). \tag{4}$$

可验证满足 (1) 的三个齐次 B.C. 的唯一乘积解是以下情形 1 的乘积解的常数

倍:

$$u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\mathrm{h}\frac{n\pi(M-y)}{L},\ n=1,2,\cdots. \tag{5}$$

关于情形 3 的乘积解看后面的例 1, 以及相关的例 7, 在那里情形 1 的乘积解也是用双曲函数来表示. 回忆一下双曲正弦和双曲余弦的定义为

$$\sinh z \equiv \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad 和 \quad \cosh z \equiv \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

因为 $\sinh 0 = 0$, 所以得知 (5) 符合 B.C. $u(x,M)=0$. 由叠加原理, (1) 的 D.E. 和齐次 B.C. 的更一般的解是

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi(M-y)}{L}. \tag{6}$$

令 $y=0$, 得

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sinh\frac{n\pi M}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{7}$$

因此, 当 (1) 中的 $f(x)$ 具有形式 (7) 时, 则问题 (1) 的唯一解是 (6). 由第 4.3 节的定理 1, 如果 $f(x)$ 是连续的和分段 C^1 的, 且 $f(0)=f(L)=0$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数的部分和 $S_N(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 因此, 在这种情形, 在实验误差之内, 可假设 $f(x)$ 具有形式 (7), 其中对 $n=1,2,\cdots,N$,

$$A_n = \frac{1}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}}\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{8}$$

如果 (1) 的 B.C. 换成

$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=0, & u(x,M)=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=0, & u(L,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant M, \end{cases} \tag{9}$$

则代替乘积解 (5), 有

$$u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}. \tag{10}$$

因此, (9) 的 D.E. 和齐次 B.C. 更一般的解是

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{N} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}, \tag{11}$$

且

$$u(x,M)=\sum_{n=1}^{N} B_n \sinh\frac{n\pi M}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{12}$$

假设 $g(x)$ 由它的 Fourier 正弦级数 N 项部分和表示是足够的, 则 (11) 是满足 B.C.(9) 的调和函数, 其中

$$B_n=\frac{1}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}}\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{13}$$

通过对解 (6) 和 (11) 相加, 得到具以下 B.C. 的 Dirichlet 问题的解

$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=f(x), & u(x,M)=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=0, & u(L,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant M,\end{cases}$$

其中假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是最多有 N 项的有限 Fourier 正弦级数. B. C. 具形式

$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=0, & u(x,M)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=h(y), & u(L,y)=k(y) \quad 0\leqslant y\leqslant M\end{cases}$$

的 Dirichlet 问题的解可通过简单地交换 x 和 y (以及限 L 和 M) 的角色, 在公式 (8) 和 (13) 中, 用 h 代替 f, 用 k 代替 g 得到. 由叠加原理, 得下面结果:

定理 2 假设 a_n, b_n, c_n 和 d_n 是 $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ 和 $k(y)$ 的 Fourier 正弦系数 (假设对 $n > N$ 它们为零), 每个是有限项 Fourier 正弦级数. 则下面 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M\\&\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=f(x), & u(x,M)=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L\\ u(0,y)=h(y), & u(L,y)=k(y), \quad 0\leqslant y\leqslant M\end{cases}\end{aligned}\tag{14}$$

的解为

$$\begin{aligned}u(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\Big(&A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi(M-y)}{L}\\&+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}\\&+C_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi(L-x)}{M}\\&+D_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi x}{M}\Big),\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$A_n=\frac{a_n}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}},\quad B_n=\frac{b_n}{\sinh\dfrac{n\pi M}{L}}$$

$$C_n=\frac{c_n}{\sinh\dfrac{n\pi L}{M}},\quad D_n=\frac{d_n}{\sinh\dfrac{n\pi L}{M}}.$$

注意到解 (15) 在矩形的角点处为零. 这是因为我们已隐含地假设函数 f, g, h 和 k 在它们定义区间的端点为零. 一般说来, Dirichlet 问题的连续边值在角点不为零. 然而, 通过从未知函数 u 减去一个在角点等于指定值的特解 U 我们能容易处理这种情形. 下面的例子说明如何求 U. 令 $v=u-U$, 则 (如上) 解关于 v 相应的 Dirichlet 问题, 其在角点处具零边值 (作为一个特殊例子, 参看习题 4).

例 1 求具有以下形式的唯一的调和函数

$$U(x,y)=a+bx+cy+dxy,\tag{16}$$

其中 a, b, c 和 d 是常数, 且对给定的 A, B, C 和 D, 有 $U(0,0)=A$, $U(L,0)=$

B, $U(0,M)=C$ 和 $U(L,M)=D$. 由此结果推断满足这两个 B.C. $u(0,y)=0$ 和 $u(L,y)=0$, $0\leqslant y\leqslant M$ [①]的任一情形 3(参看 (4)) 的乘积解必恒等于零.

解 注意到 $U(0,0)=A$ 隐含 $a=A$. 则 $U(L,0)=B$ 隐含 $a+bL=B$ 或 $b=(B-a)/L$. 类似地, $U(0,M)=C$ 隐含 $c=(C-A)/M$, 还有 $U(L,M)=D$ 隐含$d=(D-a-bL-cM)/(LM)=(D+A-B-C)/(LM)$. 于是求得关于常数 a, b, c 和 d 用已给的常数 A, B, C 和 D 来表示的唯一的值. 注意到, 除掉乘子, 任一情形 3 的乘积解具有形式 (16). B.C. $u(0,y)=0$ 和 $u(L,y)=0$($0\leqslant y\leqslant M$) 隐含在矩形的角点处 u 为零 (即 $A=B=C=D=0$). 于是, 由刚已证明的, 得 $u(x,y)\equiv 0$. □

例 2 解下面问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$

$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=0, & u(x,\pi)=5\sin(2x)-7\sin(8x), \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ u(0,y)=\sin y, & u(\pi,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant\pi.\end{cases}$$

解 **方法 1(检验法)** 注意到与 B.C. 相应的 D.E. 的三种乘积解是 $\sin(2x)\sinh(2y)$, $\sin(8x)\sinh(8y)$ 和 $\sin y\sinh(\pi-x)$. 通过组成一个叠加, 得

$$u(x,y)=E\sin(2x)\sinh(2y)+F\sin(8x)\sinh(8y)+G\sin y\sinh(\pi-x).$$

由非齐次 B.C. 得出 $E=\frac{5}{\sinh(2\pi)}$, $F=\frac{-7}{\sinh(8\pi)}$ 和 $G=\frac{1}{\sinh\pi}$. 而且满足齐次 B.C.. 用这种方法, 应能仔细验证所有 B.C. 满足. □

方法 2(由分离变量获得解) 尽管分离变量对 Laplace 方程可一般性地实施这种事实, 但一些教师将强调对每个具体的问题要重复这个过程, 然后确定满足三个齐次 B.C. 的每组条件的乘积解.(共有四种可能性, 这取决于在哪个 B.C. 上取非齐次. 在上述问题中只有两个 B.C. 是非齐次的, 因而这里只需考虑两种可能性.) 通过对由此得到的乘积解叠加, 得到如用方法 1 获得的解. 这是在获得一般问题 (14) 的解 (15) 中使用的基本方法. 虽然方法 2 麻烦, 但这是确保学生理解公式 (15) 是如何获得的唯一方式.

方法 3(利用导出的公式 (15)) 注意到 $b_2=5$, $b_8=-7$, $c_1=1$ 以及边值函数 Fourier 正弦级数所有其他的系数为零. 记住用修正因子相除, 得到 B_2, B_8 和 C_1(即, 方法 1 中的 E, F 和 G).

[①]原文误为 $0\leqslant y\leqslant L$.——译者

矩形上调和函数最大值最小值原理.

在第 6.4 节 (参看定理 1 和定理 4), 我们证明调和函数的最大值最小值原理. 在矩形的特殊情形, 这个原理如下:

> 函数 u 在闭矩形 $R: 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M$ 上连续, 在 R 的内部调和, 则必在边界上 (即, 在四条边的一条边上) 取到它的最大值和最小值. 而且, 如果最大值或最小值还在内部一点达到, 则 u 在 R 上必是常数.

实际上, 该原理对在任一连通的, 有界的 (即, 具有有限的范围) 区域上, 能连续地延拓到该区域的边界的调和函数成立 (关于精确定义和结果参看第 6.4 节). 由最大值最小值原理立刻得到这种区域 Dirichlet 问题解的唯一性, 因为两个解的差的最大值和最小值在边界上出现, 在其上这个差为零. 下个例子说明最大值最小值原理.

例 3 求使调和函数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + xy - x$ 在正方形区域 $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$ 达到最大值和最小值的点.

解 为了求 u 的最大值和最小值, 通常计算 u_x 和 u_y, 然后为了求出在正方形内部的驻点, 同时对 x 和 y 解方程 $u_x = 0$ 和 $u_y = 0$. 然后为了与极值比较还得研究边值. 然而, 由于 u 是调和的 ($u_{xx} = 6x$ 和 $u_{yy} = -6x$), 最大值最小值原理隐含只需考虑边值, 内部驻点不会是最大值点和最小值点, 除非 u 是常数. 在边界上,

$$\begin{aligned} &u(x,0) = x^3 - x, \quad && u(x,1) = x^3 - 3x, \quad && 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &u(0,y) = 0, && u(1,y) = -3y^2 + y, && 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{aligned} \tag{17}$$

容易求出 (17) 中的每个函数的最大值和最小值. 最大的最大值出现在 $x = 1$ 和 $y = \frac{1}{6}$, 有 $u(1, \frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$. 最小的最小值在 $(1,1)$, 有 $u(1,1) = -2$. 由最大值最小值原理, 对正方形区域内任一点 (x,y), 有 $-2 \leqslant u(x,y) \leqslant \frac{1}{12}$.

注记 (形式解) 回忆起在一个边值问题的边界数据不能用恰当形式的有限项 Fourier 级数表示的情形, 则求解过程产生一个无穷项级数表达式, 称之为原问题的一个**形式解**(关于形式解的讨论参看第 4.3 节). 形式解可能或实际上不可能收敛到问题的解. 然而, 通过在有限项截取形式解, 通常能在实验允许的误差之内得到满足 B.C. 的 D.E. 的真实解. 这正是在工程应用中所需要的. 在例 4 我们求一个 Dirichlet 问题的形式解, 在例 5 利用最大值最小值原理来分析截取误差. □

例 4 求下面问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;\\&\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=x^3(x-\pi), & u(x,\pi)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ u(0,y)=0, & u(\pi,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant\pi.\end{cases}\end{aligned}\tag{18}$$

解 我们已经知道 (参看方程 (5)) 满足齐次 B.C. 的 D.E. 的乘积解是 $u_n(x,y) = \sin(nx)\sinh[n(\pi-y)]$, $n=1,2,3,\cdots$ 的倍数. 由于 $x^3(x-\pi)$ 不是有限正弦级数, 所以寻求形如 $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)\sinh(n(\pi-y))$ 的形式解, 其中 A_n 由非齐次 B.C. $x^3(x-\pi)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)\sinh(n\pi)$ 确定. 换句话说, $A_n\sinh(n\pi)$ 等于 Fourier 正弦系数 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3(x-\pi)\sin(nx)dx$. 运用 Green 公式两次 (如同在第 4.1 节的例 6, 除了我们这里是用区间 $[0,\pi]$), 得

$$a_n = 12\pi\Big((-1)^n\frac{1}{n^3}+\frac{4}{\pi^2}\big((-1)^{n+1}+1\big)\frac{1}{n^5}\Big),\quad n\geqslant 1.\tag{19}$$

作为另一种方法, 涉及四次分部积分的冗长计算也能得到相同的结果. 因此, 需要的形式解是

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)\frac{\sinh(n(\pi-y))}{\sinh(n\pi)},\tag{20}$$

其中 a_n 由 (19) 给出. □

注记 应用有关逐项微分有效性的定理 (参看第 4.3 节的习题 15), 可证形式解 (20) 实际上是 (18) 的精确解. 在实用的情况中, B.C. 数据只能在某个实验误差, 比如 $\epsilon>0$ 之内指定. 因此, 在应用中, 只需确定在 ϵ 之内满足 B.C. 的解. 即使我们要证明形式解是精确的, 但为了算出解在正方形内各个点 (x,y) 的值 (在误差 ϵ 之内), 我们仍然需要计算出在哪里截取级数. 于是, 对具体应用来说, 逐项微分的有效性不仅是不必需的, 而且也是不充分的. 下面的例子说明误差分析. □

例 5 求 N 的值, 使得在形式解 $u(x,y)$ (20) 中 N 项截取的 $u_N(x,y)$ 在误差 ϵ 之内满足 (18) 的 B.C.. 利用最大值最小值原理分析在正方形区域内两个截取 $u_N(x,y)$ 和 $u_M(x,y)$ 之间的差.

解 注意到 $u_N(x,0)$ 是 $f(x)=x^3(x-\pi)$ 的 Fourier 正弦级数的 N 项部分和. 由于 $f(x)$ 是 C^1 的, 且 $f(0)=f(\pi)=0$, 所以由第 4.3 节的定理 1, 在区间 $[0,\pi]$ 上 FSS $f(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 更精确地, 对于 $0\leqslant x\leqslant\pi$, 有 (其中 a_n 由

(19) 给出)

$$|x^3(x-\pi) - u_N(x,0)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \sin(nx)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

$$\leqslant 12\pi \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(1+\frac{8}{\pi^2 n^2}) \leqslant 24\pi \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

其中我们利用了事实: 对 $n \geqslant 1$, $1+8/(\pi^2 n^2) < 2$. 因为 $\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-3} \leqslant \int_N^{\infty} x^{-3}dx = \frac{1}{2}N^{-2}$, 所以有 $|x^3(x-\pi)-u_N(x,0)| \leqslant 12\pi N^{-2}$. 因此, 为使 $u_N(x,y)$ 在误差 ϵ 之内满足 B.C., 只要选取 $N \geqslant \sqrt{12\pi/\epsilon}$. 大家还想知道如果两个解在边界上偏差最多不超过 ϵ, 则它们在正方形内部偏差最多不超过 ϵ. 因为两个调和函数的差是调和的, 所以这是最大值最小值原理的一个直接结论. 对形式解 (20) 的两个截取函数 $u_N(x,y)$ 和 $u_M(x,y)$, 有 (对于 $M > N$) 以下在边界 $y=0$ 和 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上它们的差的估计:

$$|u_M(x,0) - u_N(x,0)| = \left|\sum_{n=N+1}^{M} a_n \sin(nx)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} |a_n|$$

$$\leqslant 24\pi \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^3} \leqslant 24\pi \int_N^M \frac{1}{x^3}dx = 12\pi(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{M^2}).$$

在边界的其他三条边上, $u_M(x,y)$ 和 $u_N(x,y)$ 都为零. 因此, 由最大值最小值原理, 有

$$|u_M(x,y) - u_N(x,y)| \leqslant 12\pi(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{M^2}),\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant \pi. \tag{21}$$

不用最大值最小值原理, 不等式 (21) 可通过直接估计得到改进. 的确, 当 $y > 0$, 有

$$\begin{aligned} 2\sinh(n(\pi-y)) &= e^{n(\pi-y)} - e^{n(y-\pi)} \\ &= e^{-ny}(e^{n\pi} - e^{2ny}e^{-n\pi}) \leqslant e^{-ny}(e^{n\pi} - e^{-n\pi}) \\ &= 2e^{-ny}\sinh(n\pi), \end{aligned}$$

由此, 得 $\frac{\sinh(n(\pi-y))}{\sinh(n\pi)} \leqslant e^{-ny}$. 利用这个事实, 得

$$\begin{aligned}|u_M(x,y)-u_N(x,y)| &\leqslant \sum_{n=N+1}^{M}|a_n|\frac{\sinh(n(\pi-y))}{\sinh(n\pi)} \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{M}|a_n|e^{-ny} \leqslant e^{-(N+1)y}\sum_{n=N+1}^{M}|a_n| \\ &\leqslant 12\pi(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{M^2})e^{-(N+1)y}.\end{aligned} \tag{22}$$

因此, 对 $y>0$, 估计式 (22) 显著地改进了 (21), 因为 $e^{-(N+1)y}$ 随着 N 的增加迅速减少. 例如, 在中心 $p=(\pi/2,\pi/2)$, 取 $N=5$ 和 $M=10$, 由 (21), 有 $|u_{10}(p)-u_5(p)| \leqslant 12\pi(1/25-1/100) \approx 1.13$. 然而, (22) 以因子 $e^{-3\pi} \approx 8\times10^{-5}$ 改进这个界. 利用计算器直接计算, 得 $u_5(p)=-1.411748\cdots$ 和 $u_{10}(p)=-1.411747\cdots$(即, 差不超过 10^{-5}). □

例 6 (Neumann 问题的相容性条件) 矩形上 Neumann 问题是

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;\\ &\text{B.C.}\begin{cases}u_y(x,0)=f(x), & u_y(x,M)=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u_x(0,y)=h(y), & u_x(L,y)=k(y), \quad 0\leqslant y\leqslant M.\end{cases}\end{aligned} \tag{23}$$

证明问题 (23) 无解, 除非以下的**相容性条件**成立

$$\boxed{\int_0^L g(x)dx-\int_0^L f(x)dx+\int_0^M k(y)dy-\int_0^M h(y)dy=0,} \tag{24}$$

即, ∇u 的法向分量围绕边界的积分等于 0.

解 如果 u 是 (23) 的解, 则

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^M\int_0^L(u_{xx}+u_{yy})dxdy=\int_0^M\int_0^L u_{xx}dxdy+\int_0^L\int_0^M u_{yy}dydx\\ &=\int_0^M(u_x(L,y)-u_x(0,y))dy+\int_0^L(u_y(x,M)-u_y(x,0))dx\\ &=\int_0^M k(y)dy-\int_0^M h(y)dy+\int_0^L g(x)dx-\int_0^L f(x)dx,\end{aligned}$$

其中我们已用了微积分的基本定理以及可交换积分次序的事实 (参看附录 2). □

注记 (1) 作为另一种方法, 有些读者也许看出相容性条件是下面 Green 定理的特殊情形的一个直接推论

$$\int_C \nabla u\cdot \mathbf{n}ds=\int_C u_x dy-u_y dx=\int\int_R (u_{xx}+u_{yy})dxdy,$$

即, 经由边界的梯度流等于 $\triangle u$ 在内部的积分. 这个结论对由有限条正则、简单封闭曲线 C 所界定的有限范围的区域 R 成立. 因此, 为了对这样区域的 Neumann 问题求解, 相容性条件是必要的.

(2) 如果 (23) 的解存在, 它不是唯一的, 因为总可对一个解加上一个常数得到另一个解. 然而, 在习题 9 中我们引导读者完成证明:(23) 的任意两个解必相差一个常数. 另外, 虽然隐含地要求 u_x 和 u_y 在闭矩形上是连续的, 但没要求 u 的二阶偏导数连续地延拓到闭矩形. □

例 7 求下面问题的齐次 B.C. 和 D.E. 的乘积解 $X(x)Y(y)$

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad 0<x<L,\qquad 0<y<M;\\ &\text{B.C.}\begin{cases}u_y(x,0)=f(x), & u_y(x,M)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u_x(0,y)=0, & u_x(L,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant M.\end{cases}\end{aligned}\tag{25}$$

解 回忆起 D.E. 的任一乘积解必是形式 (2), (3) 或 (4) 之一. 先证明没有满足后两个 B.C. 的非零的情形 2 乘积解. 在情形 2, 有

$$u_x(0,y)=b(c_1-c_2)(d_1\cos(by)+d_2\sin(by)),$$

因此, 由 B.C. $u_x(0,y)=0$ 得 $c_1=c_2$ 或 $d_1=d_2=0$. 则

$$0=u_x(L,y)=bc_1(e^{bL}-e^{-bL})(d_1\cos(by)+d_2\sin(by))$$

隐含 $c_1=0$ 或 $d_1=d_2=0$. 于是, 在情形 2 最后两个 B.C. 要求该乘积解为零. 在情形 1, 由 $0=u_x(0,y)$, 得

$$0=bc_2(d_1e^{by}+d_2e^{-by}),$$

因此 $c_2=0$ 或 $d_1=d_2=0$. 此外, 为了避免平凡解,

$$0=u_x(L,y)=-bc_1\sin(bL)(d_1e^{by}+e^{-by})$$

隐含必须有 $\sin(bL)=0$ 或对 $n\geqslant 1$ 的整数, $b=\frac{n\pi}{L}$. 还有, $u_y(x,M)=0$ 隐含 $d_1e^{bM}-d_2e^{-bM}=0$. 因此,

$$\begin{aligned}d_1e^{by}+d_2e^{-by}&=e^{-bM}(d_1e^{bM}e^{by}+d_2e^{b(M-y)})\\&=e^{-bM}(d_2e^{-bM}e^{by}+d_2e^{b(M-y)})=2e^{-bM}d_2\cosh(b(M-y)).\end{aligned}$$

因此满足三个齐次 B.C. 的情形 1 的乘积解是以下的常数倍:

$$u_n(x,y)=\cos\frac{n\pi x}{L}\cosh\frac{n\pi(M-y)}{L},\quad n=1,2,\cdots.\tag{26}$$

满足 (25) 的齐次 B.C. 唯一的情形 3 的乘积解 $(c_1+c_2x)(d_1+d_2y)$ 是常数 (参看习题 6), 通过允许 $n=0$, 我们把这些常值解包括在 (26) 内. □

例 8 当 $f(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$ 是没有常数项 $\frac{1}{2}a_0$ 的有限余弦级数时求解问题 (25). 为什么要使解存在该常数项必须为零?

解 令 $u(x,y)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_nu_n(x,y)$, 其中 u_n 由 (26) 给出. 则由叠加原理, u 满足 (25) 中的 D.E. 和齐次 B.C.. 注意到

$$u_y(x,0)=\sum_{n=1}^{N}-A_n\frac{n\pi}{L}\sinh\frac{n\pi M}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}.\tag{27}$$

这等于 $f(x)$, 如果

$$A_n=\frac{-a_nL}{n\pi\sinh\frac{n\pi M}{L}},\quad n=1,2,\cdots.\tag{28}$$

注意到由于 (27) 没有常数项, 所以只有当 $f(x)$ 没有常数项时 (27) 才能与 $f(x)$ 相等. 再者, 为了解存在, 由 Neumann 问题的相容性条件 (参看例 6), 必有

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=0.$$

对每个常数 A_0, 得到解

$$u(x,y)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}\cosh\frac{n\pi(M-y)}{L},\tag{29}$$

其中 A_n 通过 (28) 由给定的 a_n 表示. 由习题 9, 当 $f(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$ 时, (25) 的所有解具有形式 (29). □

概要 6.2

1. 矩形上 Dirichlet 问题: 设 a_n, b_n, c_n 和 d_n 是 $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ 和 $k(y)$ 的 Fourier 正弦系数 (假设对 $n>N$ 它们为零), 每个是有限 Fourier 正弦级数.

则 Dirichelet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;\\&\text{B.C.}\begin{cases}u(x,0)=f(x)\quad u(x,M)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\\u(0,y)=h(y)\quad u(L,y)=k(y),\quad 0\leqslant y\leqslant M\end{cases}\end{aligned}\tag{S1}$$

的解是

$$\begin{aligned}u(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\Big(&A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi(M-y)}{L}+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}\\&+C_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi(L-x)}{M}+D_n\sin\frac{n\pi y}{M}\sinh\frac{n\pi x}{M}\Big),\end{aligned}\tag{S2}$$

其中

$$A_n=\frac{a_n}{\sinh\frac{n\pi M}{L}},\qquad B_n=\frac{b_n}{\sinh\frac{n\pi M}{L}},$$
$$C_n=\frac{c_n}{\sinh\frac{n\pi L}{M}},\qquad D_n=\frac{d_n}{\sinh\frac{n\pi L}{M}}.$$

注意到上述函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ 和 $k(y)$ 都在它们定义的区间的端点上为零 (即, 定义在矩形边界上的函数在角点为零). 如果在边界上给定的函数在角点不为零, 我们可从 $u(x,y)$ 减去一个在角点等于给定值的调和函数 (参看例 1), 得到一个相应问题, 它的边界函数在角点等于零.

2. 最大值最小值原理和边界函数的逼近: 对矩形而言, 最大值最小值原理表明: 在闭矩形 R 上连续且在 R 内部是调和的函数 $u(x,y)$, 它的最大值 (和最小值) 必在边界 (在四条边的一条边) 上达到. 作为推论, 如果能用有限 Fourier 正弦级数一致逼近 (比方在误差 ϵ 之内) 给定的边界函数, 则关于该逼近边界函数的 Dirichlet 问题的解在整个矩形内部与精确解 (如果存在) 相差将不超过 ϵ(参看例 5). 换言之, 在边界函数上的小的变化导致解 (如果存在) 方面小的变化.

3. Neumann 问题: 矩形上的 Neumann 问题是

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;\\&\text{B.C.}\begin{cases}u_y(x,0)=f(x),\quad u_y(x,M)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\\u_x(0,y)=h(y),\quad u_x(L,y)=k(y),\quad 0\leqslant y\leqslant M.\end{cases}\end{aligned}\tag{S3}$$

问题 (S3) 无解, 除非下面的相容性条件成立

$$\int_0^L g(x)dx - \int_0^L f(x)dx + \int_0^M k(y)dy - \int_0^M h(y)dy = 0. \tag{S4}$$

即, ∇u 的外单位法向分量 (围绕边界) 的积分等于 0. 例 7 和例 8 考虑了 Neumann 问题.

练习 6.2

1. 验证, 如果 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的情形 2 的乘积解 (参看 (3)), 即,

$$u(x,y)=(c_1e^{bx}+c_2e^{-bx})(d_1\cos(by)+d_2\sin(by))\ (b>0),$$

满足 B.C. $u(0,y)=0$ 和 $u(L,y)=0$, 则 $u(x,y)\equiv 0$.

2. 求解以下问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=f(x), & u(x,M)=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,y)=h(y), & u(L,y)=k(y), \quad 0\leqslant y\leqslant M,\end{cases}$$

(a) 当 $f(x)=9\sin\frac{8\pi x}{L}$, $g(x)=0$ 和 $h(y)=k(y)=0$ 时;
(b) 当 $f(x)=0$, $g(x)=\sin\frac{\pi x}{L}$ 和 $h(y)=k(y)=0$ 时;
(c) 当 $f(x)=9\sin\frac{8\pi x}{L}$, $g(x)=\sin\frac{\pi x}{L}$ 和 $h(y)=k(y)=0$ 时;
(d) 当 $f(x)=g(x)=0$ 和 $h(y)=9\sin\frac{8\pi y}{M}$ 和 $k(y)=\sin\frac{\pi y}{M}$ 时.

3. 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=\sin x, & u(x,\pi)=\sin x, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ u(0,y)=\sin y, & u(\pi,y)=\sin y, \quad 0\leqslant y\leqslant \pi.\end{cases}$$

4. (a) 求一个形如 $U(x,y)=a+bx+cy+dxy$ 的函数, 使得 $U(0,0)=0$, $U(1,0)=1$, $U(0,1)=-1$ 和 $U(1,1)=2$.
(b) 利用 (a) 中的答案解问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<1,\quad 0<y<1;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=3\sin(\pi x)+x, & u(x,1)=3x-1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0,y)=\sin(2\pi y)-y, & u(1,y)=y+1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

提示 解关于 $v(x,y)=u(x,y)-U(x,y)$ 的相应问题.

5. (a) 证明问题[①]

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u(x,0)=0, & u(x,\pi)=x(\pi-x), & 0\leqslant x\leqslant\pi \\ u(0,y)=0, & u(\pi,y)=0, & 0\leqslant y\leqslant\pi. \end{cases}$$

的形式解是

$$u(x,y)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)x)\frac{\sinh((2k+1)y)}{\sinh((2k+1)\pi)}.$$

(b) 估计形式解在误差 0.01 之内逼近 B.C. 所需的项数.

(c) 证明 (a) 部分的形式解其实就是 Dirichlet 问题的精确解. (b) 部分形式解的截取会在整个正方形内部与精确解相差不超过 0.01 吗? 解释为什么.

6. (a) 验证如果情形 3(参看 (4)) 的乘积解 $u(x,y)=(c_1+c_2x)(d_1+d_2y)$ 满足 B.C. $u_x(0,y)=0$ 和 $u_y(x,M)=0$, 则 $u(x,y)=c_1d_1$.

(b) 证明形如 $U(x,y)=a+bx+cy+dxy$ 的 (调和) 函数是情形 3 的乘积解当且仅当 $ad-bc=0$.

7. (a) 求以下 Neumann 问题的一个解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u_y(x,0)=\cos x-2\cos^2 x+1, & u_y(x,\pi)=0, & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_x(0,y)=0, & u_x(\pi,y)=0, & 0\leqslant y\leqslant\pi. \end{cases}$$

(b) 通过加一个常数求满足 $u(0,0)=0$ 的解.

8. (a) 任给 $g(x)$ 是连续的且 $\int_0^L g(x)dx=0$, 求以下 Neumann 问题的一个形式解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<L,\quad 0<y<M;$$
$$\text{B.C.}\begin{cases} u_y(x,0)=0, & u_y(x,M)=g(x), & 0\leqslant x\leqslant L, \\ u_x(0,y)=0, & u_x(L,y)=0, & 0\leqslant y\leqslant M. \end{cases}$$

(b) 为什么在 (a) 中假设 $\int_0^L g(x)dx=0$ 是必须的?

9. 在这个问题中我们证明: 任给 Neumann 问题 (23) 的两个解 $u_1(x,y)$ 和 $u_2(x,y)$, 差 $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ 是常数.

(a) 解释为什么差 $u(x,y)$ 满足具齐次 B.C.($f=g=h=k=0$) 的 (23).

---

①在第一个 B.C. 中 x 的取值范围原文误为 $0\leqslant x\leqslant 1$, 在第二个 B.C. 中 y 的取值范围原文误为 $0\leqslant y\leqslant 1$.——译者

(b) 证明 $(uu_x)_x + (uu_y)_y = (u_x)^2 + (u_y)^2$.

(c) 在矩形 $(0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M)$ 上积分 (b) 中的等式, 得

$$\int_0^M \int_0^L (u_x)^2 + (u_y)^2 dxdy$$

$$= \int_0^M [u(x,y)u_x(x,y)]|_{x=0}^{x=L} dy + \int_0^L [u(x,y)u_y(x,y)]|_{y=0}^{y=M} dx. \qquad (*)$$

(d) 利用 (a) 和 (*) 得出 (*) 的左边为 0. 由此得到 $u_x = u_y = 0$, 于是 u 必恒等于常数.

10. 利用习题 9 中相同的过程, 证明矩形上的 Dirichlet 问题至多只有一个解, 其中假设 u, u_x 和 u_y 可连续地延拓到边界.

§6.3 圆环和圆盘上的 Dirichlet 问题

当区域 D 是圆环或圆盘时, 利用极坐标来解这种区域上的 Dirichlet 问题是很自然的. 平面上一点的极坐标 (r,θ) 与这点的笛卡儿坐标 (x,y) 由以下公式联系

$$x = r\cos\theta \quad 和 \quad y = r\sin\theta. \qquad (1)$$

对任意固定的点 (x,y), r 等于 $\sqrt{x^2+y^2}$, 且有无穷多个 θ 的值使得 (1) 成立. 对 $(x,y) \neq (0,0)$, 所有这些 θ 的值相差 2π, 但只有唯一的 θ 落在区间 $(-\pi,\pi]$ 内. (或者也可用区间 $[0,2\pi)$.) 因此, (1) 定义了**挖去一点的平面**(即, 整个平面去掉原点) 和所有满足 $r > 0$ 和 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ 的配对 (r,θ) 的集合之间的一一对应. 这个对应在原点不成立, 这时 $r = 0$ 而 θ 不确定. 注意到当一个移动的点 (x,y) 穿过负 x-轴时, θ 会出现一个 2π 的跳跃. 因此, θ 在负 x-轴上不是连续函数. 如果把 θ 限制在区间 $[0,2\pi)$, 则不连续性将在正 x-轴上发生, 但无法定义 θ 使得它在整个挖去一点的平面上处处是连续的. 总有一条从原点出发的不连续曲线. 如果这种不连续曲线从挖去一点的平面中去除的话, 则变换 (1) 在由此产生的区域上将是光滑可逆的. 例如, 如果不连续曲线是负 x-轴且 θ 的范围取在 $(-\pi,\pi)$, 则对任意不在该不连续曲线上的点 (x,y), 可有下面定义 (1) 的 (光滑)

逆变换

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geqslant 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

然而, 极坐标在任一包含原点的区域中不能确切定义. 因此, 用极坐标表示的 Laplace 方程的解必须用笛卡儿坐标重新检验, 看它们是否在原点是有效的.

设 $u(x,y)$ 是定义在使得由 (1) 选取的极坐标 (r,θ) 有光滑的逆变换的区域上而且是 C^2 的. 用这些极坐标, 令 $U(r,\theta) \equiv u(x,y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. 在本章, 我们避免广泛滥用的极坐标符号 "$u(r,\theta) = u(x,y)$". $u_{xx}+u_{yy} = U_{rr}+U_{\theta\theta}$ 是不真的. 而是有以下结果:

命题 1 用上述记号, 有

$$u_{xx}+u_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} \quad (r>0). \tag{2}$$

证明 由链规则, 得

$$U_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta$$

和

$$U_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta.$$

因此,

$$U_{rr} = u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta$$

和

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta} &= -(u_{xx}x_\theta + u_{xy}y_\theta)r\sin\theta - u_x r\cos\theta + (u_{yx}x_\theta + u_{yy}y_\theta)r\cos\theta - u_y r\sin\theta \\ &= r^2(u_{xx}\sin^2\theta - 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\cos^2\theta) - r(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta). \end{aligned}$$

于是, $U_{rr} + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = u_{xx}+u_{yy} - \frac{1}{r}U_r$. □

圆环上的 Dirichlet 问题

对两个固定的正数 r_i 和 $r_o(r_o > r_i)$, 令圆环 A 是内圆周 $r = r_i$ 和外圆周 $r = r_o$ 之间的开区域 (参看图 1). 不同于在极点 (0,0) 的圆盘, 圆环不包括极点, 因此不必担心在 $r = 0$ 处极坐标缺少唯一性.

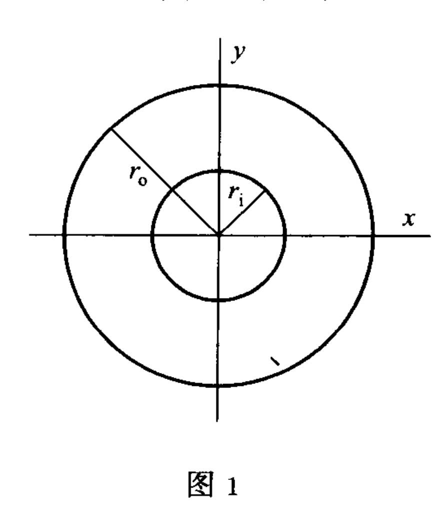


图 1

任给分别在外圆周和内圆周上连续的函数 f 和 g, Dirichlet 问题寻求在 A 上的调和函数 $u(x, y)$, 它连续地延拓到 A 的边界, 使得在 $r = r_o$ 上 $u = f$, 在 $r = r_i$ 上 $u = g$. 当以极坐标表示 Dirichlet 问题时, 其中 $-\pi < \theta \leqslant \pi$, 必须确保获得的解 $u(x, y)$ 或 $U(r, \theta)$ 当 (x, y) 穿过负 x–轴时不发生跳跃. 例如, 由命题 1, 函数 $U(r, \theta) = \theta$ 在任意不包括负 x–轴的点的开区域上是调和的, 但该函数在圆环 A 上不是调和的, 因为它在负 x–轴 $x = -r_i$ 和 $x = -r_o$ 之间的线段上不连续. 确保函数 $U(r, \theta)$ 成为 A 上的调和函数的一种方法是要求 $U(r, \theta)$ 对 $r_i < r < r_o$ 和所有实数 θ 有定义, 且是 C^2 的, 使得 (2) 的右端等于 0, 且 $U(r, \theta)$ 关于 θ 是以 2π 为周期的 (即, $U(r, \theta + 2\pi) = U(r, \theta)$). 例如, 函数 $U(r, \theta) = r^2 \cos\theta \sin\theta$ 满足这些要求, 由此得到调和函数 $u(x, y) = xy$. 把上述这些记住, 圆环上 Dirichlet 问题极坐标形式用下面来表达

$$
\begin{array}{ll}
\text{D.E.} & U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0, \quad r_i < r < r_o; \\
\text{B.C.} & \begin{cases} U(r_o, \theta) = f(\theta), & f(\theta + 2\pi) = f(\theta), \\ U(r_i, \theta) = g(\theta), & g(\theta + 2\pi) = g(\theta); \end{cases} \\
\text{P.C.} & U(r, \theta + 2\pi) = U(r, \theta), \quad r_i < r < r_o.
\end{array} \tag{3}
$$

其中, θ 是无限制的 (即,$-\infty < \theta < \infty$), P.C. 表示**周期性条件**. 注意到连续函数

f 和 g 必须是周期的 (以 2π 为周期), 不然 P.C. 不会满足.

通常利用分离变量, 先寻求 D.E. 具形式 $U(r,\theta)=R(r)T(\theta)$ 的乘积解. 把这个形式代入 (3) 中的 D.E., 得

$$R''(r)T(\theta)+\frac{1}{\theta}R'(r)T(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta)=0$$

或

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{-T''(\theta)}{T(\theta)}=c=\pm b^2 \quad (b\geqslant 0).$$

关于 $T(\theta)$ 的常微是 $T''(\theta)\pm b^2T(\theta)=0$. 只有当 $b=n$ 和 $c=+b^2=n^2$, $n=0,1,2,\cdots$ 时得到以 2π 为周期的周期解. 这时, 有

$$\boxed{T_n(\theta)=a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta), \quad n=0,1,2,\cdots,}$$

其中 a_n 和 b_n 是任意常数. 通过假设 $R(r)$ 具有 r^m 形式来解 $r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0$, 这是 **Eular方程**的一个例子. 把 r^m 代入该常微, 得 $r^2m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-n^2r^m=0$ 或 $(m^2-n^2)r^m=0$. 因此, 如果 $m=\pm n$, r^m 是解. 对 $n\geqslant 1$, 通解为

$$\boxed{R_n(r)=c_nr^n+d_nr^{-n}, \quad n=1,2,3,\cdots,}$$

以及当 $n=0$,

$$R_0(r)=c_0+d_0\ln r,$$

(参看第 6.1 节的例 1). 上述关于 $T_n(\theta)$ 和 $R_n(r)$ 的表示式相乘, 得以下 (3) 的 D.E. 和 P.C. 的乘积解族

$$\begin{aligned} &U_0(r,\theta)=a_0+\alpha_0\ln r\\ &U_n(r,\theta)=(a_nr^n+\alpha_nr^{-n})\cos(n\theta)+(b_nr^n+\beta_nr^{-n})\sin(n\theta), \quad n\geqslant 1. \end{aligned} \tag{4}$$

由叠加原理, (3) 的 D.E. 和 P.C. 更一般的解是

$$U(r,\theta)=U_0(r,\theta)+\sum_{n=1}^{N}U_n(r,\theta). \tag{5}$$

假设 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是具以下形式的有限 Fourier 级数

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \\ g(\theta) &= \frac{1}{2}C_0 + \sum_{n=1}^{N} C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta). \end{aligned} \tag{6}$$

在方程 $U(r_o,\theta) = f(\theta)$ 和 $U(r_i,\theta) = g(\theta)$ 中比较 Fourier 系数, 得下面方程组对

$$\begin{cases} a_0 + \alpha_0 \ln r_o = \frac{1}{2}A_0 \\ a_0 + \alpha_0 \ln r_i = \frac{1}{2}C_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_n r_o^n + \alpha_n r_o^{-n} = A_n \\ a_n r_i^n + \alpha_n r_i^{-n} = C_n \end{cases}, \quad \begin{cases} b_n r_o^n + \beta_n r_o^{-n} = B_n \\ b_n r_i^n + \beta_n r_i^{-n} = D_n \end{cases} \tag{7}$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$. 在第一个组对中, 要用给定的常数 A_0 和 C_0 来解出 a_0 和 α_0, 类似地要解其他的组对. 回忆起任意方程组 (假设 $ad - bc \neq 0$)

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \text{的解是} \quad \begin{cases} x = \frac{ed-fb}{ad-bc} \\ y = \frac{af-ce}{ad-bc} \end{cases}$$

因此, 记 $Q \equiv r_o/r_i$, 我们得到

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{C_0 \ln r_o - A_0 \ln r_i}{2\ln Q}, & \alpha_0 &= \frac{A_0 - C_0}{2\ln Q}, \\ a_n &= \frac{A_n r_i^{-n} - C_n r_o^{-n}}{Q^n - Q^{-n}}, & \alpha_n &= \frac{C_n r_o^n - A_n r_i^n}{Q^n - Q^{-n}}, \\ b_n &= \frac{B_n r_i^{-n} - D_n r_o^{-n}}{Q^n - Q^{-n}}; & \beta_n &= \frac{D_n r_o^n - B_n r_i^n}{Q^n - Q^{-n}}. \end{aligned} \tag{8}$$

这给出了用给定的 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 的 Fourier 系数 A_n, B_n, C_n 和 D_n 来表示 a_n, b_n, α_n 和 β_n. 我们概括成下面结果:

命题 2 当 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 由 (6) 给出时, (3) 的解是

$$U(r,\theta) = a_0 + \alpha_0 \ln r + \sum_{n=1}^{N} \left((a_n r^n + \alpha_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (b_n r^n + \beta_n r^{-n}) \sin(n\theta) \right), \tag{9}$$

其中 a_n, α_n, b_n 和 β_n 由 (8) 定义.

例 1 (圆环上的稳态温度问题) 解

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=0, \quad 1<r<2;\\
&\text{B.C.} \begin{cases} U(2,\theta)=5\sin\theta,\\ U(1,\theta)=3+4\cos(2\theta);\end{cases}\\
&\text{P.C.} \quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta).
\end{aligned} \tag{10}
$$

解 就如我们已看到的, 分离变量和叠加原理导出形式 (9) 的解. 则可以简单地对 $C_0=6$, $C_2=4$, $A_1=5$ 以及所有其他的 A_n, B_n, C_n 和 D_n 都等于 0 运用公式 (8). 注意到 $Q\equiv r_o/r_i=2$. 与其利用在命题 2 中标明的公式 (8) 我们还不如利用导出公式 (8) 的方法. 特别地, 如果使 B.C. 中的 Fourier 系数与 (9) 中利用 $r=1$ 和 $r=2$ 的 $U(r,\theta)$ 的 Fourier 系数相等, 则得 (参看 (7))

$$
\begin{cases} a_0+\alpha_0\ln 2=0\\ a_0+\alpha_0\ln 1=3\end{cases}, \quad \begin{cases} 2b_1+\frac{1}{2}\beta_1=5\\ b_1+\beta_1=0\end{cases}, \quad \begin{cases} 2^2a_2+2^{-2}\alpha_2=0\\ a_2+\alpha_2=4\end{cases}
$$

解这些方程组, 得 $a_0=3$, $\alpha_0=-\frac{3}{\ln 2}$, $b_1=\frac{10}{3}$, $\beta_1=-\frac{10}{3}$, $a_2=-\frac{4}{15}$ 和 $\alpha_2=\frac{64}{15}$. (7) 中所有其他的方程组都是零解. 则 (10) 的解是

$$
U(r,\theta)=3-3\frac{\ln r}{\ln 2}+\left(\frac{10r}{3}-\frac{10}{3r}\right)\sin\theta+\left(-\frac{4r^2}{15}+\frac{64}{15r^2}\right)\cos(2\theta). \qquad \square
$$

圆盘上的 Dirichlet 问题

圆心在 $(0,0)$ 半径为 r_o 的圆盘上的 Dirichlet 问题可用以下表示

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}=0, \quad \sqrt{x^2+y^2}<r_o\\
&\text{B.C.} \quad U(r_o,\theta)=f(\theta), \quad f(\theta+2\pi)=f(\theta).
\end{aligned} \tag{11}
$$

其中 $U(r,\theta)=u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 和 $f(\theta)$ 是给定的周期为 2π 的周期连续函数.

注记 在 (11) 中我们没有把 D.E. 用极坐标形式写出来, 因为它在圆盘 $\sqrt{x^2+y^2}<r_o$ 中的极点 $(0,0)$ 无意义. 解问题 (11) 的直觉是只要像圆环的情形那样, 但为了避免 (9) 在极点的奇性, 令 $\alpha_n=0$, $n\geqslant 0$ 和 $\beta_n=0$, $n\geqslant 1$. 则由 B.C. 确定 a_n 和 b_n, 现在只跟 $f(\theta)$ 有关. (暂时假设 $f(\theta)$ 是有限 Fourier 级数.)

虽然用这种途径确实得到 (11) 的解, 但存在潜在的困难. 在极坐标下是 C^2 的函数在 (0,0) 处未必是 C^2 的. 例如, 函数 $U(r,\theta)=r$ 似乎是好的, 但在笛卡儿坐标下, 得 $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 它在 (0,0) 处不是 C^1 的, 因为它的图像 $z=u(x,y)$ 是以 (0,0,0) 为顶点的锥. 还注意到, 函数 $\cos(n\theta)$ 和 $\sin(n\theta)$ 在 (0,0) 不可连续定义的, 因为每个这样的函数在原点发出的射线上取值范围是 -1 到 1. 另一方面, $r^2\cos(2\theta)=x^2-y^2$ 是 C^∞ 函数. 现来证明: 一般地, $r^n\cos(n\theta)$ 和 $r^n\sin(n\theta)$ 是 x 和 y 的多项式, 因此是 C^∞ 的. 令 $z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=re^{i\theta}$(参看第 1.1 节的 Euler 公式 (24)). 则有 **De Moivre公式**[以生于法国的英国数学家和概率论的奠基人 Abraham De Moivre(1667—1754) 命名]:

$$z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)). \tag{12}$$

换言之,$r^n\cos(n\theta)$ 和 $r^n\sin(n\theta)$ 是乘积 $(x+iy)\cdots(x+iy)$[n 个因子] 的实部和虚部. 但如果这个乘积把它乘出来, 实部和虚部将是 x 和 y 的 n 次多项式. 这些多项式是调和的. 的确, 它们是函数 $r^n\cos(n\theta)$ 和 $r^n\sin(n\theta)$, 对 $r>0$ 是调和的, 而且在原点不会有困难, 因为多项式的二阶偏导数在 (0,0) 是连续的. □

命题 3 在 Dirichlet 问题 (11) 中, 如果

$$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta), \tag{13}$$

则问题 (11) 的解是

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(\frac{r}{r_o})^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)). \tag{14}$$

证明 由上述的注记以及叠加原理, 得知 (14) 定义了在整个圆盘上的调和函数. 注意到如果在 (14) 的右边取 $r=r_o$, 则结果等于 $f(\theta)$, 因此 (11) 的 B.C. 满足. 由 Dirichlet 问题的唯一性定理 (参看第 6.2 节的定理 1), 得 (14) 是 (11) 的唯一解. □

例 2 求解半径为 1 的圆盘上的 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad r<1;\\&\text{B.C.}\quad U(1,\theta)=-1+8\cos^2\theta;\\&\text{P.C.}\quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta).\end{aligned}\tag{15}$$

解 $-1+8\cos^2\theta$ 的 Fourier 级数是 $3+4\cos(2\theta)$, 与例 1 中第二个[①] B.C. 相同. 虽然例 1 中 (10) 的解满足 B.C., 但它不是 (15) 的解, 因为与 $\ln r$, r^{-1}, r^{-2} 等有关的项在圆盘中心无定义. 我们改为利用 (14) 得到正确的解 $U(r,\theta)=3+4r^2\cos(2\theta)$. □

Poisson 积分公式

现来推导用积分表示解 (14) 的 Poisson 积分公式 (参看下面的 (20)). 我们将证明该公式导出 Dirichlet 问题 (11) 的解, 即使 (11) 中的连续函数 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数有无穷多个非零项. 到目前为止, 我们尚未证明当 $N=\infty$ 时 (14) 仍有效, 因为如前面的章节已看到的, 叠加原理对无穷多线性组合会不成立. 然而, 作为 Poisson 积分公式的一个推论, 得知 (14) 实际上对 $r<r_o$ 都有效, 即使 $N=\infty$. 虽然下面 Poisson 积分公式的非正式推导不能代替一个严格证明 (参看下面的定理 1), 但这个推导解释了这个公式是怎样产生的.

先不严格地开始, 在 (14) 中取 $N=\infty$, 并用 f 的积分表示 f 的 Fourier 级数的系数 a_n 和 b_n, 得

$$\begin{aligned}U(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\{(\frac{r}{r_o})^n[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\cos(n\theta)\\&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt\sin(n\theta)]\}.\end{aligned}$$

把这些积分合并, 得

$$\begin{aligned}U(r,\theta)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_o})^n[\cos(nt)\cos(n\theta)+\sin(nt)\sin(n\theta)]\}dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_o})^n\cos(n(\theta-t))\}dt.\end{aligned}\tag{16}$$

[①] 原文误为第一个.——译者

可对 (16) 中的级数如以下求和. 令 $\tau \equiv \frac{r}{r_o}[\cos(\theta - t) + i\sin(\theta - t)]$. 则 (16) 中的括号内的表示式是实部:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_o})^n \cos[n(\theta - t)] = \mathrm{Re}(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n). \tag{17}$$

对 $|\tau| < 1$, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \tau^n$(具复数项 τ^n) 收敛到 $\tau/(1-\tau)$, 且 (17) 是

$$\mathrm{Re}[\frac{1}{2} + \frac{\tau}{1-\tau}] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\frac{1+\tau}{1-\tau}].$$

对任意复数 $z = a + ib \neq 0$, 有 $1/z = \bar{z}/|z|^2$, 其中 $\bar{z} = a - ib$. 因此,

$$\frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{(1+\tau)(1-\bar{\tau})}{|1-\tau|^2} = \frac{1-|\tau|^2}{|1-\tau|^2} + \frac{\tau - \bar{\tau}}{|1-\tau|^2}.$$

由于最后一项是纯虚数, 所以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\frac{1+\tau}{1-\tau}] &= \frac{1-|\tau|^2}{|1-\tau|^2} = \frac{1-(r/r_o)^2}{1-(\tau+\bar{\tau})+|\tau|^2} \\ &= \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2rr_o\cos(\theta - t) + r^2} \equiv P(r, r_o, \theta - t).\end{aligned} \tag{18}$$

表示式 $P(r, r_o, \theta - t)$ 称为 **Poisson核**. 结合 (16),(17) 和 (18), 得 **Poisson积分公式**

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, r_o, \theta - t) f(t) dt \quad (r < r_o). \tag{19}$$

注记 虽然上述论证间接表明 (19) 满足 Dirichlet 问题 (11), 但它不能作为一个证明, 因为我们假设 (14) 即使当 $N = \infty$ 时也是对的, 且在 (16) 中不讲理由交换了积分和无穷和. 在给出证明之前, 我们先作一些评注. (18) 中 $P(r, r_o, \theta - t)$ 的分母是极坐标中 (r,θ) 到 (r_o, t) 的距离的平方 (利用关系 $|z|^2 = z\bar{z}$, 直接计算 $|re^{i\theta} - r_o e^{it}|^2$). 因此, 只要 $r < r_o$, $P(r, r_o, t - \theta)$ 是 (r,θ) 的 C^∞ 函数. 由 Leibniz 法则 (参看附录 3), 通过积分号下对 $P(r, r_o, \theta - t)$ 求导, 可对 $U(r,\theta)$ 随意求导 (关于 r 和 θ) 任意次. 特别, 通过检验对每个固定的 t, 作为 r 和 θ 的函数, $P(r, r_o, \theta - t)$ 满足 (11) 的 D.E., 我们能验证 $U(r,\theta)$ 是调和的 (关

于 $r < r_o$).(因为已经知道 $P(r, r_o, \theta - t)$ 是极坐标的光滑函数, 所以这不会有困难.) 这种检验是直接的和冗长的, 我们把它留给勤勉的读者. P 是调和的事实似乎是对的, 因为它是 (16) 中调和函数的和 (虽然是无穷和) 的两倍. 对那些熟悉复变量函数的读者的另一种考虑, 在 (18) 中我们已经把 P 表示为解析函数 $\tau = (r/r_o)e^{i(\theta - t)}$, $r < r_o$ 的实部, 因此 P 必是调和的. 总之, P 是调和函数的事实结合 Leibniz 法则得出 (19) 中的 $U(r, \theta)$ 对于 $r < r_o$ 是调和的结果. 因此, 为了确定下面的结果, 只需要验证 $U(r, \theta)$ 可连续地延拓到在边界 $r = r_o$ 上给定的函数 $f(\theta)$.

定理 1 (Poisson 积分公式) 令 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数. 定义

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r_o^2 - r^2) f(t)}{r_o^2 - 2rr_o \cos(\theta - t) + r^2} dt \quad (r < r_o) \tag{20}$$

和

$$U(r_o, \theta) \equiv f(\theta) \quad (r = r_o). \tag{21}$$

则 $U(r, \theta)$ 在开圆盘 $r < r_o$ 上是调和的, 并在闭圆盘 $r \leqslant r_o$ 上是连续的. 换言之, $U(r, \theta)$ 满足 **Dirichlet** 问题 (11).

证明 由上述的注记, $U(r, \theta)$ 在开圆盘内是调和的. 为了得到 $U(r, \theta)$ 在闭圆盘上的连续性, 必须证明: 任给边界上的一点 (r_o, θ_0), 当 (r, θ) 趋于 (r_o, θ_0) 时 $U(r, \theta)$ 趋于 $f(\theta_0)$. 先需要证明, 对于 $r < r_o$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2rr_o \cos(\theta - t) + r^2} dt = 1. \tag{22}$$

注意到该积分与 θ 无关, 因为改变 θ 只起到对被积函数 (周期为 2π 的周期函数) 平移的作用而不改变积分值. 因此, (22) 的左边是一个调和函数 (由上述的注记, 其中 $f(\theta) \equiv 1$), 且是与 θ 无关, 于是必具有形式 $C \ln r + K$(参看第 6.1 节的例 1). 然而, 当 $r = 0$ 时 (22) 的左边显然是 1, 因此 $C = 0$ 和 $K = 1$(即,(22) 对所有的 (r, θ), $r < r_o$ 成立). 在 (22) 中用常数 $f(\theta_0)$ 相乘, 得

$$f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, r_o, \theta - t) f(\theta_0) dt \tag{23}$$

并从 (20) 减去 (23) 的对应两边, 得

$$U(r, \theta) - f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, r_o, \theta - t)[f(t) - f(\theta_0)] dt. \tag{24}$$

为证 $U(r,\theta)$ 在 (r_o,θ_0) 处的连续性, 必须证明通过要求 (r,θ) 充分靠近 (r_o,θ_0), (24) 的右边可任意小. (24) 中的积分区间 $[-\pi,\pi]$ 可由新的区间 $[\theta_0-\pi,\theta_0+\pi]$(长度为 2π) 替换而不改变积分值, 因为被积函数是以 2π 为周期的. 对任意的 δ, $0<\delta<\pi$, 把新区间分成三部分, 即

$$i_1=[\theta_0-\pi,\theta_0-\delta],\quad i_2=[\theta_0-\delta,\theta_0+\delta],\quad i_3=[\theta_0+\delta,\theta_0+\pi].$$

把 $\frac{1}{2\pi}P(r,r_o,\theta-t)[f(t)-f(\theta_0)]$ 关于 t 在区间 i_1 上的积分记作 I_1, 类似地定义 I_2 和 I_3. 为估计 I_2, 令 $M(\delta)$ 是当 t 在中心是 θ_0 长度为 2δ 的区间 I_2 取值时 $|f(t)-f(\theta_0)|$ 的最大值. 由于 f 在 θ_0 是连续的, 所以取 δ 充分小时可使 $M(\delta)$ 任意小. 我们有

$$|I_2|=|\frac{1}{2\pi}\int_{i_2}P(r,r_o,\theta-t)[f(t)-f(\theta_0)]dt|\leqslant\frac{M(\delta)}{2\pi}\int_{i_2}P(r,r_o,\theta-t)dt\leqslant M(\delta),\tag{25}$$

其中在最后的不等式已用了 (22) 和 $P(r,r_o,\theta-t)\geqslant 0$(对 $r<r_o$) 的事实. 为估计 I_1 和 I_3, 对于 $|x|\leqslant\sqrt{11}$, 利用$1-\cos x=x^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2+\cdots)\geqslant\frac{1}{24}x^2$. 为证这个不等式, 注意到对于 $x^2<12$, 级数 $\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{720}x^4-\cdots$ 是项的绝对值是单减的交错级数, 因此 $\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2$(在 $|x|<\sqrt{11}$ 时它 $\geqslant\frac{1}{24}$) 是整个级数的下界. 于是, 得 (对于 $|\theta-t|<\sqrt{11}$)

$$\begin{aligned}r_o^2-2r_or\cos(\theta-t)+r^2&=(r_o-r)^2+2r_or[1-\cos(\theta-t)]\\&\geqslant 2r_or[1-\cos(\theta-t)]\geqslant\frac{r_or(\theta-t)^2}{12}.\end{aligned}$$

因此, 对 $|\theta-t|<\sqrt{11}$(且因为对于 $r<r_o$, $\frac{(r_o+r)}{r_o}<2$)

$$P(r,r_o,\theta-t)\leqslant\frac{12(r_o^2-r^2)}{r_or(\theta-t)^2}\leqslant\frac{24(r_o-r)}{r(\theta-t)^2}.\tag{26}$$

令 M 是 $|f(\alpha)|$, $-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$ 的最大值. (M 存在, 因为 $f(x)$ 是闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数.) 则 $|f(t)-f(\theta_0)|\leqslant 2M$. 假设 θ 与 θ_0 相距不超过 $\frac{1}{2}\delta$ (即 $|\theta-\theta_0|<\frac{1}{2}\delta$), 其中 $\frac{1}{2}\delta<\sqrt{11}-\pi\approx 0.175$. 则对 i_1 或 i_2 中的 t, 有

$$\frac{1}{2}\delta<|\theta-t|\leqslant|\theta-\theta_0|+|\theta_0-t|<\sqrt{11}-\pi+\pi=\sqrt{11}.$$

因此, 可利用 (26) 得到

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{i_1}P(r,r_o,\theta-t)|f(t)-f(\theta_0)|dt\leqslant\frac{24M(r_o-r)}{r\delta^2/4}.\tag{27}$$

对 $|I_3|$ 有相同的界. 于是由 (25) 和 (27), 得

$$|I_1 + I_2 + I_3| \leqslant M(\delta) + 192M\frac{r_o - r}{r\delta^2}. \tag{28}$$

任给 $\epsilon > 0$, 可取 $\delta > 0$ 如此小, 使得 $M(\delta) < \frac{1}{2}\epsilon$. 然后取 θ 靠近 θ_0, 使得 $|\theta - \theta_0| < \min(\frac{1}{2}\delta, \sqrt{11} - \pi)$, 并取 r 充分靠近 r_o, 使得 $192(r_o - r)/(r\delta^2) < \frac{1}{2}\epsilon$, 由 (28) 和 (24) 得到 $|U(r,\theta) - f(\theta_0)| \leqslant \epsilon$. 换言之, 通过取 θ 充分接近 θ_0 和 r 充分接近 (但小于)r_o, 我们能使 $U(r,\theta)$ 任意接近 $f(\theta_0)$. □

即使对简单的函数, 积分 (20) 要精确计算都会是困难的, 但根据数值积分, 比方由 Simpson 法则, 对任意给定的 (r,θ), 可求出 (20) 的近似值. 如果 f 可能用有限 Fourier 级数表示的话, 那 (11) 的解用 (14) 表示比用 (20) 表示要方便得多. 的确, 在这种情形, 由圆盘上 Dirichlet 问题的唯一性定理, (14) 必是 (20) 的积分的结果, 如下面例子所说明的.

例 3 证明对 $r < 1$, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)\sin t}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt = r\sin\theta. \tag{29}$$

解 (29) 的两边都是半径 $r_o = 1$ 的圆盘上具 B.C. $f(\theta) = \sin\theta$ 的 Dirichlet 问题的解. 由唯一性, 这两边对 $r < 1$ 必相等. 附带提及一下, (29) 对于 $r > 1$ 不总是有效的. 的确, 对 $r > 1$, 左边是 $-\frac{1}{r}\sin\theta$, 如在习题 (13) 中所证明的. □

调和函数的中值定理和正则性

现来研究 Poisson 积分公式一些值得注意的结果.

> **定理 2(中值定理)** 令 u 是在某个开区域 R 上的调和函数. 则 u 在任一包含在 R 内的闭圆盘 D 的圆心的值等于 u 在 D 的圆周边界上的平均 (或中值).

证明 通过引入极点在圆心的极坐标, 可假设 D 是圆盘 $r \leqslant r_o$. 在 D 的边界上, u 等于 $U(r_o,\theta)$. 因此, 由 $r = 0$ 的 Poisson 积分公式 (20), 得

$$u(0,0) = U(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(0,r_o,\theta-t)U(r_o,t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(r_o,t)dt, \tag{30}$$

因为由 (18), $P(0,r_o,\theta-t) = 1$. 最后的积分是 u 在 D 的边界上的**中值**(**或平均值**). □

虽然在一个开区域 R 上的调和函数 u (按定义) 只要求是 C^2 的, 但如下面定理所证明的, 它实际上是 C^∞.

定理 3(调和函数的正则性) 如果 u 是在某个开区域 R 上的调和函数.则 u 在 R 上是 C^∞ 的.

证明 令 p 是 R 内任意一点, 取以 p 为极点的极坐标 (r,θ). 假设 r_o 选得足够小, 使得圆盘 $r \leqslant r_o$ 包含在 R 内, 并令 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$. 现把 $P(r,r_o,\theta-t)$ 看作是 (x,y,t), $x^2+y^2<r_o^2$ 的函数时, 它是无穷次可微的. 的确,

$$P(r,r_o,\theta-t) = \frac{r_o^2-x^2-y^2}{[x-r_o\cos t]^2+[y-r_o\sin t]^2}. \tag{31}$$

因此, 反复利用 Leibniz 法则 (参看附录 3) 得: u 在圆盘 $r<r_o$ 的所有导数可通过在 Poisson 积分公式的积分号下求导数来计算. 特别, u 关于 x 和 y 的所有偏导数在 R 内任意点 p 存在, 于是 u 在 R 上是 C^∞ 的. □

定理 4(无穷级数解) 令 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 且FS $f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)$. 则 Dirichlet 问题

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & u_{xx}+u_{yy}=0, \quad \sqrt{x^2+y^2}<r_o \\ \text{B.C.} & U(r_o,\theta)=f(\theta)\end{array} \tag{32}$$

有由下面给出的 (唯一) 解 $U(r,\theta)$

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{r_o})^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)) \quad (r<r_o), \tag{33}$$

而 $U(r_o,\theta)$ 定义为 $f(\theta)$.(注意到不必假设 FS $f(\theta)=f(\theta)$, 但如果这个成立,则 (33) 对 $r=r_o$ 也有效.)

证明 由唯一性定理 (参看第 6.2 节的定理 1) 和定理 1, 问题 (32) 的解 $U(r,\theta)$ 对于 $r<r_o$ 由 (20) 给出. 因此, 只需证明 (20) 和 (33) 的右边相等. 由定理 3 得到, 对任意固定的 $r<r_o$, $U(r,\theta)$ 是 θ 的 C^∞ 周期函数. 因此, 由第四章的收敛性定理 (例如, 第 4.2 节的定理 1), 可知对固定的 $r<r_o$, $U(r,\theta)$ 的 Fourier 级数收敛到 $U(r,\theta)$. 于是, 只要证明 $U(r,\theta)$ 的 Fourier 级数等于 (33) 的

右边即可. 计算 $U(r,\theta)$ 的 Fourier 系数 $a_n(r)$

$$\begin{aligned}
a_n(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(r,\theta)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta-t)f(t)dt\Big)\cos(n\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta-t)\cos(n\theta)d\theta\Big)f(t)dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{r}{r_o})^n\cos(n\theta)f(t)dt = (\frac{r}{r_o})^n a_n,$$

其中我们交换了积分次序 (参看附录 2) 并利用了具边界函数 $\cos(n\theta)$ 的 Dirichlet 问题的解是 $(\frac{r}{r_o})^n\cos(n\theta)$ 的事实. 类似的计算得出关于 $b_n(r)$ 的结果. □

注记 注意到当 (33) 右边的第 n 项用 x 和 y 来表示时, 它是 x 和 y 的 n 次多项式. 因此, 定理 4 告诉我们, 一个在闭圆盘上连续, 在其内部调和的函数在圆盘的内部等于关于 x 和 y 的一个幂级数 (即, 调和函数是关于 x 和 y 是**实解析的**). (这里已假设 x 和 y 的坐标是如此选取, 使得圆盘的圆心, 比如 p 成为原点.) 由高等微积分的一个基本结果, 该幂级数必是 u 在 p 处的 Taylor 级数. 因此, 如果所有 u 在 p 处的偏导数为零, 则 u 在整个圆盘必为常数. □

概要 6.3

1. 极坐标形式的 Laplace 运算: 在区域上的一个 C^2 函数 $u(x,y)$, 以极坐标表示 $u(x,y)=U(r,\theta)$, 我们有

$$U_{xx}+U_{yy}=U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

2. 圆环上的 Dirichlet 问题: 圆环上的 Dirichlet 问题可用以下极坐标表示

$$\begin{array}{ll}
\text{D.E} & U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=0,\quad r_i<r<r_o; \\
\text{B.C.} & \begin{cases} U(r_o,\theta)=f(\theta), & f(\theta+2\pi)=f(\theta), \\ U(r_i,\theta)=g(\theta), & g(\theta+2\pi)=g(\theta); \end{cases} \\
\text{P.C.} & U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta)\quad r_i<r<r_o.
\end{array} \tag{S1}$$

这里 "P.C." 表示 "周期性条件." 如果 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是有限 Fourier 级数, 则 (S1) 的解具有形式 (参看命题 2)

$$U(r,\theta)=a_0+\alpha_0\ln r+\sum_{n=1}^{N}U_n(r,\theta), \tag{S2}$$

其中 $U_n(r,\theta)=(a_nr^n+\alpha_nr^{-n})\cos(n\theta)+(b_nr^n+\beta_nr^{-n})\sin(n\theta),\quad n\geqslant 1$, 且系数 a_n, b_n, α_n 和 β_n 由公式 (8) 中 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 的 Fourier 系数给出.

3. 圆盘上的 Dirichlet 问题: 半径为 r_o, 圆心在 $(0,0)$ 的圆盘上的 Dirichlet 问题可表示为

$$\begin{aligned}&\text{D.E}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad \sqrt{x^2+y^2}<r_o;\\&\text{B.C.}\quad U(r_o,\theta)=f(\theta),\quad f(\theta+2\pi)=f(\theta),\end{aligned} \tag{S3}$$

其中 $U(r,\theta)=u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$, $f(\theta)$ 是给定的连续周期函数. 若 $f(\theta)$ 具有形式

$$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta), \tag{S4}$$

则 (S3) 的解为

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(\frac{r}{r_o})^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)). \tag{S5}$$

(S3) 的解也能用 Poisson 积分公式来表示, Poisson 积分公式反过来能用于验证公式 (S5)(对于 $r<r_o$) 当 $N=\infty$ 以及 $f(\theta)$ 是连续时的正确性 (参看定理 4).

4. Poisson 积分公式 (定理 1): 令 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数. 定义 $U(r_o,\theta)=f(\theta)$ 并置

$$U(r,\theta)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(r_o^2-r^2)f(t)}{r_o^2-2rr_o\cos(\theta-t)+r^2}dt\quad(r<r_o). \tag{S6}$$

则 $U(r,\theta)$ 在开圆盘 $r<r_o$ 上是调和的, 在闭圆盘 $r\leqslant r_o$ 上是连续的. 换句话说, $U(r,\theta)$ 满足 Dirichlet 问题 (S3).

5. 中值定理 (定理 2): 设 u 是在某个开区域 R 上的调和函数. 则 u 在任一包含在 R 内的闭圆盘 D 的圆心的值等于 u 在 D 的圆周边界上的平均 (或中值).

6. 调和函数的正则性 (定理 3): 如果 u 在某个开区域 R 上是调和的, 则 u 在 R 上是 C^∞ 的. 的确, u 在 R 上是实解析的.

练习 6.3

1. 解圆环上 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E}\quad U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}=0,\quad 1<r<2;\\
&\text{B.C.}\quad U(2,\theta)=f(\theta),\quad U(1,\theta)=g(\theta);\\
&\text{P.C.}\quad U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta),
\end{aligned}$$

(a) 当 $f(\theta)=1+2\cos\theta+\cos(2\theta)$ 和 $g(\theta)=\sin(2\theta)$ 时;
(b) 当 $f(\theta)=\sin^2\theta$ 和 $g(\theta)=\sin\theta\cos\theta$ 时;
(c) 当 $f(\theta)=a$ 和 $g(\theta)=b$ 时, 其中 a 和 b 是常数;
(d) 当 $f(\theta)=a\sin(3\theta)$ 和 $g(\theta)=b\sin(3\theta)$ 时, 其中 a 和 b 是常数;
(e) 当 $f(\theta)=1+3\cos\theta-17\sin(8\theta)$ 和 $g(\theta)=0$ 时.

2. (a) 证明定义在圆环 $r_i<r<r_o$ 上的任一具有形式 $U(r,\theta)=h(\theta)$ 的调和函数 (即与 r 无关) 必为常数, 即与 θ 也无关.
(b) 假设 (a) 中的调和函数只要求定义在圆环的上部 $(0<\theta<\pi)$. 证明在这种情形 $h(\theta)$ 不必是常数. 如果 $h(0)=a$ 和 $h(\pi)=b$, 则对于 $0<\theta<\pi$, $h(\theta)$ 等于什么?

3. 解圆盘 $r\leqslant 2$ 上的 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad (x^2+y^2<4)\\
&\text{B.C.}\quad U(2,\theta)=f(\theta),\quad f(\theta+2\pi)=f(\theta),
\end{aligned}$$

其中 $f(\theta)$ 是由习题 1 的各部分给出. 为什么这里不能只利用习题 1 中的答案来解上述问题?

4. (a) 利用 Poisson 积分公式, 当 $f(\theta)=\theta^2$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时写出习题 3 中的问题的解.
(b) 用形如定理 4 中 (33) 的无穷级数来表示 (a) 中的解. 这只是一个形式解还是一个精确解?
(c) 为了在整个圆盘 $r\leqslant 2$ 上在误差 0.01 之内逼近精确解, 估计 (b) 中的级数所需的项数.

5. (a) 利用 (22) 来计算积分 $\int_{-\pi}^{\pi}[1-a\cos x]^{-1}dx$, 其中 $0<a<1$.
(b) 利用 Poisson 积分公式来计算积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{1-a\cos x}dx,$$

其中 $f(x)$ 是

(i) $\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$; (ii) $\sin^2 x$; (iii) $\cos^3 x$.

6. 设 $U_1(r,\theta)$ 和 $U_2(r,\theta)$ 满足圆盘 $r \leqslant r_o$ 上 Dirichlet 问题且 $U_1(r_o,\theta) = f_1(\theta)$ 和 $U_2(r_o,\theta) = f_2(\theta)$.① 不求助于最大值最小值原理, 利用 Poisson 积分公式推断

$$\text{如果 } |f_1(\theta) - f_2(\theta)| \leqslant \epsilon, \quad \text{则} \quad |U_1(r,\theta) - U_2(r,\theta)| \leqslant \epsilon, \quad r < r_o.$$

换言之, 在圆周上靠近的调和函数在圆盘上将是靠近的.

提示 利用 (22) 以及 $P(r, r_o, \theta - t) \geqslant 0$ 的事实.

7. (a) 假设 $U(r,\theta)$ 在圆盘 $r < r_o$ 内是调和的, 令 $V(r,\theta) = U(Rr,\theta)$, 其中 $R > 0$ 是常数. 证明 V 在圆盘 $r < r_o/R$ 内是调和的.

(b) 假设 $R < 1$, 利用 Poisson 积分公式和 (a) 推导

$$U(Rr,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, r_o, \theta - t)U(Rr_o, t)dt.$$

8. 证明对于 $0 < r_1 < r_2 < r_3$, Poisson 核 (参看 (18)) 具有下面 "卷积" 性质:

$$P(r_1, r_3, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r_1, r_2, \theta - t)P(r_2, r_3, t)dt.$$

提示 左边是关于 $r_1 < r_3$ 的 (r_1, θ) 的调和函数. 在圆盘 $r \leqslant r_2$ 上对该函数运用 Poisson 积分公式.

9. 一块几乎是平的导热板是以半径是 5 的圆盘的形状. 假设该板在两面上是绝热的. 板的边界给定一个形如 $f(\theta) = 10\theta^2$ 的稳态温度分布, 其中中心角 θ 的取值范围是 $-\pi$ 到 π. 该稳态温度在板的中心等于多少?

10. 求以下 Neumann 问题的解 $U(r,\theta)$

$$\begin{aligned}
&\text{D.E} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < r_o^2;\\
&\text{B.C.} \quad U_r(r_o,\theta) = f(\theta);\\
&\text{P.C.} \quad U(r,\theta + 2\pi) = U(r,\theta),
\end{aligned}$$

其中 $f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$, 且 N 是有限的以及 $a_0 = 0$. 为什么必须假设 $a_0 = 0$?

11. 为了得到圆环 $(r_i < r < r_o)$ 上 Neumann 问题, 在 (3) 的 B.C. 中以 U_r 替换 U. 然后取 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 如 (6).

(a) 关于 A_0 和 C_0 在什么条件下 Neumann 问题解存在?

(b) 在 (a) 的条件下, 求圆环上 Neumann 问题的解.

---

① 原文误为 $U_2(r,\theta) = f_2(\theta)$.——译者

提示 通过注意到如果 $U(r,\theta)$ 满足 $r^{-1}(rU_r)_r + r^{-2}U_{\theta\theta} = 0$, 则 $V = rU_r$ 满足 $r^{-1}(rV_r)_r + r^{-2}V_{\theta\theta} = 0$, 可以免去很多工作. 因此, 利用前面的公式 (8), 解关于 V 具有 B.C. $V(r_o,\theta) = r_o f(\theta)$ 和 $V(r_i,\theta) = r_i g(\theta)$ 的 Dirichlet 问题, 然后除以 r 并关于 r 积分, 得到 Neumann 问题期望的解 U.

(c) 令 $V(r,\theta)$ 是一固定的 Neumann 问题的任意两个解的差. 利用 D.E. 证明 $r^{-1}[r(VV_r)]_r + r^{-2}(VV_\theta)_\theta = (V_r)^2 + r^{-2}(V_\theta)^2$. 关于面积元素 $rdrd\theta$ 在圆环 $r_1 < r < r_o$ 上该结果积分来推断 V 必是常数 (参看第 6.2 节中的习题 9).

12. (a) 证明对于 $r < r_o$, 有

$$\frac{r_o - r}{r_o + r} \leqslant \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2rr_o\cos(\theta - t) + r^2} \leqslant \frac{r_o + r}{r_o - r}.$$

(b) 利用 (a) 中的结果推断: 如果 u 在开圆盘 $r < r_o$ 内调和, 在闭圆盘 $r \leqslant r_o$ 上连续, 且是非负的, 则 **Harnack 不等式**成立:

$$\frac{r_o - r}{r_o + r}u(0,0) \leqslant U(r,\theta) \leqslant \frac{r_o + r}{r_o - r}u(0,0) \quad (r < r_o).$$

(c) 利用 Harnack 不等式证明对所有 (x,y) 有定义的非负调和函数 $u(x,y)$ 必是常数.

提示 在 (b) 中考虑大的 r_o.

(d) 利用 (c) 证明对所有 (x,y) 有定义的非常值的调和函数的图像 $z = u(x,y)$ 必与每个水平面 $z =$ 常数 相交 (即,u 的值域是全体实数的集合.). 特别, 如果存在一个常数 M, 使得对所有的 (x,y), $|u(x,y)| \leqslant M$ (即 u 是有界的), 则 $u =$ 常数.

13. (a) 证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2)\sin t}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}dt = -\frac{1}{r}\sin\theta, \quad r > 1.$$

提示 令 $\rho = \frac{1}{r} < 1$ 并验证 $P(r,1,\theta - t) = -P(\rho,1,\theta - t)$.

(b) 更一般地, 证明如果

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta - t)f(t)dt, \quad r < r_o,$$

其中 $f(t)$ 是连续函数, 则对 $r > r_o$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,r_o,\theta - t)f(t)dt = -U(\frac{r_o^2}{r},\theta).$$

(c) 取 $U(r,\theta)$ 如 (b) 中所示, 证明 $V(r,\theta) = U(\frac{r_o^2}{r},\theta)$ 对于 $r > r_o$ 是调和的, 且 $V(r,\theta)$ 连续地延拓到圆周 $r = r_o$ 上的函数 $f(\theta)$. $\lim_{r\to\infty} V(r,\theta)$ 等于什么?

§6.4 Dirichlet 问题的最大值原理和唯一性

在前面的章节中, 我们已经看到最大值最小值原理 (或简单地称为最大值原理) 以及它的推论, 唯一性定理是很有用的结果. 没有唯一性, 我们就无法像多次谈到的那样, 提及 Dirichlet 问题的解. 而且有些地方唯一性以更隐晦的方式表示. 例如, 中值定理 (第 6.3 节的定理 2) 的证明用到事实: 每个调和函数可由在一个适当的圆盘上的 Poisson 积分公式给出, 但这就假设了唯一性. 同样的理由, 在证明调和函数是 C^∞(参看第 6.3 节[①]定理 3) 中, 我们已经用了唯一性. 另外, 最大值原理可用来以 Dirichlet 问题解在边值上的差来估计它们的差. 这种估计在应用上很重要 (参看第 6.2 节的例 5). 在证明最大值原理之前, 我们先来回顾一些术语.

xy-平面上一个子集 D 是**开的**, 如果 D 中的每点是某个完全包含在 D 内的圆盘 (具有正半径) 的圆心. 点 p 是 xy-平面的某个子集 E 的**边界点**, 如果每个以 p 为圆心的圆盘含有 E 中的点也含有不在 E 中的点. E 的一个边界点不必是属于 E 的. 的确, 开集不含有它的任意边界点. 一个集合包含它所有边界点的称为**闭集**. E 的所有边界点的集合称为 E 的**边界**. 集合 E 的**闭包**是闭集 $\overline{E}$, 它由或是 E 中的点或是 E 的边界中的点组成. 例如, 如果 D 是开圆盘 $r < 1$, 则 D 是开集, 圆周 $r = 1$ 是 D 的边界, 而 $\overline{D}$ 是闭圆盘 $r \leqslant 1$. 非空集 E 的**直径**是 E 中各对点之间的最大距离 (如果这种最大距离存在的话). 因此一个矩形 (开的或闭的) 的直径是对角线的长度, 而一个圆盘的直径就是通常意义下的直径. 如果 E 中存在可相隔任意远的点, 则 E 的直径称为是无穷的, 并称 E 是**无界的**(例如, 半平面, 或一个圆周的外部). 如果 E 的直径是有限的, 则称 E 是**有界的**. 这个标准术语会是很微妙的. 例如, 一个无界集能包括它的边界 (例如, 闭半平面 $y \geqslant 0$). 另外, x-轴上的开区间不是 xy-平面的开子集. 一子集 E 称为 (道路)**连通的**, 如果 E 中任意两点可用一条完全包含在 E 中的连续曲线相连接.

本节将用到的一个事实是: 在一个闭的和有界的集合上连续的函数在该集合中的某点达到最大值 (参看附录 4). 关于调和函数该事实的一个重大改进是**最大值原理**. 最大值原理表明, 如果 D 是一个有界开集, u 是 $\overline{D}$ 上的连续函数并且是 D 上的调和函数, 则 u 在 D 的边界上达到它的最大值. 函数 u 也在 D 的某点取到它的最大值是可能的. 然而, 最大值原理的一个更强的形式 (**强最大值原理**) 表明: 在这种情形, 如果 D 是连通开集, 则 u 必恒等于常数. 虽然我

[①]原文误为第 6.2 节.——译者

们考虑的是二维的情形, 但注意到在一维情形关于调和函数 $u = f(x)$ 对应的强最大值原理完全是平凡的. 的确, 在一维情形, Laplace 方程是 $f''(x) = 0$, 由此, $f(x) = ax + b$. 在任意闭区间 (有界的, 闭的直线的子集) 上这样的函数在一个端点上达到它的最大值. 而且, 如果 $f(x)$ 还在区间的内部达到它的最大值, 则显然 $f(x)$ 是常数. 当然在二维情形, 情况更复杂. 作为一个特殊的说明最大值原理的例子, 见第 6.2 节的例 3. 作为初步揭示对一个非常数的调和函数不可能出现局部最大值, 我们提供下面的例子.

例 1　令 $u(x,y)$ 是在某个开区域 D 上的调和函数. 证明如果 u 在某点 $p = (x_0, y_0)$ 具有局部最大值, 则 u 在 p 处的所有一阶和二阶偏导数必为零 (即, 图像在 p 处是 "二阶" 水平和平坦的).

解　如果 u 在 p 处有局部最大值, 则可知 u_x 和 u_y 在 p 处为零. 由于 u 的图像在任意方向不会是凹的, 所以 u 在 p 处在任意方向 $\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$ 的二阶方向导数必是非正的, 即

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}u(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)|_{t=0}\\&= \cos^2\theta u_{xx}(p) + 2\sin\theta\cos\theta u_{xy}(p) + \sin^2\theta u_{yy}(p) \leqslant 0.\end{aligned} \tag{1}$$

置 $\theta = 0$, 得到 $u_{xx}(p) \leqslant 0$. 取 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 得 $u_{yy}(p) \leqslant 0$. 则 Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 隐含 $u_{xx}(p) = 0$ 和 $u_{yy}(p) = 0$ (为什么?). 在 (1) 中取 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 得 $u_{xy} \leqslant 0$, 而取 $\theta = -\frac{\pi}{4}$, 得 $-u_{xy}(p) \leqslant 0$. 因此, 还有 $u_{xy}(p) = 0$. □

定理 1 (最大值最小值原理)　令 $u = u(x,y)$ 是定义在 $\overline{D}$ 上的连续函数, 其中D 是 xy–平面的任一非空的有界开子集. 如果 u 在 D 上是调和的, 则 u 的最大值和最小值在 D 的边界上达到.

证明　我们知道 (参看附录 4)u 的最大值在 $\overline{D}$ 中某点达到, 因为 u 在闭有界集 $\overline{D}$ 上连续. 用反证法来证本定理. 假设最大值不在边界上达到. 则最大值在 D 内某点 (x_0, y_0) 达到, 设 $M \equiv u(x_0, y_0) > M_b$, 其中 M_b 是 u 在 D 的边界上的最大值. 对某个常数 $\epsilon > 0$, 令

$$v(x,y) = u(x,y) + \epsilon[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]. \tag{2}$$

则 $v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M$, 且 v 在 D 的边界上的最大值不超过 $M_b + \epsilon d^2$, 其中 d 是 D 的直径. 对充分小的 ϵ, 有 $M > M_b + \epsilon d^2$(即, $0 < \epsilon < (M - M_b)/d^2$).

对这样的 ϵ, v 的最大值不会在 D 的边界上发生, 因为 v 在 (x_0, y_0) 处的值大于 v 在任一边界点上的值. 然而, 在 D 内会存在点, 使得在这些点上 v 大于等于 M. 设 v 的最大值在 (x_1, y_1) 处达到, 该点 (如我们所看到的) 必在 D 内. 在 (x_1, y_1) 处, 必有 $v_{xx} \leqslant 0$ 和 $v_{yy} \leqslant 0$, 因为 v 的图像在 (x_1, y_1) 处在 x 或 y 方向不会是凹的. 因此, 在 (x_1, y_1) 处, 有 $v_{xx} + v_{yy} \leqslant 0$. 然而, 由 (2), 得 $v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + 2\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon > 0$, 其中我们最后用了 u 在 D 上是调和的假设. 因此, 得到矛盾, 我们最初 u 的最大值不在边界上达到的假设不成立. 由于 u 的最小值是函数 $-u$(也是在 D 上调和的) 的最大值的负数, 所以由上述关于最大值的结果, u 的最小值也在 D 的边界上达到. □

注记 注意到在上述的证明中, 我们没有用到前面章节的任何结果. 下面的唯一性定理是最大值原理的一个直接推论, 因此我们避免了任一循环的推理 (即, 唯一性的证明不牵涉到利用前面的假设唯一性成立的结果). □

定理 2 (Dirichlet 问题的唯一性定理) 对 xy-平面上任一非空有界开子集 D. 设 u_1 和 u_2 在 $\overline{D}$ 上是连续函数, 在 D 上是调和的. 如果 u_1 和 u_2 在 D 的所有边界点是相等的, 则在整个 $\overline{D}$ 上它们是相等的. 换言之, D 上 Dirichlet 问题至多只有一个解.

证明 差 $v = u_1 - u_2$ 是在 $\overline{D}$ 上的连续函数, 在 D 上是调和的. 由于在 D 的边界上 $v = 0$, 所以最大值最小值原理隐含 $v \leqslant 0$ 和 $v \geqslant 0$. 因此, 在 $\overline{D}$ 上 $v = 0$, 即在 $\overline{D}$ 上 $u_1 = u_2$. □

接下来我们证明, 在一个有界开集 D 上 Dirichlet 问题中, 如果边界上指定的函数改变不超过 ϵ, 则解 (如果存在的话) 在整个 D 中变化不超过 ϵ. 粗略地说来, 解连续地依赖于边界数据.

定理 3 (解对边界数据的连续依赖性) 令 $u_i (\ i = 1, 2)$ 是 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle u_i = 0 \quad \text{于 } D\text{上} \\ &\text{B.C.} \quad u_i = f_i \quad \text{于 } C\text{上} \end{aligned}$$

的解 (假设存在), 其中 C 是有界开集 D 的边界. 如果 M 是 $|f_1 - f_2|$ 在 C 上的最大值, 则对 $\overline{D}$ 中所有的 (x, y), 有 $|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leqslant M$.

证明 令 $v=u_1-u_2$. 对 $\overline{D}$ 中所有的 (x,y), 有

$$-\max_C(|f_1-f_2|)\leqslant\min_C(f_1-f_2)\leqslant v(x,y)\leqslant\max_C(f_1-f_2)\leqslant\max_C(|f_1-f_2|),$$

其中第一个和最后一个不等式是显然的, 把最大值最小值原理运用到 v, 得到中间两个不等式. 因此 $-M\leqslant v(x,y)\leqslant M$, 以及对 $\overline{D}$ 中所有的 (x,y), $|v(x,y)|\leqslant M$. □

注记 当 $f_1=f_2$ 时, 我们有 $M=0$, 于是唯一性定理 (定理 2) 作为定理 3 的一个推论. □

例 2 设 u 是任一在整个 xy 平面上非常值的调和函数. 由第 6.3 节习题 12(d) 得知 u 的零水平集 $\{(x,y)|u(x,y)=0\}$ 是非空的. 证明该水平集不会含有任意圆周.

解 如果可能含有一圆周的话, 调和函数 u 将成为由该圆周所围的圆盘 D 上 Dirichlet 问题的解, 其中边值数据为零. 由唯一性定理, u 在整个圆盘 D 上为 0. 下面证明在整个 xy–平面上 $u\equiv 0$. 注意到在 D 的圆心 p, u 的所有偏导数等于零. 因此, u 在 p 处的 Taylor 级数为零. 然而, 由第 6.3 节定理 4 后面的注记, 在 u 调和的任意圆盘上, u 等于它在圆心的 Taylor 级数. 由于 u 在 xy–平面上调和, 所以它在 p 处的任意大的圆盘上是调和的. 因此, u 在 p 处的 Taylor 级数为零推得在整个平面上 $u=0$. 同样的论证本质上证明 $u(x,y)$ 的零点集合不会包含任一有界开集的边界. □

例 3 假设 $u(x,y)$ 是在闭圆盘 $r\leqslant 1$ 上的连续函数, 且在开圆盘 $r<1$ 上是调和的. 如果 $u(\cos\theta,\sin\theta)\leqslant\sin\theta+\cos(2\theta)$, 则证明对所有满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的 (x,y), 有 $u(x,y)\leqslant y+x^2-y^2$.

解 注意到 $v(x,y)=y+x^2-y^2$ 是满足 $v(\cos\theta,\sin\theta)=\sin\theta+\cos(2\theta)$ 的调和函数. 由假设, 在圆盘 $r\leqslant 1$ 的边界上 $u\leqslant v$. 因此, 调和函数 $u-v$ 在边界 $r=1$ 上的最大值必小于等于零. 则最大值原理隐含在整个圆盘上 $u\leqslant v$, 正如所期望的. □

例 4 (Poisson 核的唯一性) 假设对每个以 2π 为周期的连续周期函数 $f(\theta)$, 圆盘 $r\leqslant r_o$ 上具边界条件 $U(r_o,\theta)=f(\theta)$ 的 Dirichlet 问题的解由以下公式给出:

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(r,r_o,\theta-t)f(t)dt. \tag{3}$$

对某个函数 $Q(r,r_o,\theta-t)$, 该函数是连续的且关于 t 是以 2π 为周期的, 证明对

所有的 $r < r_o$ 以及所有的 θ 和 t, $Q(r, r_o, \theta - t)$ 等于 Poisson 核 $P(r, r_o, \theta - t)$.

解 因为 Dirichlet 问题的解 U 是唯一的, 所以得知, 如果以 P 替换 Q, (3) 成立. 因此, 有

$$0 = U(r, \theta) - U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P(r, r_o, \theta - t) - Q(r, r_o, \theta - t)] f(t) dt.$$

对任意固定的 θ 和 $r < r_o$, 令 $f(t) = P(r, r_o, \theta - t) - Q(r, r_o, \theta - t)$ 是最后的积分中的连续周期函数. 则得到 $\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = 0$, 由此, $f(t) = 0$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. 由于 $f(t)$ 是以 2π 为周期的, 则得知对所有的 t, $f(t) = 0$. □

强最大值最小值原理

强最大值最小值原理表明, 如果在某个连通开集 D 上的调和函数 u 在 D 内达到最大值或最小值, 则 u 在 D 上必恒等于常数. D 不必是有界的或 u 不必连续地延拓到 D 的边界. 本子节的目的是证明这个结果. 用到的主要工具是中值定理, 中值定理是作为 Poisson 积分公式 (参看第 6.3 节的定理 2) 的推论而建立的. 接下来我们证明, 不用积分公式, 用初等方式证明中值定理也是可能的 (而且是有启发性的). 这另一种证法基于以下的结果, 其中我们写成 $U(r, \theta) = u(x, y)$(参看第 6.3 节).

引理 1 对定义在圆盘 $D(\ r \leqslant R)$ 上的任意 C^2 函数 $u(x, y)$, 有公式

$$\iint_D (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \int_0^{2\pi} U_r(R, \theta) R d\theta. \tag{4}$$

换言之, u 的 Laplace 算式在圆盘上的积分等于 u 的法向导数沿着边界关于弧长微分 $ds = R d\theta$ 的积分.

证明 用极坐标计算 (4) 的左边,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}\right)rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R (rU_{rr}+U_r)drd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{r}U_{\theta\theta}drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R (rU_r)_r drd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{r}U_{\theta\theta}d\theta dr \\
&= \int_0^{2\pi} (rU_r)\big|_0^R d\theta + \int_0^R \frac{1}{r}U_\theta(r,\theta)\Big|_0^{2\pi} dr \\
&= \int_0^{2\pi} RU_r(R,\theta)d\theta + \int_0^R \frac{U_\theta(r,2\pi)-U_\theta(r,0)}{r}dr. \qquad (5)
\end{aligned}$$

然而 (5) 的右边就是 (4) 的右边, 因为由于 U(因此 U_θ) 关于 θ 是以 2π 为周期的事实, (5) 中右边的第二项是 0. 为了证明积分次序的变换 (参看附录 2) 是正确的, 我们注意到 $r^{-1}U_{\theta\theta}$ 中的显然的奇性是可去的, 因为 (根据第 6.3 节命题 1 的证明)$r^{-1}U_{\theta\theta}$ 在 $r\theta$ 平面中的矩形 $0<r<R$, $0<\theta<2\pi$ 的边 $r=0$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上连续地延拓到 $-u_x(0,0)\cos\theta-u_y(0,0)\sin\theta$. □

中值定理(第 6.3 节的定理 2) 的另一种证明

若 u 是引理 1 中的调和函数, 则 (4) 的左边为 0, 由此 (由附录 3 中的 Leibniz 法则)

$$0=\int_0^{2\pi} U_r(R,\theta)d\theta=\frac{d}{dR}\left(\int_0^{2\pi} U(R,\theta)d\theta\right).$$

因此, $\int_0^{2\pi} U(R,\theta)d\theta$ 是 R 的常数值函数. 该函数在 $R=0$ 处等于 $2\pi u(0,0)$, 于是中值定理成立. □

注记 引理 1 以非常一般形式成立. 的确, 令 D 是有界开集, 其边界 C 由有限多条光滑简单封闭曲线组成 (例如像瑞士硬干酪片), 并令 u 在 D 上是 C^2 函数. 则由 Green 定理, 有下面 (4) 的推广

$$\iint_D \triangle u dxdy=\int_C \nabla u\cdot\mathbf{n}ds, \tag{6}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是单位外法向, ds 是弧长元素. 对矩形, 第 6.2 节的例 6 证明了 (6) 成立. 作为一个直接推论, 得 Neumann 问题的相容性条件

$$\text{D.E.}\quad \triangle u=0,\quad 于\ D上;$$

$$\text{B.C.}\quad \nabla u\cdot\mathbf{n}=g,\quad 于\ C上,$$

即

$$\int_C g ds = 0.$$ □

例 5 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $x^2+y^2<r_0^2$ 内是调和的. 若 u 在点 $(0,0)$ 达到它的最大值, 则证明 u 在整个圆盘必是常数.

解 由中值定理 (参看第 6.2 节的定理 2), 有 (对任意 $r<r_0$),

$$\int_0^{2\pi} u(0,0)d\theta = 2\pi u(0,0) = \int_0^{2\pi} U(r,\theta)d\theta.$$

相减, 得 $\int_0^{2\pi}[u(0,0)-U(r,\theta)]d\theta = 0$. 由于被积函数 $u(0,0)-U(r,\theta)$ 是连续的和非负的 (由假设 u 的最大值在 $(0,0)$ 处达到), 所以作为 θ 的函数, 有 $u(0,0)-U(r,\theta)\equiv 0$. 因此, 对任意 $r<r_0$, $U(r,\theta)\equiv u(0,0)$, 于是 u 在整个圆盘 $r<r_0$ 是常数. □

定理 4 (强最大值最小值原理) 设 u 在连通开集 D 上是调和函数. 假设 u 的最大值或最小值在 D 内某点达到. 则 u 在整个 D 上必是常数.

证明 令 p 是 D 中 u 取到最大值的点, 记最大值为 M, 令 q 是 D 中任意其他的点. 由于 D 是连通的, 可用一曲线连接 p 和 q, 设该曲线的参数化为 $(x(t),y(t))$, 其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的连续函数, 且有 $p=(x(0),y(0))$ 和 $q=(x(1),y(1))$. 我们必须证明 $u(q)=M$. 令 $S=\{t\in[0,1];\ u(x(t),y(t))=M\}$. 显然, $0\in S$, 但需要证明 $1\in S$. 令 t_0 是最小的大于或等于所有 S 中的数的实数.(由于 S 是有界的, 这样的 t_0 的存在性由实数系统的一个公理, **上确界公理**来保证. 必须证明 t_0 属于 S 且 $t_0=1$. 对每个正整数 n, 由 t_0 的定义, 存在 S 中的数 t_n, 使得 $t_0-t_n\leqslant\frac{1}{n}$. 由 $u(x(t),y(t))$ 的连续性, 得

$$u(x(t_0),y(t_0)) = \lim_{n\to\infty} u(x(t_n),y(t_n)) = M.$$

因此, $t_0\in S$ 且 u 在 $(x(t_0),y(t_0))$ 处取到最大值. 令 D_0 是以 $(x(t_0),y(t_0))$ 为圆心, 完全包含在 D 内的开圆盘. 根据例 5, 在 D_0 上 $u\equiv M$. 现我们用反证法证明 $t_0=1$. 如果 $t_0<1$, 则由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的连续性, 得知对充分小的 $\delta>0$, $(x(t_0+\delta),y(t_0+\delta))$ 属于 D_0. 因此, $t_0+\delta$ 属于 S, 这与 t_0 的定义矛盾. 于是, 必有 $t_0=1$, 正如所期望的. 因为 u 的最小值是 $-u$ 的最大值的负数, 所以我们也知道, 如果 u 在 D 取到它的最小值, 则 u 在整个 D 内是常数. □

注记 最大值最小值原理 (定理 1) 是强最大值最小值原理的一个直接推论. 的确, 沿用定理 1 中的符号, 如果最大值 (或最小值) 不在 D 的边界上取到, 则由定理 4, u 是常数, 由此, 在 $\overline{D}$ 中处处取到最大值 (或最小值), 得到矛盾. 再者, 由于上面中值定理 (在例 5 中运用过) 的另一种证明没有用到唯一性 (定理 2), 所以根据定理 4 证明定理 1, 并不是循环的. □

例 6 假设 u 是定义在水平带形 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上的连续函数, 并假设 u 在 $-1 < y < 1$ 上是调和的. 假设对每个 $y \in [-1,1]$, $u(x,y)$ 关于 x 是以 2 为周期的 (即, 对所有的 x, $u(x+2,y) = u(x,y)$). 如果 u 在边界直线 $y = \pm 1$ 上等于零, 则证明 u 在整个带形上等于零. 给出一个例子说明如果去掉周期性的假设, 结论不成立.

解 正方形 $-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ 是闭的和有界的. 因此, 当限制在该正方形时, 连续函数 u 在正方形的某点取到它的最大值和最小值 (参看附录 4). 因为假设 u 关于 x 是以 2 为周期的, 所以 u 在该正方形 (沿 x 方向) 的任意平移的最大值和最小值与原正方形相同. 因此 u 在带形上的最大值和最小值可在无穷多点上取到. 如果这些点中的任一个点不在带形的边界直线上, 则 (由定理 4)u 在带形上是常数, 于是在带形上恒等于零 (为什么?). 如果最大值和最小值出现在边界直线上, 在其上 u 等于零, 则该函数在带形上显然为 0. 因此, 不管什么情形, $u \equiv 0$. 注意到调和函数 $u(x,y) = \cosh(\pi x/2)\cos(\pi y/2)$ 在边界 $y = \pm 1$ 上为零, 但对于 $-1 < y < 1$ 它是正的. 因此, 周期性假设不能去掉. 该例也说明带形上 Dirichlet 问题的唯一性不成立 (为什么?). □

注记 在例 6 中如果用适当的 "在无穷远处的连续性条件" 代替周期性条件, 则如下例所表明的,u 在整个带形 $-1 < y < 1$ 上必为零.

例 7 假设 u 在闭水平带形 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上连续, 且 u 在 $-1 < y < 1$ 上调和. 假设 u 在边界直线 $y = \pm 1$ 上等于零. 如果

$$|u(x,y) \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad y \in [-1,1],$$

则证明 u 在整个带形上为零.

解 对任意 $a > 0$, u 在矩形区域 $\{(x,y) : -a \leqslant x \leqslant a,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ 边界上的值位于 $\frac{-1}{1+a^2}$ 和 $\frac{1}{1+a^2}$ 之间. 因此, 由最大值最小值原理, u 在整个该矩形区域的值位于 $\frac{-1}{1+a^2}$ 和 $\frac{1}{1+a^2}$ 之间. 由于 a 可任意大, 所以在带形上 $u = 0$. □

概要 6.4

1. 最大值最小值原理 (定理 1): 设 $u = u(x, y)$ 在 $\overline{D}$ 上连续, 其中 D 是 xy 平面的非空有界开子集. 如果 u 在 D 上调和, 则 u 的最大值和最小值在 D 的边界达到.

2. Dirichlet 问题的唯一性 (定理 2): 对 xy 平面的任一非空有界开子集 D, 设 u_1 和 u_2 是 $\overline{D}$ 上的连续函数. 如果 u_1 和 u_2 在 D 的所有边界点上都相等, 则它们在整个 $\overline{D}$ 上相等. 换句话说, D 上 Dirichlet 问题至多只有一个解.

3. 解对边界数据的连续依赖性: 设 $u_i(i = 1, 2)$ 是以下 Dirichlet 问题的解 (如果解存在)

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle u_i = 0, \quad \text{于 } D\text{上}; \\ &\text{B.C.} \quad u_i = f_i, \quad \text{于 } C\text{上}, \end{aligned}$$

其中 C 是有界开集 D 的边界. 如果 M 是 $|f_1 - f_2|$ 在 C 上的最大值, 则对 $\overline{D}$ 中所有的 (x, y), $|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leqslant M$.

4. 强最大值最小值原理 (定理 4): 设 u 在连通开集 D 上调和. 假设 u 的最大值或最小值在 D 内某点取到. 则 u 在整个 D 上必为常数.

练习 6.4

1. 设 D 是 xy 平面中有界开集, 设 u_1, u_2 和 u_3 在 $\overline{D}$ 上连续且在 D 上调和. 证明如果在 D 的边界上 $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$, 则在整个 D 上 $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$.

2. 设 u 是 $\overline{D}$ 上的连续函数, 其中 D 是某个连通开集. 如果 u 在 D 上是调和的, 解释为什么一般说来通过同时解方程 $u_x = 0$ 和 $u_y = 0$ 来确定 u 取最大值的点是浪费时间.

3. 通过考虑乘积解来证明 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \infty \\ &\text{B.C.} \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y < \infty \end{aligned}$$

有不止一个解. 为什么这个结果不与定理 2 矛盾?

4. 注意到 $u_1(x,y)=1+\ln(x^2+y^2)$ 和 $u_2(x,y)=1-\ln(x^2+y^2)$ 在有定义的地方是调和的. 而且这些函数在圆周 $x^2+y^2=1$ 上相等, 但在该圆内不等. 为什么这个结果不与定理 2 矛盾?

5. 证明任一与一调和函数 (定义在开连通集 D 上) 的图像相切的平面必与该图像交于不止一个点.

提示 切平面也是一调和函数的图像. 考虑这些函数的差, 并运用强最大值原理.

6. 利用中值定理证明: 对任意满足 $|b|<1$ 的实常数 b, 有

$$\int_0^{2\pi}\ln[(1+b\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2]d\theta=0.$$

证明这个等式对 $b>2$ 不成立.

7. 设 $f(x)$ 是对所有实数 x 有定义的连续函数, 且对某个常数 M, 对所有的 x 有 $|f(x)|\leqslant M$.

(a) 通过考虑函数 $v(x,y)=y$ 来证明上半平面 $y\geqslant 0$ 上的 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0\\&\text{B.C.}\quad u(x,0)=f(x),\quad -\infty<x<\infty,\end{aligned}$$

解不唯一.

(b) 定义

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(s)}{(x-s)^2+y^2}ds,$$

证明 (至少是形式上证明)u 在 $y>0$ 上是调和的.(程度高的读者会顾意小心和反复地运用附录 3 中的 Leibniz 法则来正确地进行积分号下求导. 首先考虑 (x,y) 在区域 $-A<x<A$, $0<\epsilon<y<\infty$ 中, 其中 A 和 ϵ 是正常数.)

(c) 对 x-轴上任意一点 $(x_0,0)$, 证明通过取 (x,y)($y>0$) 充分靠近 $(x_0,0)$, 可使 (b) 中的 $u(x,y)$ 任意接近 $f(x_0)$.

提示 先证明当 $f(s)\equiv K$ 时, K 为某个常数, (b) 中的积分恒等于 K. 通过取 K 等于 $f(x_0)$, 推断

$$u(x,y)-f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y[f(s)-f(x_0)]}{(x-s)^2+y^2}ds.$$

把积分区间分成三块, 即 $(-\infty,\ x_0-\delta]$, $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ 和 $[x_0+\delta,\ \infty)$, 然后, 像证明圆盘上的 Poisson 积分公式 (参看第 6.3 节的定理 1) 那样来估计所产生的三个积分的每个积分.

注记 (c) 部分建立了 (a) 中 Dirichlet 问题的解由 (b) 中的公式给出, 该公式称为**上半平面的Poisson积分公式**. □

8. 对 $r<1$ 和 $z=re^{i\theta}$, 令

$$U(r,\theta)=\mathrm{Im}\big[(\frac{1+z}{1-z})^2\big].$$

(a) 验证 $U(r,\theta)$ 对于 $r<1$ 是调和的.

(b) 证明对每个固定的 θ, $\lim_{r\to 1}U(r,\theta)=0$.

(c) 为什么不能应用定理 1 得出 $U(r,\theta)\equiv 0$?

提示 证明

$$u(x,y)=-4y\frac{y^2+(x^2-1)}{[y^2+(x-1)^2]^2}.$$

考虑当 (x,y) 在圆盘内沿直线 $y=x-1$ 趋于 $(1,0)$ 时 $u(x,y)$ 的极限.

9. 设 $q(x,y)$ 是在某个圆盘外恒等于零的 C^2 函数. 本题来证明下面的表示式 (*) 是 Poisson 方程 $u_{xx}+u_{yy}=q(x,y)$ 的解.

(a) 对平面上任意固定的点 (x,y), 令

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[(x-s)^2+(y-s)^2]q(s,t)dsdt. \qquad (*)$$

证明

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[\bar{s}^2+\bar{t}^2]q(x+\bar{s},y+\bar{t})d\bar{s}d\bar{t}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}q(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\ln(r)rdrd\theta\end{aligned} \qquad (**)$$

并利用事实 $\lim_{r\to 0^+}r\ln r=0$(为什么?), 根据 Leibniz 法则推断 $u(x,y)$ 是 C^2 的, 且 u_{xx} 和 u_{yy} 可通过在积分 (**) 下求导计算.

(b) 令 $Q(x,y,r,\theta)=q(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)$. 证明, 对 $r>0$, 有 $Q_{xx}+Q_{yy}=r^{-1}(rQ_r)_r+r^{-2}Q_{\theta\theta}$. 利用这个事实由 (a) 得出 $u_{xx}+u_{yy}=q(x,y)$.

提示 当计算 $[(rQ_r)_r+r^{-1}Q_{\theta\theta}]\ln r$ 的积分时, 利用分部积分求 $(rQ_r)_r\ln r$ 关于 r 的积分, 利用微积分中的基本定理以及关于 θ 的周期性来计算 $r^{-1}Q_{\theta\theta}$ 关于 θ 的积分.

10. 设 D 是有界开集, C 为其边界, 假设每个具连续边界函数的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题有解 (不必是唯一的). 令 $q(x,y)$ 是对所有 (x,y) 有定义的 C^2 函数, 且在某个包含 D 的圆盘之外等于零. 利用习题 9 证明 Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=q(x,y),\quad 于\ D\ 上\\&\text{B.C.}\quad u(x,y)=f(x,y),\quad 于\ C 上\end{aligned}$$

有唯一解, 其中 f 是给定的在 D 的边界 C 上的连续函数. **提示** 参看第 6.1 节的例 3.

11. 设 D 是开集, 令 $a \in D$. 在 a 点**具有对数奇性的 D 的 Green 函数**是 $z = x + iy$ 的实值函数 $g(z;a)$, 使得

(i) $g(z;a)$ 在 $D - \{a\}$ 内是调和的,

(ii) $g(z;a) + \ln|z-a|$ 在以 a 为圆心的圆盘内是调和的,

和

(iii) 对 D 的每个边界点 w, 当 z 在 D 内趋于 w 时, $g(z;a)$ 的极限为 0 (即 $g(z;a)$ 以零值连续地延拓到 D 的边界).

(a) 证明如果一个有界开集 D 有 Green 函数 $g(z;a)$, 则 $g(z;a)$ 是唯一的.

(b) D 和 $g(z;a)$ 如同 (a) 部分, 且 D 是连通的, 证明 $g(z;a)$ 在 D 上是正的.

提示 (a) 考虑 $h(z;a)$ 满足 (i)—(iii), 然后对 $h(z;a) - g(z;a)$ 应用最大值最小值原理. 为什么这个差没有奇性?

(b) 注意到 $\lim_{z\to a} g(z;a) = +\infty$, 然后在 D 去掉一个圆心在 $z = a$ 的任意小的圆盘上, 对 $g(z;a)$ 应用强最大值原理.

12. 设 D 和 C 如同习题 10, 假设 D 有如习题 11 的 Green 函数 $g(z;a)$. 对 $z = x+iy$ 和 $a = s + it$, 令 $G(x,y;s,t) \equiv g(z;a)$. 假设 G_{xx} 和 G_{yy} 连续地延拓到 $\bar{D} \times \bar{D}$, 使得当必要时 Leibniz 法则可施用. 证明习题 10 中在 C 上 $f(x,y) = 0$ 的 Dirichlet 问题的解为

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_D G(x,y;s,t)q(s,t)dsdt, \quad (x,y) \in D.$$

为了验证当 (x,y) 从 D 内趋于 C 上的点时 $u(x,y)$ 趋于 0, 普通的读者可形式地在积分号下取极限. 程度较高的读者可尝试证明这个过程的正确性.

提示 为了证明 $u(x,y)$ 满足 Poisson 方程, 把 $-G(x,y;s,t)$ 写成 $\ln|z-a| - (g(z;a) + \ln|z-a|)$, 把积分分解成两个积分的和, 然后应用习题 9 的结果. 注意到 $\ln|z-a|q(s,t)$ 关于 $dsdt$ 在 D 的外部上的积分是调和的 (为什么?).

13. (a) 验证圆盘 $r < 1$ 上的 Green 函数是

$$g(z;a) = \ln\left|\frac{\bar{a}z - 1}{z-a}\right|, \quad |a| < 1, \quad z = x + iy = re^{i\theta}.$$

(b) 利用 (a) 部分以及习题 11 和 12 来获得, 当 D 是圆盘 $r < 1$ 且边界函数 f 恒等于 0 时, Poisson 方程 Dirichlet 问题 (在习题 10 中) 解的显式积分公式. 如果连续边界函数 f 是任意的, 能做什么?

14. (a) 由直接计算验证单位圆盘的 Poisson 核 $P(r,1,\theta - t)$ 由以下给出

$$P(r,1,\theta-t) = -\frac{\partial}{\partial R}(G(r,\theta;R,t))|_{R=1},$$

其中 $G(r,\theta;R,t) = g(re^{i\theta};Re^{it})$ 是习题 13 单位圆盘上的 Green 函数.

(b) 利用下面单位圆盘上的 Green 公式, 形式推导 (a) 的结果

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1(\triangle V(R,t)U(R,t)-V(R,t)\triangle U(R,t))RdRdt$$
$$=\int_0^{2\pi}(V_R(1,t)U(1,t)-V(1,t)U_R(1,t))dt. \qquad (***)$$

(该公式的推导与引理 1 的证明类似. 只涉及到两个简单的分部积分, 不需要向量分析中一般的 Green 公式.)

提示 令 $U(r,\theta)$ 是 $r<1$ 的调和函数且对 $r\leqslant 1$ 是连续的, 对固定的 (r,θ), 令 $V(R,t)=G(r,\theta;R,t)$. 注意到

$$U(r,\theta)=\triangle\Big(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 G(r,\theta;R,t)U(R,t)RdRdt\Big),$$

其中 $G(r,\theta;R,t)$ 是习题 13 的 $g(z;a)$(为什么?). 现形式地把 $\triangle$ 取在积分下然后应用 $(***)$, 由假设, 注意到 $\triangle U(R,t)=0$. 最后, 得

$$U(r,\theta)=-\int_0^{2\pi}G_R(r,\theta;1,t)U(1,t)dt,$$

其中由 Poisson 核的唯一性 (参看例 4), $-G_R(r,\theta;1,t)=P(r,1,\theta-t)$.

§6.5 复变量理论及其应用

我们已经看到 $(x+iy)^n$, $n=0,1,2,\cdots$ 的实部和虚部是调和的 (参看第 6.1 节的习题 5(d), 或利用第 6.3 节中的 De Moivre 公式). 容易验证 $e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y$ 的实部和虚部也是调和的. 更一般地, 假设有一个复变量 $z=x+iy$ 的函数 $f(z)$. 正如我们稍后将看到的, 确保 $f(z)$ 的实部和虚部在开集 D 上是调和的一个关键性质是: 对 D 中的每点 $z=x+iy$ (即 $(x,y)\in D$), 在如下极限存在的意义下 $f(z)$ **关于 z 是可导的**

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}, \qquad (1)$$

不论复数 h 是怎样趋于 0. 例如, z^2 的导数等于 $2z$, 因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hz+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2z+h)=2z.$$

一个函数 $f(z)$ 称为在开集 D 上是**复解析的**(或简单地称为**解析的或全纯的**), 如果对 D 中所有的点 z, $f'(z)$ 存在. 如果 $f(z)$ 在整个复平面上是解析的, 则称 $f(z)$ 是**整函数**. 整函数的例子包括多项式 $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, 其中系数 a_i 是常数 (可以是复数), 以及 e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, 这些函数能用 z 的幂级数来定义. 函数 z^{-1} 不是整函数, 因为它的导数 $-z^{-2}$ 在 $z=0$ 处不存在, 但它在挖去一点的平面 $\{z:\ z \neq 0\}$ 上是全纯的. 下面的命题揭示了解析函数和调和函数之间的关系.

命题 1 (Cauchy-Riemann 方程) 如果

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

在开集 D 上是解析的, 则 f 的实部和虚部 (分别为 u 和 v) 在 D 内服从 Cauchy-Riemann 方程:

$$u_x = v_y \quad 和 \quad u_y = -v_x. \tag{2}$$

除此之外, 如果还有 u 和 v 在 D 上是 C^2 的, 则它们在 D 上是调和的, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

证明 如果在 (1) 中取 h 为实数, 则得 (对 D 中的 z)

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - [u(x,y) + iv(x,y)]}{h} = u_x + iv_x. \tag{2'}$$

如果取 h 为复数 ik, 其中 k 是实数, 则

$$f'(z) = \lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k) + iv(x,y+k) - [u(x,y) + iv(x,y)]}{ik} = v_y - iu_y.$$

在这两个关于 $f'(z)$ 的表示式中对应的实部和虚部相等, 得到 Cauchy-Riemann 方程. 如果 u 和 v 是 C^2 的, 则利用 Cauchy-Riemann 方程, 得 $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ 和 $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$, 于是, u 和 v 在 D 上是调和的. □

注记 已经证明一个解析函数的实部和虚部是 C^∞ 的. 因此, u 和 v 是 C^2 的假设实际上是不必要的, 但上述的证明需要这个假设. 反过来, 如果 u 和 v 是 C^1 函数且满足 Cauchy-Riemann 方程, 则可证明 $f(z) = u + iv$ 是解析的 (参看 Rudin, 1987). □

如果 $u+iv$ 是解析的, 则称调和函数 v 是调和函数 u 的**调和共轭**. 例如, 由于 $z^2=x^2-y^2+i2xy$ 是解析的, 函数 $2xy$ 是 x^2-y^2 的调和共轭. 由于根据 Cauchy-Riemann 方程, v 的偏导数由 u 确定, 所以如果 u 有两个调和共轭, 则它们必相差一个常数. 如果 u 在一个开矩形集合 R 上调和, 则存在函数 v, 使得 $u+iv$ 在 R 内是解析的 (即, u 在 R 内有调和共轭 v). 该事实是下述命题的一个结论, 后面有关流体流问题我们也将用到该命题. 于是, 在 R 上的任一调和函数 u 是某个解析函数 $u+iv$ 的实部. 由于 $-v+iu=i(u+iv)$ 也是解析的, 所以可知 u 也是 R 上某个解析函数的虚部. 注意到, 如果 v 是 u 的调和共轭, 则 $-u$(负 u) 是 v 的调和共轭, 因为 $v-iu=-i(u+iv)$ 是解析的. 因此, 严格说来不应该像通常所说的那样 (事实上, 几乎总是这样说), 把 u 和 v 称为是互为调和共轭的.

命题 2 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是在开矩形集合 R(可能有一边或多边具无穷长度, 使得 R 可以是带形) 上的 C^1 函数. 则在 R 上存在 C^2 函数 $f(x,y)$, 使得

$$f_x(x,y)=P(x,y) \quad 和 \quad f_y(x,y)=Q(x,y), \tag{3}$$

成立的充要条件是: 在 R 上可积性条件 $P_y=Q_x$ 成立.

证明 如果 f 满足 (3), 则 $P_y=f_{xy}=f_{yx}=Q_x$. 反过来, 假设在 R 上 $P_y=Q_x$, 构造满足 (3) 的 f 如下. 令 (a,b) 是 R 中的点, 设 H 是 R 上任一满足 $H_x=P$ 的 C^2 函数 (例如, $H(x,y)=\int_a^x P(s,y)ds$). 类似地, 设 $K(x,y)$ 是 R 上的 C^2 函数, 使得在 R 上 $K_y=Q$. 则置 $u(x,y)=H(x,y)-K(x,y)$ 并注意到 $u_{xy}=H_{xy}-K_{yx}=P_y-Q_x=0$. 因此, u 满足偏微 $u_{xy}=0$, 该偏微在 R 上具有形式 $u(x,y)=k(x)-h(y)$ 的通解, 其中 h 和 k 是 C^2 函数 (参看第 1.3 节). 于是, $H(x,y)-K(x,y)=u(x,y)=k(x)-h(y)$. 由下式定义 f

$$f(x,y)=H(x,y)+h(y) \qquad 或 \qquad f(x,y)=K(x,y)+k(x).$$

由于两个右端相等, 所以用哪个式子没关系. 由第一个式子, 得 $f_x=H_x=P$, 由第二个式子, 得 $f_y=K_y=Q$. □

命题 3 定义在开矩形区域 R 上的任一调和函数 u, 有定义在 R 上的调和共轭 v.

证明 根据命题 2 前的注记, 我们只需证明对给定的调和函数 u, 能求解 Cauchy-Riemann 方程 $v_x = -u_y$ 和 $v_y = u_x$. 对 $P = -u_y$ 和 $Q = u_x$ 应用命题 2. 由于 u 是调和的, 所以有可积性条件 $P_y = -u_{yy} = u_{xx} = Q_x$, 于是 v 存在. □

注记 我们一般定义一个**区域**是平面的非空开子集或者含有它的某些边界点, 或者不含它的边界点或者含有它的所有边界点. 可以证明, 如果用一个没有 "洞" 的开区域(即, 外部是连通的任一开区域)代替矩形, 命题 2 和命题 3 仍然为真. 平面中的这种区域称为是**单连通的**. 下面的例 3 表明这个假设是必要的. □

例 1 求定义在整个平面上的调和函数

$$u(x, y) = \sin x \cosh y + y$$

的调和共轭.

解 如在命题 2 的证明的做法, 对方程 $v_y = u_x = \cos x \cosh y$ 关于 y 积分, 对 $v_x = -u_y = -\sin x \sinh y - 1$ 关于 x 积分. 则 $v(x, y) = \cos x \sinh y + h(x)$ 和 $v(x, y) = \cos x \sinh y - x + k(y)$, 其中 h 和 k 是任意 C^1 函数. 比较这两个 $v(x, y)$ 的表示式, 得 $h(x) = -x + c$ 和 $k(y) = c$, 其中 c 是任意实数. 因此, $v(x, y) = \cos x \sinh y - x + c$ 是 u 的调和共轭. 相应的调和函数是

$$f(z) = u + iv = [\sin x \cosh y + y] + i[\cos x \sinh y - x + c],$$

这其实是 $\sin z - iz + ic$(参看习题 1). □

例 2 证明如果 v 是调和函数 u 的调和共轭, 则在任意点, 梯度 ∇u 和 ∇v 是等长的且是正交的. 推断在 $\nabla u \neq 0$ 的点, u 和 v 的水平曲线是正交的.

解 对解析函数 $f = u + iv$ 应用 Cauchy-Riemann 方程, 有 $|\nabla u|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2 = (v_y)^2 + (-v_x)^2 = |\nabla v|^2$, 由此, u 和 v 的梯度具有相同的长度. 还注意到 $f'(z) = u_x + iv_x$(参看 (2')) 的长度 $|f('z)|$ 与这些梯度有同样的长度. 这两个梯度的点积是 $u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x - v_x v_y = 0$. 因此, 这些梯度是正交的. 回忆起函数在一点的梯度与过这点的水平曲线正交, 如果该梯度是非零的话. 因此, u 和 v 过点 z 的水平曲线是正交的, 其中 $f'(z) \neq 0$, 因为 u 和 v 的梯度是正交的. □

例 3 证明在挖去一点的平面 $(r > 0)$ 上调和的函数 $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ 或 $U(r, \theta) = \ln r$ 没有定义在该挖去一点的平面上的调和共轭. 然而, 如果从该挖去一点的平面上剔除负 x-轴, 则在该撕开的平面 (它是单连通的; 参看命题 3

后面的注记) 上存在唯一的 u 的调和共轭 v, 使得 v 在正 x–轴上等于零. 证明在该撕开的平面上, 解析函数 $f=u+iv$ 是指数函数 e^z 的反函数 (即, $f(z)$ 可视为对数函数).

解 由于 $u=\ln r$ 的水平曲线是圆心在极点的圆周, 所以由例 3 得知 u 的调和共轭 v 的水平曲线必是从原点发出的射线.(注意到 u 的梯度不为零, 因此所有水平曲线确实是曲线, 且 v 不会是常数.) 反过来, $V(r,\theta)$ 必具有形式 $h(\theta)$. 然而, 这种形式的唯一的调和函数是函数 $V(r,\theta)=a\theta+b$(参看第 6.3 节的习题 2). 由于 v 不是常数, 所以有 $a\neq 0$. 因此, $V(r,\theta+2\pi)\neq V(r,\theta)$, 于是 v 在整个挖去一点的平面上不可能是连续的. 在撕开的平面上假设 v 在正 x–轴 (即, 当 $\theta=0$ 时) 上是 0, 得 $b=0$ 和 $V(r,\theta)=a\theta$. 由于 $u_x(1,0)=1$ 和 $v_y(1,0)=a$, 所以由 Cauchy-Riemann 方程 $u_x=v_y$, 必有 $a=1$. 因此, $V(r,\theta)=\theta,\ -\pi<\theta<\pi$, 且

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\ln r+i\theta,\quad r>0,\quad -\pi<\theta<\pi.$$

注意到 $\exp[f(z)]=\exp[\ln r+i\theta]=\exp[\ln r](\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}=z$, 因此 f 是 exp 在该撕开平面上唯一的逆, 它在正 x–轴上是实数. 如果对 $f(z)$ 加上 $2\pi i$ 的整数倍, 得到 exp 的其他逆, 这些逆在正 x–轴上不是实数. 由于这个缘故, $f(z)$ 称为**多值对数函数的主支**, 且 $f(z)$ 记作 $\ln z$. □

共形映照

复变量 z 的复值函数 $f(z)$ 把 $f(z)$ 的定义域内的每一复数 $z=x+iy$ 赋予一个新复数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. 换言之, f 把 z–平面 (或 xy–平面) 上的点投射 (或映照) 到 w–平面 (或 uv–平面) 上的点. z–平面中的一个区域可由 $f(z)$ 映射成 w–平面中的不同形状的区域. 就如我们即将要证明的, 如果 $f(z)$ 是解析的, 在 z–平面的一个圆盘遭受的变形程度 (当它经 $f(z)$ 映照到 w–平面) 随着圆盘变小而减少, 只要 $f'(z)$ 在圆心 z_0 不为零. 虽然圆心在 z_0 的小圆盘的圆形形状几乎是保留的, 但映像将放大大约 $|f'(z_0)|$ 因子. 由于这个缘故, 由一解析函数确定的映照, 当 $f'(z)$ 不为零时, 称为是**共形映照**(即, 局部保持形状, 但不必保持大小). 我们暂且说到这里, 通过下面的例子来说明前述的思想.

例 4 证明解析函数 $f(z)=z^2$ 把楔形 $0\leqslant r\leqslant 3,\ 0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 映成楔形 $0\leqslant r\leqslant 9,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\alpha$.

解 函数 $f(z)=z^2$ 把点 (x,y) 映成 $(x^2-y^2,2xy)$, 而利用极坐标, 几何上很容易看出这个映照. 的确, 由 De Moivre 公式, 有 $f(re^{i\theta})=r^2e^{i2\theta}$, 这表明, 极坐

标为 (r,θ) 的点映成极坐标为 $(r^2,2\theta)$ 的点 (即, 极角加倍且到极点的距离平方). 特别, 扇形 $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 内的任一点映入扇形 $0\leqslant\theta\leqslant 2\alpha$, 边界弧 $r=3$, $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 上的点映到弧 $r=9$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\alpha$ (参看图 1). □

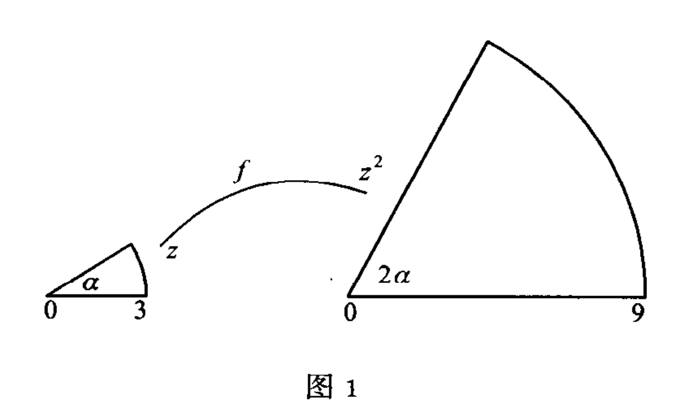


图 1

例 5 假设 $f(z)$ 是解析函数, 且 $f'(z_0)=Me^{i\tau}\neq 0$. 当 θ 变化时, 点 $z_0+re^{i\theta}$ $(r>0)$ 绘出半径为 τ 圆心为 z_0 的圆周 C. 证明对小的 r, 圆周 C 几乎被 f 映成半径为 $M=|f'(z_0)|r$ 圆心为 $f(z_0)$ 的圆周, 且 C 旋转了 τ 弧度.

解 由 $f'(z)$ 的定义 (1), 得知对小的 $|h|$, $f(z_0+h)-f(z_0)\approx f'(z_0)h$. 对小的 r, 取 $h=re^{i\theta}$, 则得

$$f(z_0+re^{i\theta})\approx f(z_0)+(Me^{i\tau})re^{i\theta}=f(z_0)+Mre^{i(\theta+\tau)}.$$

因此, 随着 θ 的变化, 可看出圆周 C 几乎被映成圆心在 $f(z_0)$ 半径为 Mr 的圆周, 且该圆周旋转了 τ 弧度的角度, 因为对应于 θ 的 C 上的点几乎被映成映像曲线上具角度 $\theta+\tau$ 的点. 注意到 C 的一弧段的中心角经该映照几乎是保持的, 这表明共形映照保角. $f'(z)$ 存在的事实在证明中是关键的. 例如, 函数 $g(x+iy)=2x+iy$ 不是解析的. 的确, $g'(z)$ 不存在, 因为 Cauchy-Riemann 方程 $u_x=v_y$ 不成立. g 不是把小圆周几乎映成小圆周, 而是把圆周映成宽是高的两倍的椭圆. 还有, 需要知道 $f'(z_0)\neq 0$. 例如在例 4 中, 其中 $f(z)=z^2$ 和 $f'(0)=0$,$z_0=0$ 的角度没有保持, 而是加倍了. □

解析函数 $f(z)$ 或共形映照的关键性质之一是, 它们能在下述命题 4 的意义下, 把 w–平面中的区域 E 上的调和函数变换成 E 在 z–平面的原像 D 上的调和函数, 这种性质使得解析函数很有用. 特别, 如果能解出在熟悉的区域 E(比如圆盘或矩形) 上的 Dirichlet 问题, 就能利用 f 来解不熟悉区域 D 上的 Dirichlet 问题, 只要如此选取 f, 使得它把 D 共形地映到 E 上. 然而, 求这样的 f 的显

式表达式是困难的, 即使有共形映照的表或书.

命题 4 如果 $h(u,v)$ 是 uv–平面 (即 w–平面, $w=u+iv$) 中开集 E 上的调和函数, 如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是 xy–平面中开集 D 上的解析函数, 它把 D 映入 E, 则 $g(x,y)\equiv h(u(x,y),v(x,y))$ 定义了 D 上的调和函数 $g(x,y)$.

证明 利用链法则, $g_x=h_uu_x+h_vv_x$ 和 $g_{xx}=h_{uu}(u_x)^2+2h_{uv}u_xv_x+h_{vv}(v_x)^2$, 对 g_{yy} 有类似的表示式. 因此, 利用例 2 的解答, 得

$$g_{xx}+g_{yy}=|\nabla u|^2h_{uu}+2\nabla u\cdot\nabla vh_{uv}+|\nabla v|^2h_{vv}=|f'(z)|^2(h_{uu}+h_{vv}).$$

于是, 如果 h 在 E 上是调和的, 则 g 在 D 上是调和的. □

接下来两个例子说明, 这种方法怎样通过把一个区域共形映照成一个更熟悉的区域 (参看命题 4 前的段落), 来求解该区域上 Laplace 方程的边值问题.

例 6 考虑一块导热板 D, 它是第一象限去掉四分之一圆盘 $r<1,\ 0<\theta<\pi/2$, 如图 2 所示. 假设圆弧是绝热的, 边 $y=0\ (x>1)$ 保持温度 0, 而剩下的边 $x=0\ (y>1)$ 保持温度 100. 通过由解析函数 $f(z)=\ln z=\ln r+i\theta=u+iv=w$(参看例 3) 把 D 共形映照成带形来求该板内稳态温度.

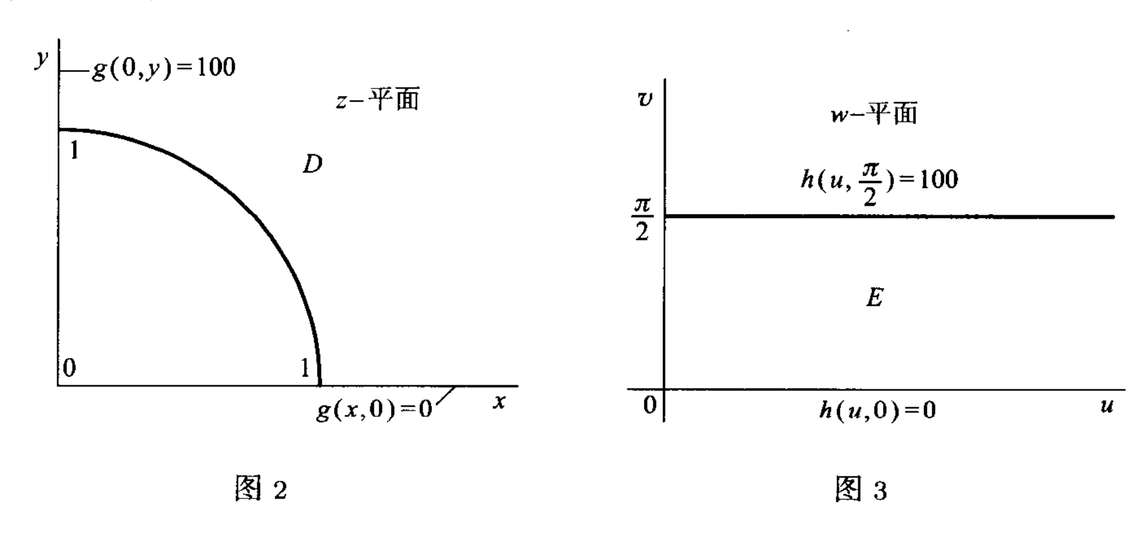


图 2 图 3

解 区域 D 由 $r>1$ 和 $0<\theta<\pi/2$ 定义. 由于 $u=\ln r$ 和 $v=\theta$, 所以在共形映照 f 下, D 的映像, 记作 E, 由 $u>0$ 和 $0<v<\pi/2$ 定义, 这是 uv–平面 (或 w–平面) 中的一个带形 (参看图 3). 在 E 上对应的边界条件也在图 3 中标出.

经检验可见 $h(u,v)=200v/\pi$ 是在 E 上满足问题的调和函数. 因此, 用极坐标表示, 原问题的解是 $G(r,\theta)=h(U(r,\theta),V(r,\theta))=h(\ln r,\theta)=200\theta/\pi$, 或用 x 和 y 表示, 有

$$g(x,y)=h(u(x,y),v(x,y))=h\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=\frac{200}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}. \quad \square$$

例 7 令 R 是正常数, 定义 $F(z)=R^2z^{-1}$, $z\neq 0$. 证明 F 把圆周 $r=R$ 的外部 $r>R$ 映到该圆周的内部去掉极点 (即, 映到挖去一点的圆盘 $0<r<R$). 利用 F 解以下**外部 Dirichlet 问题**

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2>R^2\\&\text{B.C.}\quad U(R,\theta)=f(\theta),^{①}\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数.

解 用极坐标, $F(re^{i\theta})=R^2(re^{i\theta})^{-1}=R^2r^{-1}e^{-i\theta}$. 换言之, F 把点 (r,θ) 映成 $(R^2/r,-\theta)$. 如果 $r\geqslant R$, 则 $R^2/r\leqslant R$. 因此, F 把圆周 $r=R$ 的外部映到该圆周的内部. 还注意到圆周上的点 (R,θ) 映成 $(R,-\theta)$. 现由关于边界函数 $f(-\theta)$ 的 Poisson 积分公式, 得 $r<R$ 的 Dirichlet 问题的一个解 $H(r,\theta)[=h(re^{i\theta})]$, 即

$$H(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,R,\theta-t)f(-t)dt.$$

然后利用共形映照 F 得到所给问题 (4) 的一个解 $g(re^{i\theta})\equiv h(F(re^{i\theta}))=h(R^2r^{-1}e^{-i\theta})=H(R^2/r,-\theta)$, 即

$$\begin{aligned}G(r,\theta)&=H\left(\frac{R^2}{r},-\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\left(\frac{R^2}{r},R,-\theta-t\right)f(-t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\left(\frac{R^2}{r},R,t-\theta\right)f(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(R^2-\frac{R^4}{r^2})f(t)}{\frac{R^4}{r^2}-2\frac{R^2}{r}\cos(\theta-t)+R^2}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(r^2-R^2)f(t)}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}dt.\end{aligned}\tag{5}$$

注意到问题 (4) 有许多其他的解, 因为总可以添加调和函数 $[(r/R)^n-(R/r)^n]\sin(n\theta)$ (或用 $\cos(n\theta)$), $n=1,2,\cdots$ 的线性组合, 这些线性组合在圆

①原文误为 $U(r,\theta)=f(\theta)$.——译者

周 $r=R$ 上为零. 这与唯一性定理 (第 6.4 节的定理 2) 不矛盾, 因为圆周的外部区域不是有界开集. 可以证明 (5) 是唯一的以下述意义下有界的解, 存在常数 M, 使得对所有 (r,θ), $r\geqslant 1$, $|G(r,\theta)|\leqslant M$(参看习题 6). □

流体流, 静电学和热理论中的共形映照

假设流体流在时刻 t 位于点 (x,y,z) 的速度具有形式 $\mathbf{v}=v_1(x,y)\mathbf{i}+v_2(x,y)\mathbf{j}$ (即, 假设速度实际上与 z 和 t 无关). 这样的速度向量场称为用来描述**稳态二维流体流**. 自此我们假设 v_1 和 v_2 是 C^1 的. 如果流体是 "不可压缩的", 则流体流出任一矩形 $(a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d)$ 的净流量必为 0. 则

$$\begin{aligned}0&=\int_c^d v_1(b,y)dy-\int_c^d v_1(a,y)dy+\int_a^b v_2(x,d)dx-\int_a^b v_2(x,c)dx\\&=\int_c^d\int_a^b (v_1)_x dxdy+\int_a^b\int_c^d (v_2)_y dydx=\int_c^d\int_a^b[(v_1)_x+(v_2)_y]dxdy,\end{aligned}$$

其中我们已经用了微积分的基本定理. 由于矩形是任意的, 故有 $(v_1)_x+(v_2)_y=0$. 如果这个方程对所有的速度场 $\mathbf{v}$ 成立, 则该流体称为是**不可压缩的**. 数量 $(v_1)_x+(v_2)_y$ 称为是向量场 $\mathbf{v}$ 的**散度**. 因此, 流体是不可压缩的当且仅当它的速度场是散度自由的.

如果一条鱼沿上述矩形的边界以反时针游动整个一圈, 鱼从流场中获得的净借助的量为

$$\begin{aligned}&\int_a^b v_1(x,c)dx+\int_c^d v_2(b,y)dy-\int_a^b v_1(x,d)dx-\int_c^d v_2(a,y)dy\\&\qquad=\int_c^d\int_a^b[(v_2)_x-(v_1)_y]dxdy.\end{aligned}$$

这个量称为流体流围绕矩形回路的**环流量**. 如果围绕任意矩形回路的环流量是

0, 则该计算表明必有 $(v_2)_x - (v_1)_y = 0$. 这时称流体流是**无旋的**.

命题 5 设 $\mathbf{v}(x,y) = v_1(x,y)\mathbf{i} + v_2(x,y)\mathbf{j}$ 是一不可压缩流体的无旋流体流的 C^1 速度向量场. 假设 $\mathbf{v}(x,y)$ 是定义在单连通 (参看命题 3 后面的注记) 开区域 R 上. 则在 R 上存在 C^2 函数 $\Phi(x,y)$ 和 $\Omega(x,y)$, 使得

$$\Phi_x = v_1 \quad 和 \quad \Phi_y = v_2, \tag{6}$$

和

$$\Omega_x = -v_2 \qquad 和 \qquad \Omega_y = v_1. \tag{7}$$

证明 由命题 2 以及命题 3 后的注记,Φ 和 Ω 存在. 关于 (6) 的可积性条件是无旋条件 $(v_2)_x - (v_1)_y = 0$, 而关于 (7) 的可积性条件是不可压缩条件 $(v_1)_x - (-(v_2)_y) = 0$. □

函数 Φ 称为流体流的**速度位势**, 因为 $\nabla\Phi = \mathbf{v}$. 函数 Ω 称为**流线函数**, 因为水平曲线 $\Omega =$ 常数 是流线.(易见 Ω 的梯度与 $\mathbf{v}$ 正交, 所以 $\mathbf{v}$ 必与 Ω 的水平曲线相切.) 注意到 (6) 和 (7) 意味着 Φ 和 Ω 满足 Cauchy-Riemann 方程, 即 $\Phi_x = \Omega_y$ 和 $\Phi_y = -\Omega_x$. 于是, 有解析函数

$$f(z) = f(x+iy) = \Phi(x,y) + i\Omega(x,y), \tag{8}$$

此称为流体流的**复速度位势**. 由命题 1,

$$f'(z) = \Phi_x + i\Omega_x = v_1 - iv_2, \tag{9}$$

因此

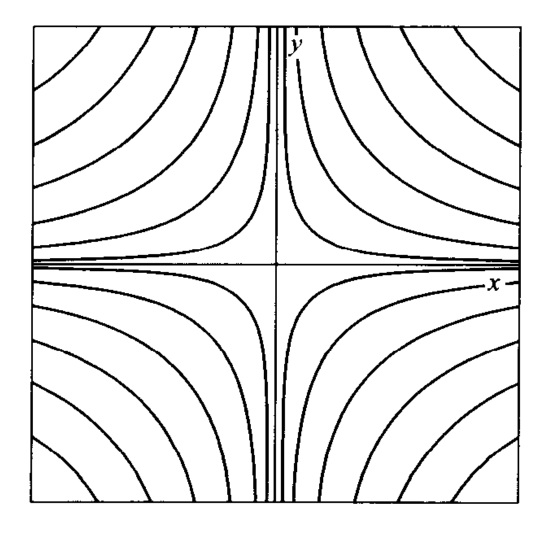
$$|f'(z)| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{10}$$

换言之, $f'(z)$ 的共轭是在点 (x,y) 或 $x+iy$ 的速度向量场 (看作复数), $f'(z)$ 的长度是流体流在该点的速度. 反过来, 任给一解析函数 $f(z)$, 由 (9) 定义的函数 v_1 和 v_2 将是一不可压缩流体的无旋流的速度向量场的分量. 的确, 由 Cauchy-Riemann 方程, Φ 和 Ω 是方程组 (6) 和 (7) 的解, 由此根据命题 2, 不可压缩性和无旋性相容性条件必满足.

在下面的例子中, 我们验证一些解析函数以及由 (9) 定义产生的流体流. 由于 Ω 是调和的 (由命题 1), 所以也可以把 Ω 看作一个不带电荷的区域内的静电位势, 在这种情形, 曲线 $\Omega=$ 常数 是等位势曲线. 则曲线 $\Omega=$ 常数 是带电荷粒子移动的势力线, 因为电场与 $\nabla\Omega$ 成比例, 且 $\nabla\Omega$ 与曲线 $\Phi=$ 常数 相切.(从例 2 中回忆到, 由于 Ω 是 Φ 的一个调和共轭, 所以当 $f'(z)\neq 0$ 时 Φ 的水平曲线和 Ω 是正交的.) 如果把 Ω 看作一个稳态温度分布, 则 Ω 的水平曲线是常数温度曲线 (即**等温线**), 温度梯度 $\nabla\Omega$ 与 Φ 的水平曲线相切, 它可看作热流曲线. 因此, 我们看到任意一个解析函数同时提供了至少三个不同背景的多个问题的解.

例 8 令 $f(z)=z^2$. 画出 f 的实部和虚部水平曲线的草图并对这些曲线给出某些物理解释.

解 因 $f(z)=(x^2-y^2)+i2xy$, 所以 $\Phi(x,y)=\mathrm{Re}(f(z))=x^2-y^2$ 和 $\Omega(x,y)=\mathrm{Im}f(z)=2xy$. 在流体力学中, 与 f 相应的流体流的流线 (参看图 4) 是双曲线 $2xy=$ 常数.(即, 流线函数 Ω 的水平曲线). 在点 (x,y) 处的流体速度是速度位势 Φ 的梯度, 即 $\mathbf{v}(x,y)=2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}$, 且流体的速度为 $2r$, 其中 r 是到原点的距离. 注意到流线 $2xy=0$ 由相交的曲线 (即, 坐标轴) 组成. 在交点该流线不再是 "正则" 曲线. 一般, 在这样的点, 流体流的速度必为 0 (或 $f'(z)=0$). 的确, 隐函数定理确保水平曲线 $\Omega=$ 常数 在 $\nabla\Omega\neq 0$ 的点处是正则的. 利用例 2, 在流线的 "非正则" 点 z, 则必有 $0=|\nabla\Omega|=|f'(z)|$. 速度为零的点称为**滞点**. 于是知道流线上非正则点必是滞点. 我们可以以两股河流当它们分别从 x–轴的上方和下方向 x–轴迎面会拢的结果来解释该图. 把注意力局限在第一象限 $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$,



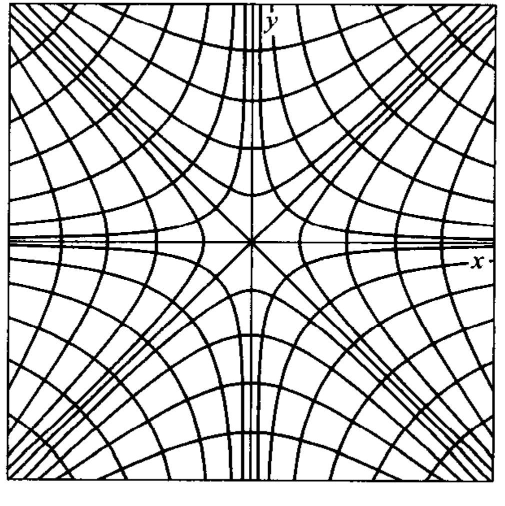


图 4

我们也可把该流看作是流体流线在平稳下来成为稳态流之后, 遇到壁角时流线变更的结果. 把图延拓到书页之外并把注意力局限在原点的一个小的邻域内, 流线也可看作一个静电位势的等位势曲面, 该静电位势由两条远隔的在 (a,a) 和 $(-a,-a)$ 与书页垂直的带正电荷的直线以及在 $(a,-a)$ 和 $(-a,a)$ 的两条带负电荷的直线产生, 这里 a 是大数. 用静电学的术语, 该位势是由在无穷远处的正方电极产生的. 如果我们把带正电荷的直线看作热源, 把带负电荷的直线看作散热系统, 等位势曲面是等温面. □

例 9 对 $r>0$ 和 $-\pi<\theta<\pi$, 令 $f(z)=\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}(re^{i\theta})=\ln r+i\theta$(即 f 是 $\ln z$ 的主支, 参看例 3). 如在例 8 中所做的, 分析和解释该函数. 另外, 考虑相关的函数 $i\mathrm{Ln}z=-\theta+i\ln r$.

解 这时对应于 $f(z)$ 的流体流的流线是射线 $\theta=$ 常数(参看图 5). 速度位势 $\ln r$ 的梯度为 $r^{-1}\mathbf{e}_r$, 其中 $\mathbf{e}_r$ 是单位径向向量场. 因此, 该流体是由在极点的源发出的, 且随着远离极点而慢下来. 我们可把流线函数 θ 看作当两张平行的带相反电荷的半平面 ($x\leqslant 0$, $y=\pm\epsilon$, 延伸到书页外) 沿着负 x–轴 (参看图 5) 靠拢时 (即, 当 $\epsilon\to 0$ 时) 产生的静电位势. 如果把这两张半平面温度保持在 $-\pi$ 和 π 的热物体和冷物体, 则射线 $\theta=$ 常数 是由此产生的稳态温度分布的等温线. 现在来考虑相关的函数 $i\mathrm{Ln}z=-\theta+i\ln r$. 这时流线是圆周 $\ln r=$ 常数, 而速度是 $-\theta$ 的梯度, 等于 $-r^{-1}\mathbf{e}_\theta$, 因此流体流是顺时针的, 且随着 r 的增加速度减少. 静电位势 $\ln r$ 是一与书页垂直的, 无限长的均匀带电的金属丝的位势(参看第 6.1 节的例 1). 如果把该金属丝看作很冷的物体, 则 $\ln r$ 可认为是以圆周为等温线的稳态温度分布. 显然, 在无穷远处有个热源. □

例 10 如在例 8 和例 9 中相同的方式, 给出函数 $f(z)=V_0(z+R^2z^{-1})$ 的解释, 其中 V_0 和 R 是正常数且 $z\neq 0$.

解 对大的 $|z|$, 有 $f(z)\approx V_0z=V_0(x+iy)$. 因此, 相应的流体流的速度在远离极点处几乎等于 $V_0\mathbf{i}$. 用极坐标表示, 有

$$f(z)=f(re^{i\theta})=V_0\big(re^{i\theta}+\frac{R^2}{r}e^{-i\theta}\big)=V_0\big(r+\frac{R^2}{r}\big)\cos\theta+iV_0\big(r-\frac{R^2}{r}\big)\sin\theta. \quad (11)$$

注意到流线函数 $V_0(r-R^2/r)\sin\theta$ 在圆周 $r=R$ 上等于 0, 而且在 x–轴 (除了 $x=0$) 上也等于 0. 注意到该流线在 $z=\pm R$ 处是自相交的. 由例 8 的讨论, 我们推断这些自相交的点是滞点, 在其上流体速度必为零. 做一些工作, 读者可在圆周的外面草画出足够多其他的流线来推断函数 $f(z)$ 代表围绕圆形 (或圆柱体) 障碍物的稳流体流 (参看图 6) . 在静电学中, 这些流线是等位势曲线, 它是

由当一个圆柱形导体被放置在指向 y 方向的均匀电场时所产生的. 我们注意到, 在一个导体的表面, 电子是以消除电场的任何切向分量的方式排列的 (即, 静电场是导体的法线, 因此它是等位势曲面).

假设一保持 0 度的圆盘被放置在一块大的导热板内, 该导热板在 y 方向有均匀的温度梯度. 由此导致的稳态温度分布的等温线就如图 6 中的流线. □

注记 在上述例子中, 我们在本质上已经确定了一个由给定的解析函数所解释的问题. 要确定得到所给问题的解答的解析函数将会困难得多. 有出版的共形映照的目录(例如, H. Kober, *Dictionary of conformal representations*, Dover Publications, Inc.,1957.)或许会有帮助. □

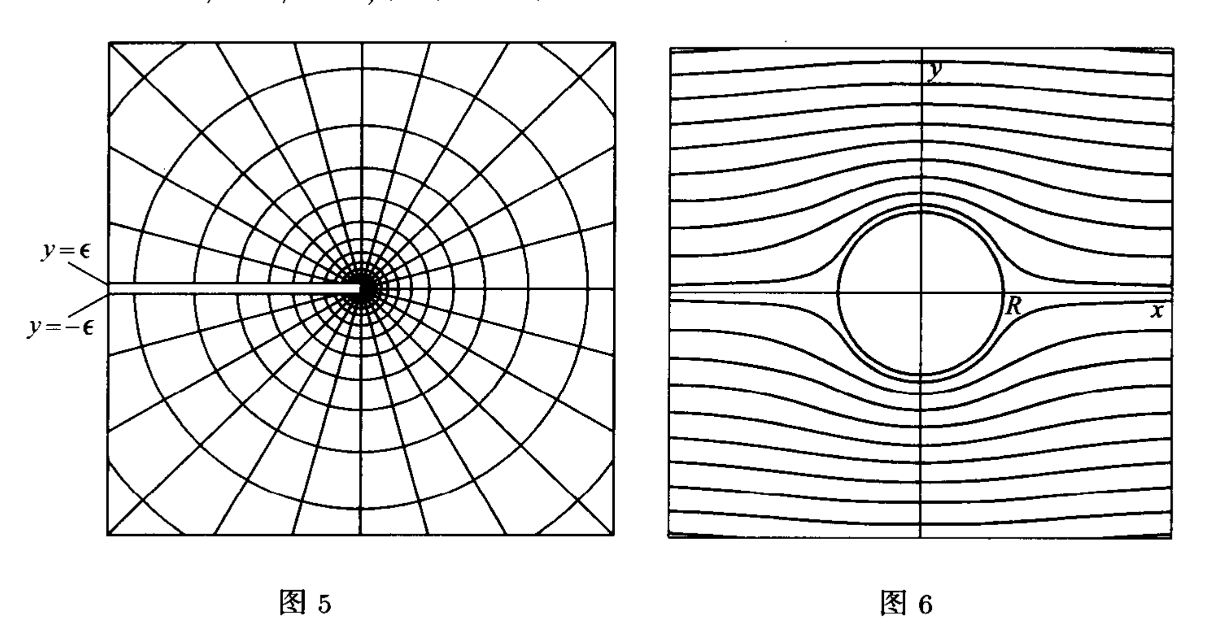


图 5　　图 6

概要 6.5

1. 复解析函数: 令 $f(z)$ 是平面中开集 D 中的复变量 $z=x+iy$ 的复值函数. $f(z)$ 关于 z 的导数是极限

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

(如果极限存在) 不管复数 h 是怎样趋于 0. 如果 $f'(z)$ 对 D 中所有的 z 存在, 则称函数 $f(z)$ 在 D 上是**复解析的** (或简称**解析的**或**全纯的**). 如果 $f(z)$ 是在整个复平面上解析, 则称 $f(z)$ 是**整函数**.

2. Cauchy-Riemann 方程 (命题 1): 如果 $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在开集 D 上是解析的, 则 f 的实部和虚部 (u 和 v) 服从 **Cauchy-Riemann方程**

$$u_x = v_y \quad \text{和} \quad u_y = -v_x. \tag{S1}$$

如果 u 和 v 在 D 上还是 C^2, 则它们在 D 上是调和的. 反过来, 如果 u 和 v 是 C^1 的且在 D 上满足 Cauchy-Riemann 方程, 则 $f = u + iv$ 在 D 上是解析的.

3. 调和共轭: 令 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是定义在某个开集 D 上的函数. 如果 $u + iv$ 在 D 上是解析的 (即, 如果 u 和 v 是 C^1 的, 且服从 Cauchy-Riemann 方程 (S1), 则 v 是 u 在 D 上的**调和共轭**. u 的任意两个调和共轭相差一个常数. 命题 3 表明定义在矩形区域 R 上的任一调和函数 u 在 R 上有调和共轭. 这对单连通区域 R(即, 没有洞) 仍然是成立的, 但例 3 表明定义在挖去一点的平面 (即, 在 $(0, 0)$ 处有洞) 上的调和函数 $\ln r$, 在该挖去一点的平面上没有调和共轭. 如果 u 和 v 是调和共轭, 则水平曲线 $u =$ 常数 和水平曲线 $v =$ 常数 在任一它们梯度的公共长度不为零的点处垂直相交 (参看例 2). 在二维的应用中, 这些曲线描述为 (取决于背景) 静电等位势曲线, 稳态温度分布的等温线, 不可压缩无旋流体流的流线, 等等.(参看例 8, 例 9, 和例 10).

4. 共形映照: 一个解析函数 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 可看作一个变换, 它把 xy–平面 (或复 z–平面) 的某个区域 D 中的点映入 uv–平面 (或复 w–平面; $w = u + iv$) 中的某个区域 E 内的点. 如果对 D 中所有的 z, $f'(z) \neq 0$, 则 $f(z)$ 称为是**共形映照**, 因为它具有保持角度和小形状性质, 虽然局部有大约 $|f'(z)|$ 的放大倍数 (参看例 5). 命题 4 表明从 D 到 E 的共形映照可用来把 w–平面中 E 上的调和函数传递到 z–平面中的区域 D 上. 这在解不熟悉区域上的 Dirichlet 问题中是有帮助的, 如果映像区域是熟悉的 (参看例 6 和例 7). 如果想求一个在某条曲线 (例如, 等温线, 流线, 等等) 上等于常数的调和函数, 则一个把该曲线变成垂直 (或水平) 直线的共形映照的实 (或虚) 部就是这样的函数. 每个解析函数解答了某个 (可能是很有兴趣的) 问题, 但求出适当的函数用来解答一个给定的 (甚至是简单的) 问题不总是那么容易.

练习 6.5

1. (a) 对复数 $z = x + iy$, 利用幂级数定义 $\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! + \cdots$ 和 Euler 公式 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ 来推导 $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.
(b) 通过验证对 (a) 部分的实部和虚部 Cauchy-Riemann 方程成立来证明 $\sin z$ 是解析函数.

2. 例 3 中的论证方法表明, 定义在挖去一点平面上的调和函数 $\ln r$, $r \neq 0$ 在任一包含极点的开矩形上没有调和共轭. 为什么这个结论不与命题 3 冲突?

3. (a) 证明半径为 $b > 0$, 圆心在 $(1,0)$(即在 $z = 1$) 的圆周随着 θ 的变化由 $z = 1 + be^{i\theta}$ 绘出.

(b) 证明 (a) 部分的圆周经函数 $f(z) = z^2$ 并不映成 "完美的" 的圆周, 但随着 $b \to 0$, 映像变得更圆.

(c) 直接证明对小的 b, 该圆周放大大约 $|f'(1)|$ 倍数.

4. 画出楔形 $0 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 经 $w = f(z) = z^3$ 映入 w–平面的映像.

5. 利用命题 4 推断 $g(x, y) = \exp[x^2 - y^2]\sin(2xy)$ 是调和函数.

6. 假设 $U(r, \theta)$ 是圆盘 $r < R$ 的外部 $(r \geqslant R)$ 的连续函数, 且假设 $U(r, \theta)$ 是 $r > R$ 的调和函数, 满足 $U(R, \theta) \equiv 0$ 和 $|U(r, \theta)| \leqslant M$,$M$ 为某个常数. 通过完成以下步骤来证明 $U(r, \theta) \equiv 0$, $r \geqslant R$.

(a) 对任意固定的 $r_0 > R$, 证明对于 $r > 0$, 函数 $V(r, \theta; r_0) = M\frac{\ln(r/R)}{\ln(r_0/R)}$ 是调和的, 并且在圆周 $r = R$ 上等于零, 在圆周 $r = r_0$ 上等于 M.

(b) 由最大值最小值原理 (或利用第 6.4 节的习题 1) 证明在圆环 $R \leqslant r \leqslant r_0$ 上 $|U(r, \theta)| \leqslant V(r, \theta; r_0)$.

(c) 对任意固定的 r, 当 $r_0 \to \infty$ 时, 在 (b) 中的不等式两边取极限得到 $|U(r, \theta)| \leqslant 0$ (即 $U(r, \theta) \equiv 0$), 正是所需要的.

7. 证明当 Cauchy-Riemann 方程 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$ 用极坐标表示时, 它们变成等价的一对方程 $U_r = \frac{1}{r}V_\theta$ 和 $V_r = -\frac{1}{r}U_\theta$, $r > 0$.

8. (a) 对任一实数 α, 对 $-\pi < \theta < \pi$ 和 $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ 定义函数 $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$. 利用习题 7 证明 z^α 是 z 在撕开的平面 $-\pi < \theta < \pi$ 上的解析函数.

(b) 证明 $z^\alpha = \exp[\alpha \mathrm{Ln} z]$, 其中 $\mathrm{Ln} z$ 是对数函数的主支, 由 $\mathrm{Ln} z = \ln r + i\theta$ 定义 (参看例 3).

(c) 对 $\alpha > \frac{1}{2}$, 证明 z^α 把扇形 $0 < \theta < \pi/\alpha$ 映到上半平面 $y > 0$ 上.

(d) 粗略地绘出对应于在扇形 $0 < \theta < \pi/\alpha$, $\alpha > 0$ 中解析函数 $f(z) = z^\alpha$ 的流体流的流线.(如果有困难, 可先考虑 $\alpha = 2$ 的情形). 在 (c) 部分的映照下这些流线会发生什么情况?

9. 设解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 把 z–平面中的开集 D 一一对应地共形映到 w–平面中的开区域 E 上. 则存在函数 $g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$, 它是以下意义下 $f(z)$ 的逆: $w = f(z)$ 当且仅当 $z = g(w)$. 可以证明 $g(w)$ 是 w 的解析函数, 但不去做这种证明. 而是来证明 D 中的曲线 $y =$ 常数 被 $f(z)$ 映成 E 上与该解析函数 g 对应的流体流的流线.

10. 令 $f(z) = \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$.

(a) 证明对区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中任意非零的 c, $f(z)$ 把水平线 $y = c$ 映到双曲线

$$\frac{v^2}{\sin^2 c} - \frac{u^2}{\cos^2 c} = 1 \quad (u + iv = w = f(z))$$

的一支上 (上支或下支取决于 c 是正的还是负的). 对 x–轴 (即 $y = 0$) 会发生什么?

(b) 注意到所有这些双曲线与 v–轴交于 -1 和 1 之间, 画出这些曲线的略图, 并说明这些曲线填满整个 w–平面除去 v–轴上的射线 $v \geqslant 1$ 和 $v \leqslant -1$.

(c) 由 (a) 和 (b) 推断 $\sinh z$ 把水平带 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$(记作 D) 一一对应地映到开集 E 上,E 由 w–平面去掉 (b) 中的射线组成. 因此, 在 D 上的 $\sinh z$ 在 E 上存在逆 $\sinh^{-1} w$(参看习题 9).

(d) 由习题 9 推断对应于 E 上的解析函数 $\sinh^{-1} w$ 的流体流以双曲线作为它的流线. 用语言描述该流体流，并解释等势曲线是怎样静电产生的, 或怎样作为在稳态热传导过程中的等温线的.

11. (a) 令 D 由半平面 $x > 0$ 去掉区间 x–轴上的 $0 < x \leqslant 1$ 组成. 验证函数 $h(z) = z^2 - 1$ 把 D 映入平方根函数区域, 即 $\{re^{i\theta} : -\pi < \theta < \pi,\ r > 0\}$(参看习题 8). 因此, 函数 $f(z) = i\sqrt{z^2 - 1}$ 是在 D 上有明确定义的解析函数.

(b) 描述具复速度位势 $f(z) = i\sqrt{z^2 - 1}$, $z \in D$ 的流体流的流线.

提示 考虑一条在 u–轴稍微上方的直线 (比如 $v = \epsilon > 0$) 在逆变换 $g(w) = \sqrt{1 - w^2}$, $w = u + iv$, $v > 0$ 下的映像. 下面的图 7 恰当吗? 我们注意到函数 $f(z) = i\sqrt{z^2 - 1}$ 实际上可解析开拓到整个 z–平面去掉 x–轴上的线段 $[-1, 1]$ 上. 我们已在图 7 中包含了落在半平面 $x < 0$ 的流线. 这是为什么?

(c) 什么具体的物理情况将会产生如同在 (b)[①]部分求得的流线的等温线或等位势曲线?

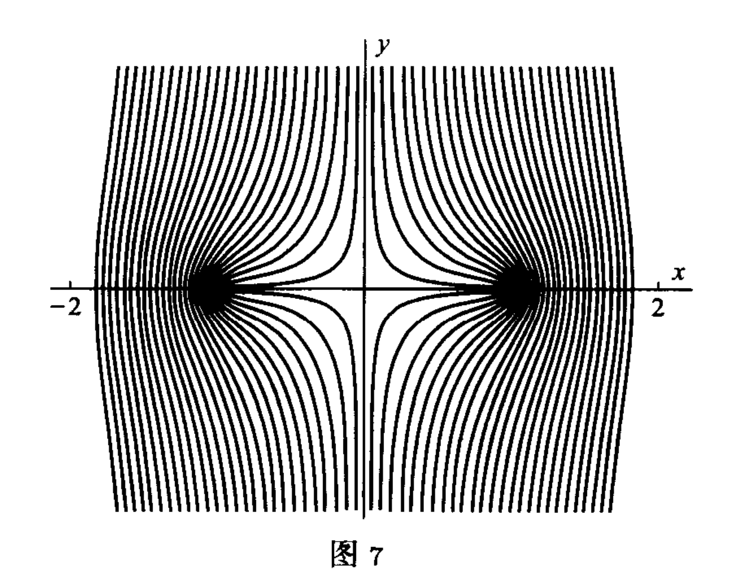


图 7

[①] 原文误为 (a).——译者

第七章　Fourier 变换

在本章, 我们引入 Fourier 变换理论并利用它来求无限区域上偏微的解. 例如, 在各种关于 $f(x)$ 的假设下较详细的考虑无限长杆的热传导问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ k > 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x). \end{aligned} \tag{1}$$

读者或许想知道为什么这种问题有意义, 因为就实用目的来说, 所有区域 (杆) 都是有限的. 一个解释是通常在无限的情形解的形式更易处理和解释. 这对波方程已经看到, 无限弦的 D'Alembert 公式比 Fourier 级数解更易处理, Fourier 级数解通常是无穷多调和函数的和, 直接证明它的收敛性或许是困难的. 在第五章, 我们对适当的周期初始数据利用 D'Alembert 公式来解出具固定端点或自由端点的有限弦波方程, 其中没有用到 Fourier 级数 (参看第 5.2 节的定理 3, 或第 5.3 节的例 1 和例 2).

关于热方程 (即, 关于问题 (1)) 的 D'Alembert 公式的类似公式是不寻常的公式 (对 $t > 0$)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} f(y)dy, \tag{2}$$

正如我们将要证明的, 该公式是 (1) 在种种关于 $f(x)$ 的假设下唯一 "物理上合理" 的解. 特别, 如果 $f(x)$ 是连续的且是以 $2L$ 为周期的, 则由 (2) 给出的 $u(x,t)$

对长度为 $2L$ 的环形金属丝中热传导问题提供了一个周期解. 注意到 (2) 处理起来明显比在第 3.4 节中的形式 Fourier 级数解来得简单. 解 (2) 对在 x 在时刻 t 的温度 $u(x,t)$ 还有一个切意的解释, 作为基元 $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-y)^2/4kt}f(y)$(由于在不同点 y 的热源) 的连续叠加 (即, 积分). 属于固定点 y 基元在不同时刻 t 的形状在图 1 中绘出. 在每条 "Gauss 曲线" 下的面积是 $f(y)$(这里假设是正的) 高是 $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}f(y)$. 随着 t 增加, 在 y 处的初始温度 $f(y)$ 的影响就蔓延开来.

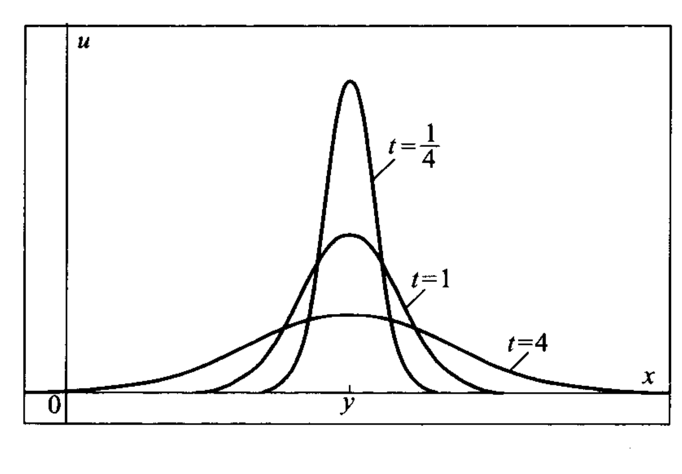


图 1

公式 (2) 以及类似的无限问题的解是通过 Fourier 变换的技巧以形式的不严格的方式发现的. 由于这个缘故, 用这种方法得到的解无论如何必须个别验证以确保它们满足所给问题. 尽管这样, 我们将证明在种种假设下 (通常不是最一般的)Fourier 变换的一些性质, 以使读者具有对认为形式上的处理很可能导出正确的解的一些根据. 我们建议读者或教师在第一次阅读时先略过较困难的证明, 而把注意力集中在例子上.

为了引出复 Fourier 变换, 在第 7.1 节我们先考虑 Fourier 级数的复形式. 第 7.2 节包括了 Fourier 变换的基本性质. 虽然反演定理的证明放在本章的最后, 然而在第 7.3 节中利用了该定理来证明 Fourier 变换的 Parseval 等式. 在第 7.4 节, 把 Fourier 变换法用于关于无限杆的热问题 (1), 并形式地获得公式 (2). 然后严格证明 (2) 满足 (1). 我们还说明了 Fourier 变换法是怎样能用于波方程问题和 Laplace 方程问题, 即使我们已经看到其他的方法是足够的. 在第 7.5 节, 利用 (2) 以及镜像法, 我们解答了在第 4.3 节遗留下来未解决的有关有限杆的形式无穷级数解的有效性问题. 镜像法和 (2) 用来解半无限杆 ($0 \leqslant x < \infty$) 热问题. 对热问题利用 (2) 和镜像法, 本质上与 5.3 节中对波问题利用 D'Alembert 公式和镜像法相同. 引入了 Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换, 但没有详细

讨论它们, 因为由这些变换获得的结果通过利用通常的 Fourier 变换结合镜像法可不费力地得到.

历史注记和现代前景

在 18 世纪后期和 19 世纪初, 科学家和数学家受到求解有限区间初边值问题的 Fourier 级数方法成功的鼓舞, 他们寻求 Fourier 级数的一个适当的连续的变体, 涉及用积分来代替无穷级数. 这种变体使得他们能对某些非周期函数给出积分表示. 而且这种表示将得出更为容易处理和理解的封闭形式的解 (即, 不涉及无穷级数; 参看 (2)). Fourier 变换 (或积分) 的想法是受到 Pierre-Simon de Laplace(1749—1827) 工作的启发, 且主要归功于 Joseph Fourier(1768—1830),Augustin-Louis Cauchy(1789—1857) 和 Simon D. Poisson(1781—1840). 在 1811 年, 他们三人都向巴黎科学院口头陈述了他们的文章，而且每个人都从其他人的详细解释中受益.

Fourier 变换的概念是积分变换 (或算子, 参看第 1.2 节) 符号的一个特殊情形. 任给一个 "比较好的" 函数 $K(x,\xi)$, 可由下式定义函数 $f(x)$ 的积分变换 $F(\xi)$ 或 $T[f](\xi)$:

$$F(\xi) \equiv T[f](\xi) = \int_a^b K(x,\xi)f(x)dx, \tag{3}$$

其中固定的积分限 a 和 b 可以是有限或无穷. 根据 (3), 每个适当的函数 f 变换成一个新的函数 F 或 $T[f]$. 这种变换在下述意义下是线性的: $T[c_1f_1 + c_2f_2] = c_1T[f_1] + c_2T[f_2]$. 该变换由积分限 a 和 b 的选取而确定, 函数 $K(x,\xi)$ 称为该变换的**核**. 一些广泛使用的由积分限和核定义的变换在下表列出.

表 7.1 一些常见的积分变换

$K(x,\xi)$	积分限	变换名称
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi x}$	$a=-\infty \quad b=\infty$	Fourier
$e^{-\xi x}$	$a=0 \quad b=\infty$	Laplace
$x^{\xi-1}$	$a=0 \quad b=\infty$	Mellin
$\frac{1}{\pi}\frac{1}{x+\xi}$	$a=-\infty \quad b=\infty$	Hilbert
$\frac{1}{\sqrt{4\pi\xi}}e^{-x^2/4\xi}$	$a=-\infty \quad b=\infty$	Weierstrass

选用哪个变换取决于着手处理问题的特性. Fourier 变换在求解偏微中有帮助, 首先因为它把求导转化为下述意义下简单的代数乘法: $T[f'](\xi) = i\xi T[f](\xi)$ (参看第 7.2 节的命题 1). Laplace 变换适合线性常微方程组的初值问题, 是理想

的工具. 为了用代数方法解这种问题, 英国电子工程师 Oliver Heaviside(1850—1925) 基于 Laplace 变换和 Fourier 变换发展了广泛应用的 "算子微积分".

与 Fourier 级数一样, Fourier 变换除了求解微分方程之外还有许多基本用途. 在 $[-L,L]$ 上函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n 和 b_n 告诉我们谐函数 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 和 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 在参与函数的构成中是如何重要. 对定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 在某点 ξ 的 Fourier 变换

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx,$$

告诉我们谐函数 $\sin(\xi x)$ 和 $\cos(\xi x)$ 在函数的构成中是何等的重要. 把一个在进行实验检查的物体看作是未知函数通常是有用的, 而且认识该物体的最初方式就是测量它对由各种频率 $\xi/2\pi$ 发射的探测器 (例如, 光线, X-射线, 微波, 电子信号, 声波, 等等) 的反应. 反应的程度可能认为是与该未知物体的组成中具频率 ξ 的谐函数的权重成比例 (即, 未知函数的 Fourier 变换在 ξ 的值). 然后希望从这些反应来近似该未知物. 换言之, 希望从函数的 Fourier 变换来确定该函数. 这里有个结果 (反演定理) 表明对一大类函数可以这样做. (这与 Fourier 级数的收敛定理类似, 这些收敛定理由它们的 Fourier 系数重新构造了某些函数.) 在现实情况中, 一个物体的频率反应可以依赖于该物体被探测的角度, 所以问题会非常复杂, 可能一次不同的多方面的变换或许更合适. 例如, Radon 变换以及它的反演定理由 Johann Radon (1887—1956) 在他 1917 年的论文 "*Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Manningfaltigkeiten*" ([Radon],[Deans]) 中发展起来的. 虽然该论文在 1970 年前在应用领域实际上鲜为人知, 但如今在医学诊断, 大气物理, 天文学, 光谱学, 统计学, 地球物理学, 应力分析等领域使用 Radon 积分变换是必要的. 因为由物体的频率反应来确定物体的问题 (即,**反问题或重新构建问题**) 在科学上几乎是包罗万象的, 所以积分变换是许多可供选择的基本工具.

§7.1 复 Fourier 级数

回忆一下定义在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上适当的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数是

$$\mathrm{FS}f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{1}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad \text{和} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

为了得到 Fourier 级数的复形式, 要利用 Euler 公式 (参看第 1.1 节的 (24))

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \tag{2}$$

由此得

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \quad \text{和} \quad \sin y = -\frac{i}{2}(e^{iy} - e^{-iy}). \tag{3}$$

取 $y = \frac{n\pi x}{L}$, 且 (1) 中的 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 和 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 用 (3) 中相应的公式替换, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{FS}f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}a_n(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}) - \frac{1}{2}ib_n(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L})\Big) \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/L} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L}\Big) \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})e^{in\pi x/L}.
\end{aligned} \tag{4}$$

令 $c_0 = \frac{1}{2}a_0$. 对 $m = 1, 2, 3, \cdots$, 定义

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{2}(a_m - ib_m) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{m\pi x}{L} - i\sin\frac{m\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx.
\end{aligned}$$

对 $m = -1, -2, -3, \cdots$, 定义

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{2}(a_{-m} + ib_{-m}) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{-m\pi x}{L} + i\sin\frac{-m\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx.
\end{aligned}$$

则 (4) 可写成以下形式

$$\mathrm{FS_c}\ f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{im\pi x/L},$$

其中

$$c_m=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-im\pi x/L}dx, m=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{5}$$

形式表示 $\mathrm{FS}_c\ f(x)$ 称为 $f(x)$ 的**复 Fourier 级数**.

如果 FS $f(x)$ 在 x 处收敛, 则不论是用 $\mathrm{FS}_c\ f(x)$ 还是 FS $f(x)$ 显然得到相同的结果, 即

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}c_m e^{im\pi x/L}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

因此, 第四章所有收敛性结果可搬到关于复 Fourier 级数相应的结果. 有意思的是复 Fourier 级数计算起来通常比 "普通" Fourier 级数更简单.

例 1 计算 $f(x)=e^{ax}$, $-L\leqslant x\leqslant L$ 的复 Fourier 级数, 其中 a 是实常数.

解 我们有

$$\begin{aligned}
c_m &=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}e^{ax}e^{-im\pi x/L}dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}e^{(a-(im\pi/L))x}dx\\
&=\frac{1}{2L}\frac{1}{a-im\pi/L}e^{(a-(im\pi/L))x}\Big|_{-L}^{L}=\frac{1}{2}\frac{1}{aL-im\pi}(e^{aL}e^{-im\pi}-e^{-aL}e^{im\pi})\\
&=\frac{1}{2}\frac{aL+im\pi}{(aL)^2+(m\pi)^2}(e^{aL}(\cos(m\pi)-i\sin(m\pi))-e^{-aL}(\cos(m\pi)+i\sin(m\pi)))\\
&=(-1)^m\frac{1}{2}\frac{e^{aL}-e^{-aL}}{(aL)^2+(m\pi)^2}(aL+im\pi)=(-1)^m\sinh(aL)\frac{(aL+im\pi)}{(aL)^2+(m\pi)^2}.
\end{aligned}$$

对 $m\geqslant 0$, c_m 的实部是 $\frac{1}{2}a_m$, 虚部是 $-\frac{1}{2}b_m$. 请读者直接计算这些普通 Fourier 系数. 当然, $f(x)$ 的复 Fourier 级数就是 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{im\pi x/L}$, 其中 c_m 由上面给出. □

函数 $e^{im\pi x/L}$ 是复值的. 在 $[-L,L]$ 上分段连续的两个复值函数 $f(x)$ 和

$g(x)$ 的**内积**定义为以下复数

$$\langle f,g\rangle \equiv \int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}dx, \tag{6}$$

其中 $\overline{g(x)}$ 是 $g(x)$ 的共轭复数. 因此, 如果 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ 和 $g(x)=g_1(x)+ig_2(x)$, 其中 f_1, f_2, g_1 和 g_2 是实值的, 则

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_{-L}^{L}[f_1(x)+if_2(x)][g_1(x)-ig_2(x)]dx\\ &= \int_{-L}^{L}[f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)]dx+i\int_{-L}^{L}[f_2(x)g_1(x)-f_1(x)g_2(x)]dx.\end{aligned}$$

虽然 $\langle f,g\rangle$ 一般不是实数, 但 f 与自身的内积是实的且是非负的:

$$\langle f,f\rangle=\int_{-L}^{L} f(x)\overline{f(x)}dx=\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx\geqslant 0.$$

于是范数 $\|f\|$, 定义为 $\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$, 有意义. 而且当 f 和 g 是实值时 $\langle f,g\rangle$ 的定义与第 4.1 节中的定义相同. 利用符号 $e_m(x)=e^{im\pi x/L}$, 有

$$\begin{aligned}\langle e_m,e_n\rangle &= \int_{-L}^{L} e^{im\pi x/L}\overline{e^{in\pi x/L}}dx=\int_{-L}^{L} e^{i(m-n)\pi x/L}dx\\ &= \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L}+i\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)dx=\begin{cases}0, & \text{如果 } m\neq n,\\ 2L, & \text{如果 } m=n.\end{cases}\end{aligned}$$

我们称族 $\{e_m\}, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 构成了**具范数平方** $\|e_m\|^2=2L$ **的正交族**. 复 Fourier 系数 c_m 实质上是可取复值的函数 f 关于该族的分量, 即

$$c_m=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx=\frac{1}{2L}\langle f,e_m\rangle.$$

如果函数 f 足够好 (例如, 如果 f 是连续的且分段 C^1, 并有 $f(-L)=f(L)$), 则我们知道 (参看第 4.2 节的定理 4)Fourier 级数 (复的或普通的) 收敛到 $f(x)$, 因此

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x/L}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\langle f,\frac{1}{\sqrt{2L}}e_m\rangle\frac{1}{\sqrt{2L}}e_m(x),$$

此为 f 以"单位正交向量" $\frac{1}{\sqrt{2L}}e_m$ 的展开式. 复 Fourier 系数的 Parseval 等式 (参看第 4.2 节) 呈现了一种优雅的形式:

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\langle f, \frac{1}{\sqrt{2L}}e_m\rangle|^2 \\ &= 2L \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{2L}\langle f, e_m\rangle\right|^2 = 2L \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2.\end{aligned}$$

这表明该结果对任一函数 (可以是复值的)$f(x)$ 成立, 只要 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. 当 $f(x)$ 是实值的, 该结果由第 4.2 节的 Parseval 等式得到, 因为对于 $m = \pm1, \pm2, \cdots$, $|c_m|^2 = \frac{1}{4}(a_{|m|}^2 + b_{|m|}^2)$ 以及 $|c_0|^2 = \frac{1}{4}a_0^2$. 为方便起见, 对 Parseval 等式的复形式叙述如下:

定理 (Parseval 等式) 令 $f(x)$ 是定义在 $[-L, L]$ 上的实值或复值函数, 则

$$\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = 2L \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2,$$

其中

$$c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L} dx, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

是 $f(x)$ 的复 Fourier 系数.

例 2 如果 $f(x) = e^{ax}$, $-L \leqslant x \leqslant L$, 其中 $a \neq 0$ 且是实数, Parseval 等式表达了什么?

解 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx &= \int_{-L}^{L} e^{2ax} dx = \frac{1}{2a}e^{2ax}\bigg|_{-L}^{L} = \frac{1}{2a}(e^{2aL} - e^{-2aL}) \\ &= \frac{1}{2a}(e^{aL} + e^{-aL})(e^{aL} - e^{-aL}) = \frac{2}{a}\cosh(aL)\sinh(aL).\end{aligned}$$

由例 1, $|c_m|^2 = \frac{\sinh^2(aL)}{a^2L^2+m^2\pi^2}$, 所以 Parseval 等式得出

$$\frac{2}{a}\cosh(aL)\sinh(aL) = 2L\sinh^2(aL) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2L^2 + m^2\pi^2}.$$

对 $L=\pi$, 得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+m^2}=\frac{\pi\cosh(a\pi)}{a\sinh(a\pi)}=\frac{\pi}{a}\coth(a\pi). \qquad \square$$

下面的定义在后面将会有用的.

定义 一定义在 $(-\infty,\infty)$ 上实值或复值函数称为在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积的, 如果 $\int_{-R}^{R}|f(x)|dx$ 对所有 $R>0$ 存在, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}|f(x)|dx<\infty. \tag{7}$$

例如, $(1+x^2)^{-1}$ 是绝对可积的, 因为 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}dx=\pi<\infty$, 但 $x/(1+x^2)$ 不是绝对可积的. 的确, 虽然 $\int_{-R}^{R}x/(1+x^2)dx=0$, 但

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|dx\\ &=\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}\frac{2x}{1+x^2}dx == \lim_{R\to\infty}\ln(1+R^2)=\infty.\end{aligned}$$

Fourier 变换

设 $f(x)$ 是实变量 $x\in(-\infty,\infty)$ 的实值或复值函数. $f(x)$ 的 **Fourier变换**是当下式的极限存在时由它定义的实变量 $\xi\in(-\infty,\infty)$ 的函数 $\hat{f}(\xi)$

$$\hat{f}(\xi)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx\equiv\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)e^{-i\xi x}d'x, \tag{8}$$

其中

$$d'x\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx.$$

有些别扭的因子 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$(我们用符号 $d'x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$ 把它掩饰起来) 在其他的书籍中有时略去. 用这里的符号, 将发现对 "好的" 函数 $f(x)$, 下面的 **Parseval等式**(关于 Fourier 变换) 成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx,$$

(参看第 7.3 节). 如果在 $\hat{f}(\xi)$ 的定义 (8) 中的因子 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 略去, 则在 Parseval 等式的左边就得插入因子 $(2\pi)^{-1}$. 注意到在定义 (8) 中, 我们暗中假设积分 $\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}dx$ 对所有实数 R 都存在, 但没有假设 $f(x)$ 是绝对可积的. 如果 (8) 中的极限存在, 则该极限称为广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$ 的 **Cauchy主值**. 即使 $f(x)$ 不是绝对可积的, 但 Cauchy 主值可以存在.

如果 $\xi = m\pi/L$, 则 $\hat{f}(\xi)$ 看上去很像一个复 Fourier 系数. 的确, 假设 $f_1(x)$ 是对 $-L \leqslant x \leqslant L$ 有定义的 "好的" (例如, 分段连续) 函数. 通过下式把 $f_1(x)$ 延拓到对所有 x 有定义的函数:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & |x| \leqslant L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$$

$f_1(x)$ 的复 Fourier 系数由以下给出

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_1(x)e^{-im\pi x/L}dx = \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(m\pi/L)x}dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(m\pi/L)x}d'x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\hat{f}(\frac{m\pi}{L}). \end{aligned}$$

因此, $f_1(x)$ 的 c_m 实质上是通过求延拓函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 在点 $\xi = m\pi/L$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的值得到. 后面 (参看第 7.3 节) 将利用这个事实, 但在本节剩下的部分我们来考虑一些例子.

例 3 求 $f(x) = e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换, 其中 $a > 0$ 和 $x \in (-\infty, \infty)$.

解 计算

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\xi x}d'x = \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\xi x}d'x + \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-i\xi x}d'x \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}d'x + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\xi)u}d'u \quad (\text{其中} \quad u = -x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\right|_0^{\infty} + \left.\frac{e^{-(a-i\xi)x}}{-(a-i\xi)}\right|_0^{\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\xi^2}. \end{aligned}$$

□

例 4 求下面函数的 Fourier 变换

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$$

解 由于对 $|x|>L$, $f(x)=0$, 所以

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}d'x = \int_{-L}^{L} e^{-i\xi x}d'x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{-L}^{L} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\xi L}-e^{i\xi L}}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin(\xi L)}{\xi}.\end{aligned}$$

注意到即使 $f(x)$ 对区间 $[-L,L]$ 外的 x 为零, 但同样的情况对 $\hat{f}(\xi)$ 不真. 一般可以证明如果 f 是分段连续的, 且 f 和 $\hat{f}$ 在 $[-L,L]$ 之外为零, 则除了有限多个点之外, $f(x)=0$. □

例 5 通过计算下面函数的 Fourier 变换来说明一个实值函数的 Fourier 变换不必是实值的.

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant L,\\ 0, & \text{其他处}.\end{cases}$$

解 我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{0}^{L} e^{-i\xi x}d'x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{0}^{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\xi L}-1}{-i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(\xi L)-i\sin(\xi L)-1}{-i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\xi L)-i(1-\cos(\xi L))}{\xi}.\end{aligned}$$ □

例 6 令 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, $a>0$, $-\infty<x<\infty$. 证明

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2-i\xi x}d'x=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}.$$

解 被积函数的指数配平方变成 $-\frac{a}{2}(x+i\frac{\xi}{a})^2-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{a}$. 因此,

$$\hat{f}(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}d'x\equiv e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}I(\xi). \tag{9}$$

现来证明由 (9) 定义的积分 $I(\xi)$ 实际上是与 ξ 无关的常数. 的确, 经积分号下求导数 (参看 Leibniz 法则, 附录 3), 得

$$\begin{aligned}I'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\xi}e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}d'x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}\left(-a(x+i\frac{\xi}{a})\right)\frac{i}{a}d'x \\ &= \frac{i}{a\sqrt{2\pi}}\left.e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2}\right|_{-\infty}^{\infty}=0.\end{aligned}$$

于是 $I(\xi)$ 是常数, 且

$$I(\xi) = I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} d'x.$$

为了计算 $I(0)$, 我们借助于一个绝妙的技巧 (涉及极坐标), 读者以前或许见过这种技巧:

$$\begin{aligned}|I(0)|^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} d'x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ay^2} d'y\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}ar^2} rdrd\theta = \left.\frac{e^{-\frac{1}{2}ar^2}}{-a}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

由此得 $I(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}$. 于是, 我们得

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a(x+i\xi/a)^2} d'x = e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a} I(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a} I(0) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}.$$

于是, 如果 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, 则 $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}$.

当 $a = 1$ 时, 注意到 f 和 $\hat{f}$ 结果是相同的函数. 有无穷多线性无关的函数具有这种性质 (参看练习 7.2 的问题 13 和问题 14). □

注记 附录 5 有 Fourier 变换表.

概要 7.1

1. 复 Fourier 级数: 令 $f(x)$ 是定义在 $[-L, L]$ 上的函数, 则 $f(x)$ 的**复 Fourier 级数**是以下展开式

$$\mathrm{FS}_c\, f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x/L}, \quad 其中 \quad c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-im\pi x/L} dx, \tag{S1}$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 只要所有这些积分存在. 由于 $\mathrm{FS}_c\, f(x)$ 从 $-N$ 到 N 的部分和与通常的 Fourier 级数 $\mathrm{FS}\, f(x)$ 从 0 到 N 的部分和相同, 所以在第 4.2 节中的所有收敛性结果对复 Fourier 级数也成立. Parseval 等式用复 Fourier 系数表示变成

$$\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = 2L \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2. \tag{S2}$$

(S2) 的左边是范数的平方 $\|f\|^2$，相对于范数平方为 $2L$ 的正交族 $e_m(x) \equiv e^{im\pi x/L}(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 右边与 f 的分量 $\langle f, e_m \rangle$ 的模的平方的和成比例. 注意到 $c_m = \frac{1}{2L}\langle f, e_m \rangle$.

2. Fourier 变换: 设 $f(x)$ 是实变量 $x(-\infty < x < \infty)$ 的实值或复值函数. $f(x)$ 的 **Fourier 变换**是由下面的极限 (Cauchy 主值) 存在时所定义的函数 $\hat{f}(\xi)$

$$\hat{f}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\xi x} d'x, \tag{S3}$$

其中 $d'x = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$. 在第 7.3 节, 我们证明对 "好的" 函数 $f(x)$, 以下的 **Parseval等式**(关于 Fourier 变换) 成立:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{S4}$$

练习 7.1

1. 计算下列定义在 $[-L, L]$ 上的函数的复 Fourier 级数:

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = L - |x|$ (d) $f(x) = \frac{x}{|x|}(L - |x|)$

(e) $f(x) = x^N e^{ax},\ N = 1, 2, \cdots$ (f) $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$.

2. (a) 验证 $\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = 1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta) + \cdots + 2\cos(N\theta)$.

(b) 利用结果 $\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$(对任意 $z \neq 1$ 的复数成立) 证明

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

(c) 推断 $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(N\theta) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$, 正如在第 4.2 节以不同方式证明的.(回忆起这是 Dirichlet 核.)

3. 求下列函数的 Fourier 变换

(a) $f(x) = \begin{cases} L - |x|, & |x| < L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$ (b) $f(x) = e^{-a|x|}\cos(bx),\ a, b > 0$

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}ax^2}\sin(bx),\ a > 0$ (d) $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}ax^2}\left(= -\frac{1}{a}\frac{d}{dx}e^{-\frac{1}{2}ax^2}\right)$.

4. (a) 验证 Fourier 变换是线性的, 即, 对任意复数 a 和 b, $(af + bg)^\wedge(\xi) = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi)$.

(b) 对任意实数 c, 验证 $[f(x+c)]^\wedge(\xi) = e^{ic\xi}\hat{f}(\xi)$ 以及 $[e^{icx}f(x)]^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi - c)$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续, 绝对可积函数. 证明: 如果 $f(x)$ 是以 $2L$ 为周期的, 则 $f(x)$ 必恒等于零.

6. 证明以下 Bessel 不等式的复形式. 假设 $|f(x)|^2$ 在 $[-L, L]$ 是可积的. 证明

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \leqslant \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx, \quad \text{其中} \quad c_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx,$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

提示 令 $S_N(x) = \sum_{m=-N}^{N} c_m e^{im\pi x/L}$ 表示 $\mathrm{FS}_c\, f(x)$ 的 N 项部分和, 考虑由 $\sigma_N^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x) - S_N(x)|^2 dx$ 定义的**平方差平均** σ_N^2. 现利用事实 $|f(x) - S_N(x)|^2 = [f(x) - S_N(x)][\overline{f(x)} - \overline{S_N(x)}]$, 其中 $\overline{f(x)}$ 表示 $f(x)$ 的复共轭. 剩下的论证几乎一字不差的如同实形式情形 (见第 4.2 节).

7. 令 $f(x) = e^{i\beta x}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, 其中 β 是实数, 但不是整数. 利用复 Fourier 级数的 Parseval 等式证明 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta-m))}{(\beta-m)^2} = \pi^2$.

8. 令 $f(x) = \pi\cos(\alpha x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, 其中 α 不是整数. 推导下面属于 Euler 的公式

$$1 + 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} = \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

提示 先求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数的复形式.

9. 证明以下函数有相同的 Fourier 变换 (注意到 f 和 g 只在一些点上不同):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad |x| > 1, \\ 2, & \text{如果} \quad |x| = 1, \\ 1, & \text{如果} \quad |x| < 1. \end{cases} \quad \text{和} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad |x| < 1, \\ 1, & \text{如果} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{如果} \quad |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

10. **关于 Fourier 变换的 (Riemann-Lebesgue 引理)**. 设复值, 分段连续的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积 (即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$). 可用以下标准结果: 对复值函数 $g(x)$, 如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} g(x)dx$ 存在, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx$.

(a) 证明 $\hat{f}(\xi)$ 存在, 即, 对任意实数 ξ, $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}dx$ 存在.

(b) 证明 $|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$(即 $|\hat{f}(\xi)|$ 是有界的).

(c) 假设 $\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+a)|dx = 0$.(利用附录 3 中的控制收敛定理, 如果 $f(x)$ 是绝对可积和分段连续的, 则该事实成立.) 证明 $\lim_{\xi\to\pm\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

提示 先证明

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -f(x)e^{-i\xi(x-\pi/\xi)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -f(y + \frac{\pi}{\xi})e^{-i\xi y}dy.$$

然后注意到

$$2\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{\xi}))e^{-i\xi x}dx.$$

11. 给出定义在 $(-\infty,\infty)$ 上 C^∞ 函数 $f(x)$ 的例子, 使得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}|f(x)|dx$$

不存在, 但

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$$

却存在.

12. 令 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\quad n<x<n+\frac{1}{n^2}, \quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\\ 0, & \text{在其他的点}.\end{cases}$

(a) 绘出 $-4\leqslant x\leqslant 4$, $f(x)$ 的草图.

(b) 验证

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

(c) 证明当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限不存在. 特别, 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不趋于零.(作为对照, 我们知道收敛的无穷级数的通项趋于零).

(d) 构造一个严格正的函数 $g(x)$, 它在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积, $\lim_{x\to\infty}g(x)$ 不存在且 $g(x)$ 是无界的.

提示 在 $f(x)$ 的定义中, 考虑用 n 替换 1, 用 $\frac{1}{|n|^3}$ 替换 $\frac{1}{n^2}$ 以及用 $\frac{1}{1+x^2}$ 替换 0 的结果.

§7.2 Fourier 变换的基本性质

在本节, 我们建立在施行 Fourier 变换中有用的公式. 这些公式对那些衰减 (即, 当 $|x|\to\infty$ 时趋于 0) 足够快的函数 (以及它们的导数) 是成立的. 更精确地表述为如下:

定义 函数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 具有**衰减阶**(m,n), 其中 m 和 n 是非负整数, 如果 $f(x)$ 是 C^m 的, 且存在常数 $K>0$ 使得对所有具 $|x|\geqslant 1$ 的 x,

$$|f(x)|+|f'(x)|+\cdots+|f^{(m)}(x)|\leqslant\frac{K}{|x|^n}. \tag{1}$$

注记 如果 $m=0$, 即假设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上连续的. 注意到 (1) 中的常数 K 依赖于 f, m 和 n. 换言之, f 和它的前 m 阶导数当 $x\to\infty$ 时至少以

$K|x|^{-n}$ 衰减. 显然, 如果 f 具有衰减阶 (m,n), 则它也具有衰减阶 (m',n'), 其中 $0 \leqslant m' \leqslant m$ 和 $0 \leqslant n' \leqslant n$. 对所有的 m, $n \geqslant 0$, 具有衰减阶 (m,n) 的函数称为是**速减的**. 显然, 任意一个在一闭区间外恒等于零的 C^∞ 函数是速减的. 下面的例子说明存在不等于零的速减函数. □

例 1 证明 e^{-x^2} 是速减的.

解 对任一 $k \geqslant 0$ 以及任一实数 $x \neq 0$, 下面的估计成立:

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2 + \dfrac{1}{2!}x^4 + \cdots + \dfrac{1}{k!}x^{2k} + \cdots} \leqslant \frac{1}{\dfrac{1}{k!}x^{2k}} = \frac{k!}{x^{2k}}.$$

因此, 对任意 $k \geqslant 0$, e^{-x^2} 衰减得比 $k!|x|^{-2k}$ 要快. e^{-x^2} 的 m 阶导数具有形式 $p_m(x)e^{-x^2}$, 其中 $p_m(x)$ 是一 m 次多项式. 存在常数 d_m, 使得对 $|x| \geqslant 1$, 有 $|p_m(x)| \leqslant d_m|x|^m$(参看习题 9). 因此, 如果 $f(x) = e^{-x^2}$, 则对 $|x| \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
|f(x)| + |f'(x)| + \cdots + f^{(m)}(x)| &\leqslant (d_0 + d_1|x| + \cdots + d_m|x|^m)e^{-x^2} \\
&\leqslant (d_0 + \cdots + d_m)|x|^m e^{-x^2} \leqslant k!(d_0 + \cdots + d_m)|x|^{m-2k}.
\end{aligned}$$

任给 $(m,n)(m,n \geqslant 0)$, 可取 k 如此大, 使得 $2k - m \geqslant n$. 则上面的不等式表明 $f(x)$ 具有衰减阶 (m,n), 由此得 $f(x)$ 是速减的. 注意到导数 $f^{(m)}(x) = p_m(x)e^{-x^2}$ 都是连续的, 正如所要求的. 函数 $e^{-|x|}$ 不是速减的, 因为它的导数在 $x = 0$ 处不存在, 虽然对 $|x| \geqslant 1$ 它具有所要求的性质. □

从微分方程的观点来看, 也许 Fourier 变换一个非常重要的性质是把求导转化为在下面命题意义下的以 $i\xi$ 乘函数. 正如我们将看到的, 某些偏微分方程 (具常系数) 则转化成更简单的方程 (例如, 常微分方程).

命题 1 令 $f(x)$ 具有衰减阶 $(1,2)$(即 f 是 C^1 的, 且对 $|x| \geqslant 1$ 和某个常数 $K > 0, |f(x)| + |f'(x)| \leqslant K|x|^{-2}$). 则对所有实数 ξ, 有

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^\wedge (\xi) = i\xi \hat{f}(\xi). \tag{2}$$

证明 为了证明 $\hat{f}(\xi)$ 存在, 只消证明 $f(x)$ 是绝对可积的 (参看练习 7.1 的

习题 10). 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+\int_{|x|>1}|f(x)|dx$$
$$\leqslant\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+2\int_{1}^{\infty}Kx^{-2}dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+2K<\infty.$$

同理可证 $[f'(x)]^\wedge(\xi)$ 存在. 利用分部积分以及事实 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, 得 (回忆起 $d'x\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$, 如在第 7.1 节的 (8))

$$[f'(x)]^\wedge(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\xi x}d'x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(-i\xi)e^{-i\xi x}d'x$$
$$=(i\xi)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}d'x=i\xi\hat{f}(\xi).$$ □

推论 1 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,2)$, 则对所有的实数 ξ,

$$[f^{(m)}(x)]^\wedge(\xi)=i^m\xi^m\hat{f}(\xi).\tag{3}$$

证明 由于 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,2)$, 所以 $f'(x)$ 具有衰减阶 $(m-1,2)$, $f''(x)$ 具有衰减阶 $(m-2,2),\cdots$, 以及 $f^{(m-1)}(x)$ 具有衰减阶 $(1,2)$. 特别, 所有这些导数具有衰减阶 $(1,2)$, 反复应用命题 1, 得

$$\begin{aligned}[f^{(m)}(x)]^\wedge(\xi)&=[(f^{(m-1)})'(x)]^\wedge(\xi)=i\xi[f^{(m-1)}(x)]^\wedge(\xi)\\&=(i\xi)[(f^{(m-2)})'(x)]^\wedge(\xi)=(i\xi)^2[f^{(m-2)}(x)]^\wedge(\xi)\\&=\cdots=(i\xi)^m\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$ □

命题 2 假设 $f(x)$ 具有衰减阶 $(0,3)$, 即 $f(x)$ 是连续的且对 $K>0$, 有 $|f(x)|\leqslant K|x|^{-3}$, $|x|\geqslant 1$. 则对所有实数 ξ, 有

$$i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi)=[xf(x)]^\wedge(\xi).\tag{4}$$

证明 由于 $f(x)$ 具有衰减阶 $(0,3)$, 所以 $f(x)e^{-i\xi x}$ 和它关于 ξ 的导数 $-ixf(x)e^{-i\xi x}$ 是绝对可积和连续的. 因此, 由 Leibniz 法则 (参看附录 3) 得

$$i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi)=i\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}d'x=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-i\xi x}d'x.$$ □

反复运用 (4) 得到以下结果 (参看习题 6).

推论 2 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(0, n+2)$, 则对所有的实数 ξ,

$$i^n \frac{d^n \hat{f}}{d\xi^n}(\xi) = [x^n f(x)]^\wedge(\xi). \tag{5}$$

特别, 等式 (5) 的两边存在!

定理 1 如果 $f(x)$ 是速减的, 则 $\hat{f}(\xi)$ 也是速减的. 更确切的, 对任意的 m, $n \geqslant 0$, 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m, n+2)$, 则 $\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 (n, m).

证明 假设 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m, n+2)$. 利用推论 1 和推论 2, 我们有 (对满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, $0 \leqslant \beta \leqslant n$ 的整数 α 和 β),

$$\begin{aligned} i^{\alpha+\beta}\xi^\alpha (\hat{f})^{(\beta)}(\xi) &= i^\alpha \xi^\alpha [x^\beta f(x)]^\wedge(\xi) = \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right)^\wedge (\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right) e^{-i\xi x} d'x. \end{aligned}$$

因此,

$$|\xi|^\alpha |(\hat{f}^{(\beta)}(\xi)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right| d'x. \tag{6}$$

注意到 $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(x^\beta f(x))$ 具形式 $Kx^b f(x)$ 的项的和, 其中 K 是常数, $0 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant m$ 以及 $0 \leqslant b \leqslant \beta \leqslant n$. 于是, 对某个常数 C 以及 $|x| \leqslant 1$,

$$\left|\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta f(x)\right| \leqslant C|x|^n (|f(x)| + \cdots + |f^{(m)}(x)|) \leqslant \frac{CK|x|.}{|x|^{(n+2)}} = \frac{CK}{|x|^2}.$$

因此, (6) 中的积分是有限的, 且得到对某个适当的常数 A, 对所有满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant m$ 和 $0 \leqslant \beta \leqslant n$ 的 α 和 β, $|(\hat{f})^{(\beta)}(\xi) \leqslant |A|\xi|^{-\alpha}$. 特别, 可取 $\alpha = m$, 并对 $\beta = 0, \cdots, n$ 的这些不等式相加, 得到

$$|\hat{f}(\xi)| + |(\hat{f})'(\xi)| + \cdots + |(\hat{f})^{(n)}(\xi)| \leqslant \frac{B}{|\xi|^m},$$

其中 B 是某个常数. 还得证明 $(\hat{f})^{(n)}(\xi)$ 是连续的, 即, 对任意 ξ_0, 需证明当

$\xi \to \xi_0$ 时, $(\hat{f})^{(n)}(\xi) \to (\hat{f})^{(n)}(\xi_0)$. 为此, 写出

$$|(\hat{f})^{(n)}(\xi) - (\hat{f})^{(n)}(\xi_0) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n |f(x)||e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}|d'x$$
$$= (\int_{|x|>R} + \int_{|x|\leqslant R})|x|^n|f(x)||e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}|d'x, \quad (7)$$

其中 $R \geqslant 1$ 是正常数. 由于 $|f(x)| \leqslant K|x|^{-n-2}$, $|x| \geqslant 1$, 所以当 $R \geqslant 1$ 时

$$\int_{|x|>R} |x|^n|f(x)||e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}|d'x \leqslant 2\int_R^\infty Kx^{-2} \cdot 2d'x = \frac{4K}{R\sqrt{2\pi}},$$

通过取 R 足够大可使上式任意小. 一旦 R 取定, (7) 中的第二个积分通过取 ξ 充分靠近 ξ_0 就可任意小. □

注记 我们已经看到速减函数 $e^{-\frac{1}{2}ax^2}(a>0)$ 的 Fourier 变换是 $a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}a\xi^2}$, 它也是速减的. 到目前所有已计算的其他例子中, $\hat{f}(\xi)$ 不是速减的是由于 $f(x)$ 不可导. 一般说来, $f'(x)$ 不存在 (即使是在一点不存在) 表明 $\hat{f}(\xi)$ 的退化. 例如, 在第 7.1 节的例 3 中, 我们求得 $e^{-a|x|}$ 的 Fourier 变换是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\xi^2}$, 对大的 ξ, 它 $\approx \sqrt{2/\pi}a\xi^{-2}$, 虽然当 $|x| \to \infty$ 时, 对任意整数 $n>0$, $e^{-a|x|}$ 衰减得比 $|x|^{-n}$ 快. $e^{-a|x|}$ 在 $x=0$ 处不是 C^1 的事实是造成它的 Fourier 变换衰减性相对缓慢的原因. 注意到定理 1 粗略地表明 $f(x)$ 的光滑性支配当 $|\xi| \to \infty$ 时 $|\hat{f}(\xi)|$ 趋于零的速率, 反之, 当 $|x| \to \infty$ 时 $f(x)$ 的衰减率支配了 $\hat{f}(\xi)$ 的光滑性. □

例 2 求一个不是速减的函数 $f(x)$, 但对所有的 $|\xi| \geqslant 1$ 和 $m>0$ 满足 $|\hat{f}(\xi)| \leqslant K_m|\xi|^{-m}$ (即$\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 $(0,m)$, 对所有的 $m>0$).

解 定理 1 表明: 如果对所有的 $m \geqslant 0$, $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,2)$(即 $f(x)$ 是 C^∞ 函数, 它的导数 [以及它本身] 当 $|x| \to \infty$ 时都至少衰减得与 $K|x|^{-2}$ 一样快), 则对所有的 $m \geqslant 0$, $\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 $(0,m)$. 具有这些性质的一个函数是 $f(x)=(1+x^2)^{-1}$, 且它也不是速减的. 不必去计算 $\hat{f}(\xi)$ 来验证对所有的 $m>0$, 它具有衰减阶 $(0,m)$, 虽然在第 7.3 节的例 1 中的计算表明 $\hat{f}(\xi)=\sqrt{\pi/2}e^{-|\xi|}$, 它确实具有衰减阶 $(0,m)$, 对所有的 $m>0$. □

注记 以下作为定理 1 的补充的漂亮结果是属于 Godfrey H. Hardy (1877—1947), 20 世纪最伟大的分析家之一. [G. H. Hardy, *A theorem concerning Fourier transforms*, J. London Math. Soc., 8(1933), 227~231.]

设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,\infty)$ 上. 假设对 $|x| \geqslant 1, |f(x)| \leqslant K_1|x|^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 和对 $|\xi| \geqslant 1$, $|\hat{f}(\xi)| \leqslant K_2|\xi|^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$, 其中 n 是非负整数, K_1 和 K_2 是正常数. 则 $f(x) = p(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 其中 $p(x)$ 是次数不超过 n 的多项式. □

卷积以及它们的 Fourier 变换

常希望求一个函数 $h(x)$, 它的 Fourier 变换是两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 变换的乘积 $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. 一般 $h(x)$ 不会是 $f(x)g(x)$. 为了求函数 $h(x)$, 来做以下计算, 为了使交换积分次序 (参看附录 2) 是正当的, 以及确保所有出现的积分存在, 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有衰减阶 $(0,2)$:

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}d'x\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\xi y}d'y\Big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-i\xi(x+y)}d'xd'y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)e^{-i\xi z}d'yd'z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi z}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)d'y\Big)d'z.
\end{aligned}
$$

用 x 替换过渡性的积分变量 z, 可见最后的积分是以下函数的 Fourier 变换

$$
h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)d'y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,
$$

此为函数 $f(x)$ 的平移 $f(x-y)$ 关于 "权"$g(y)$ 的连续叠加.

定义 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**卷积**是由以下定义的函数 $f*g$

$$
(f*g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \tag{8}
$$

如果对每个 x 积分存在的话 (例如, 如果 f 有界以及 g 是绝对可积).

因此上面的计算表明, 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有衰减阶 $(0,2)$, 则具 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ 的函数是 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(f*g)(x)$. 事实上, 如果仅假设 f 和 g 是分段连续的且对某个常数 K, 有 $|f(x)|$, $|g(x)| \leqslant K|x|^{-2}$, 则上述计算仍然有效. 于是有下面

的结果.

定理 2(卷积定理) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是分段连续的, 且对 $|x| \geqslant 1$ 有 $|f(x)| \leqslant \frac{K}{|x|^2}$ 和 $|g(x)| \leqslant \frac{K}{|x|^2}$. 则

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)^\wedge(\xi). \tag{9}$$

为了举例说明该结果的用处以及激发将在第 7.3 节引出的反演定理, 我们给出下面来自常微分方程的简单例子. 更多涉及偏微的例子将在第 7.4 节和第 7.5 节给出.

例 3 对给定的常数 k 和连续函数 $f(x)$, 考虑常微

$$\frac{dy}{dx} + ky = f(x). \tag{10}$$

由形式上对 (10) 两边取 Fourier 变换来求该常微的解.

解 从第 1.1 节得知该问题的通解是

$$y = e^{-kx}\int_a^x e^{kt}f(t)dt + ce^{-kx}, \tag{11}$$

其中 a 和 c 是任意常数. 就该常微而言利用 Fourier 变换技巧没有便利, 但在这熟悉的背景来看这种技巧看起来像什么, 是有启发性的. 为了对常微 (10) 的两边取 Fourier 变换, 假设解 $y(x)$ 存在且具衰减阶 $(1,2)$. 还假设 $\hat{f}(\xi)$ 存在. 对 (10) 的两边取 Fourier 变换并利用命题 1, 得

$$i\xi\hat{y}(\xi) + k\hat{y}(\xi)\hat{f}(\xi) \quad \text{或} \quad \hat{y}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{k + i\xi}.$$

实际上, 常常不知道上述假设是否成立. 因此, 得到下面最终的结果之后, 为了确保它是存在的并满足 (10), 就必须验证. 不管怎样, 从第 7.1 节例 3 的解答可见: 如果

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-kx}, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

则

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k + i\xi)}.$$

(只要忽略第 7.1 节例 3 中的第二个积分). 因此, 由定理 2, 得

$$\hat{y}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(g * f)^\wedge(\xi) = (g * f)^\wedge(\xi).$$

这要求假设 $f(x)$ 是分段连续的, 且满足 $|f(x)| \leqslant k|x|^{-2}$, 但不管怎样, 要检验我们的答案. 为了得出 $y = f * g$, 我们需要反演定理和更多的假设. 然而, 我们已经得到推测性的解

$$\begin{aligned} y(x) &= (g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-k(x-t)}f(t)dt \\ &= e^{-kx}\int_{-\infty}^{x} e^{kt}f(t)dt. \end{aligned}$$

现只要 $\int_{-\infty}^{x} e^{kt}f(t)dt$ 存在 $y(x)$ 就存在. 例如, 如果对某个 $k' < k$, 对所有的 $t < 0$ 有 $|f(t)| \leqslant$ 常数. $e^{-k't}$ 就是这种情形. 则由乘积法则, 得

$$y'(x) = -ke^{-kx}\int_{-\infty}^{x} e^{kt}f(t)dt + e^{-kx}e^{kx}f(x),$$

于是 $y'(x) = ky(x) = f(x)$, 即, 在关于 $f(x)$ 的适当的假设下, 推测性的解是实际上的解. 更精确地说, 我们已经证明:

> 如果 $f(x)$ 是连续的, 且对某个实数 A, $\int_{-\infty}^{A} e^{kt}|f(t)|dt$ 存在, 则
>
> $$y(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-k(x-t)}f(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{12}$$
>
> 是 $y' + ky = f(x)$ 的解.

显然 (12) 中的 $y(x)$ 不是 (10) 的唯一解; 所有其他的解可由加上相应的齐次方程的解 Ce^{-kx} 得到. 这说明这样一个事实: 由 Fourier 变换方法给出的推测性解通常不是最一般的解. 原因是 Fourier 变换方法预先假定解具有某种衰减率. 把 Ce^{-kx} 添加到 $y(x)$ 会破坏 $y(x)$ 原先已具备的任一衰减性质, 因为如果 $k > 0$, 则当 $x \to -\infty$ 时 $e^{-kx} \to \infty$. 然而, 在应用中, 往往需要在某种意义下衰减的解. 如果存在这样的解, Fourier 变换方法将很可能提供这些解而不是任一无关的不衰减的解, 例如, 如果 $f(x)$ 是连续的且在一有限区间外为零, 则 (12) 是 (10) 唯一的有界解 (即, $|y(x)| <$ 常数). 另一方面, 如果不小心, 如果用 (11) 的话, 解 (12) 可能会漏掉. □

例 4 令 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的速减函数, 令

$$F(\xi)=2\int_0^{\infty} f(x)\cos(\xi x)d'x.$$

[这是 $f(x)$ 限制在 $(0,\infty)$ 上的 "Fourier 余弦变换"(参看第 7.5 节).] 证明: 如果 $F(\xi)$ 的图像在离开 $\xi=0$ 任意远处穿过 ξ–轴, 则所有奇数阶导数 $f^{(2k+1)}(0)$ 等于零. 特别, 如果

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(即, 如果 $f(x)$ 用它的 Taylor 级数给出), 则 $f(x)$ 必是偶函数.

解 通过反复利用 Green 公式 (或通过两次分部积分), 得

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(\xi)&=\int_0^{\infty} f(x)\cos(\xi x)dx\\&=-\frac{1}{\xi^2}\Big([-f(x)\xi\sin(\xi x)-f'(x)\cos(\xi x)]\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} f''(x)\cos(\xi x)dx\Big)\\&=-\frac{1}{\xi^2}f'(0)-\frac{1}{\xi^2}\int_0^{\infty} f''(x)\cos(\xi x)dx\\&=-\frac{1}{\xi^2}f'(0)-\frac{1}{\xi^2}\Big(-\frac{1}{\xi^2}f^{(3)}(0)-\frac{1}{\xi^2}\int_0^{\infty} f^{(4)}(x)\cos(\xi x)dx\Big)\\&=\cdots=\sum_{k=0}^{p}\Big(\frac{(-1)^{k+1}}{\xi^{2k+2}}f^{(2k+1)}(0)\Big)-\frac{(-1)^p}{\xi^{2p+2}}\int_0^{\infty} f^{(2p+2)}(x)\cos(\xi x)dx.\end{aligned}$$

为了导出矛盾, 假设 $f^{(2p-1)}(0)$ 是第一个不为零的奇数阶导数. 则上式成为

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}}F(\xi)=&\ \frac{(-1)^p}{\xi^{2p}}f^{(2p-1)}(0)\\&+\frac{(-1)^{p+1}}{\xi^{2p+2}}\Big(f^{(2p+1)}(0)+\int_0^{\infty} f^{(2p+2)}(x)\cos(\xi x)dx\Big).\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是速减的, 所以大圆括号中的项是 ξ 的有界函数. 因此,

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{2p}F(\xi)=(-1)^p f^{(2p-1)}(0)\neq 0.$$

然而, 由于假设当 $|\xi|$ 趋于 ∞ 的过程中有无穷多个 ξ 的值使 $F(\xi)=0$, 所以该极限 (如果存在的话) 必为零. □

例 5 令 $f(x)$ 是偶的, 绝对可积函数, 对于 $x > 0$ 是 C^2, 且满足 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. 假设 $f'(0^+)$ 存在且对 $x > 0$ 有 $f''(x) \geqslant 0$(例如, 一个合适的选取是 $f(x) = e^{-|x|}$). 证明 $\hat{f}(\xi) \geqslant 0$.

解 由于 $f(x)$ 是偶的和绝对可积的, 所以有

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}d'x = 2\lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{R}}^{R} f(x)\cos(\xi x)d'x. \tag{13}$$

由 Green 公式, $f''(x)\cos(\xi x) \leqslant f''(x)$ 的事实以及微积分基本定理, 得

$$\begin{aligned}
&-\xi^2 \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{R}}^{R} f(x)\cos(\xi x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{d^2}{dx^2}(\cos(\xi x))f(x)dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left((-f(x)\sin(\xi x)\xi - f'(x)\cos(\xi x)) \Big|_{\frac{1}{R}}^{R} + \int_{\frac{1}{R}}^{R} f''(x)\cos(\xi x)dx \right) \\
&\leqslant f'(0^+) + \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{1}{R}}^{R} f''(x)dx = f'(0^+) + \lim_{R\to\infty} \left(f'(R) - f'(\frac{1}{R})\right) \\
&= f'(0^+) - f'(0^+) = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

由 (13) 和 (14), 对 $\xi \neq 0$, 有 $\hat{f}(\xi) \geqslant 0$. 另外, 由控制收敛定理的连续形式 (参看附录 3 中的 (4′)), 得 $\hat{f}(0) = \lim_{\xi\to 0} \hat{f}(\xi) \geqslant 0$. 作为另一种证法, 由于对 $x > 0$ 有 $f''(x) \geqslant 0$ 以及 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, 所以对 $x > 0$ 有 $f'(x) \leqslant 0$. 则对 $x > 0$, $f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_x^R -f'(t)dt \geqslant 0$, 由于 $f(x)$ 是偶的, 所以对所有 $x \neq 0$, 有 $f(x) \geqslant 0$. 于是 $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d'x \geqslant 0$. □

注记 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi)d\xi = 1$ 的函数 $\rho(\xi) \geqslant 0$ 称为**概率密度**. 在概率论中, 函数 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ 称为 $\rho(\xi)$ 的**特征函数**. 函数 $f(x)$ 是一概率密度的特征函数的必要条件是 $f(0) = 1$. 在例 5 中关于 $f(x)$ 的条件连同 $f(0) = 1$ 确保 $f(x)$ 是某个概率密度的特征函数. 由第 7.3 节中的反演定理, 概率密度是 $\hat{f}(\xi)/\sqrt{2\pi}$. 特别, $f(x) = e^{-|x|}$ 是 Cauchy 概率密度 $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}$ 的特征函数. □

概要 7.2

1. 衰减阶: 一函数 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ 称为具有**衰减阶**(m, n), 其中 m 和 n 是非负整数, 如果 $f(x)$ 是 C^m 且存在常数 K, 使得对所有满足 $|x| \geqslant 1$ 的 x, 有

$$|f(x)| + |f'(x)| + \cdots + |f^{(m)}(x)| \leqslant \frac{K}{|x|^n}. \tag{S1}$$

对所有的 $m,\ n \geqslant 0$, 具有衰减阶 (m,n) 的函数称为**速减的**. 定理 1 表明, 对任意的 $m,\ n \geqslant 0$, 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(m,n+2)$, 则 $\hat{f}(\xi)$ 具有衰减阶 (n,m). 特别, 速减的函数的 Fourier 变换也是速减的.

2. Fourier 变换的性质: $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$. 这里我们列出在该节建立的性质并指出在哪里有关于它们确切条件的叙述. (对条目 E, 见第 7.1 节的例 6.)

A. $\left(\frac{df}{dx}\right)^\wedge(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$ (命题 1)

B. $[f^{(m)}(x)]^\wedge(\xi) = i^m\xi^m\hat{f}(\xi)$ (推论 1)

C. $i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = [xf(x)]^\wedge(\xi)$ (命题 2)

D. $i^n\frac{d^n\hat{f}}{d\xi^n}(\xi) = [x^nf(x)]^\wedge(\xi)$ (推论 2)

E. $(e^{-\frac{1}{2}ax^2})^\wedge(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}a^{-1}\xi^2}$ $(a>0)$

F. $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)^\wedge(\xi)$ (定理 2),

其中 $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$ 是 f 和 g 的**卷积**. 更完全的 Fourier 变换性质以及特殊的 Fourier 变换表在附录 5 给出.

练习 7.2

1. 证明: 如果 $f(x)$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积, 则

(a) $[e^{ibx}f(ax)]^\wedge(\xi) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\xi-b}{a})$, a, b 是实数, $a \neq 0$

(b) $[f(\frac{x+b}{a})]^\wedge(\xi) = ae^{ib\xi}\hat{f}(a\xi)$, a, b 是实数, $a \neq 0$.

2. 利用第 7.1 节例 6 的结果和推论 2 来求以下每个函数的 Fourier 变换:

(a) $f(x) = x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (b) $g(x) = x^4e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, $a>0$.

3. 证明: 如果 $f(x)$ 对所有的 x 有定义且具有衰减阶 $(2,4)$(即 f 是 C^2 的且对某个常数 $K>0$, 有 $|f(x)|+|f'(x)|+|f''(x)| \leqslant K|x|^{-4}$, $|x| \geqslant 1$), 则

$$[f''(x) - x^2f(x)]^\wedge(\xi) = \hat{f}''(\xi) - \xi^2\hat{f}(\xi).$$

4. 证明: 如果 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上, 且具有衰减阶 $(m,2)$, $m \geqslant 1$, 则 $f'(x)$ 具有衰减阶 $(m-1,2)$.

5. 如果 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ 具有衰减阶 (m,n), 则 $f(x)$ 也具有衰减阶 (m',n'), 其中 $0 \leqslant m' \leqslant m$ 和 $0 \leqslant n' \leqslant n$.

6. 证明: 如果 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ 具有衰减阶 $(0,n+2)$, 则对所有的实数 ξ, 有

$$i^n\frac{d^n}{d\xi^n}\hat{f}(\xi) = [x^nf(x)]^\wedge(\xi).$$

7. 求以下函数的 Fourier 变换

$$f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x}, & 如果 \quad x\geqslant 0\\ 0, & 如果 \quad x<0.\end{cases}$$

8. 考虑正文中的例 3, 其中 $k=-1$ 和 $f(x)\equiv 1$. 则要解的问题是很简单的常微 $y'(x)-y(x)=1$. 用 Fourier 变换可能求得该常微的解吗?

提示 参看等式 (11) 后面的评注.

9. 证明: 如果 $p_m(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, $a_m\neq 0, m\geqslant 1$, 是 m 次多项式, 则对某个正常数 d_m, 对 $|x|\geqslant 1$ 有 $|p_m(x)|\leqslant d_m|x|^m$.

10. (a) 对常微 $y''(x)-y(x)=f(x)$, 证明 Fourier 变换和卷积定理的形式运用得到形式解 $y(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-z|}f(z)dz$.

提示 由第 7.1 节的例 3, 得 $e^{-|x|}$ 的 Fourier 变换是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2(1+\xi^2)^{-1}$.

(b) 通过记

$$y(x)=\frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{x}e^{y-x}f(y)dy+\int_{x}^{\infty}e^{x-y}f(y)dy\Big)$$

以及运用 Leibniz 法则的一般形式 (参看附录 3), 证明: 如果 $f(x)$ 是连续的和绝对可积的或是有界的, 则该形式解是有效的.

11. 对以下情形验证卷积定理:

(a) $f(x)=g(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (b) $f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & 对 \ |x|\leqslant 1,\\ 0 & 对 \ |x|>1.\end{cases}$

提示 (对 (b)). 先证明 $(f*g)(x)=\begin{cases}0, & 对 \ |x|>2,\\ 2-|x|, & 对 \ |x|\leqslant 2.\end{cases}$

12. 令 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 是速减函数, 且 α 是常数. 证明

(a)$f*(\alpha g)=(\alpha f)*g=\alpha(f*g)$ (b)$f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$ (c)$f*g=g*f$.

13. (a) 在第 7.1 节例 6 的计算中, 我们得到 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx=\sqrt{2\pi/a}$. 取 $a=2b$, 得 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-bx^2}dx=\sqrt{\pi/b}$. 对该公式关于 b 求导 n 次得到:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-bx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{\sqrt{b}(4b)^n n!}.$$

(b) 证明: 对 $m=0,1,2,\cdots$, $f_m(x)=x^me^{-\frac{1}{2}x^2}$ 是速减函数.

(c) 回忆起 $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx$, 证明 (利用 (a) 对 $b=1$ 的结果)

$$\langle f_m,f_n\rangle=\begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}(m+n)!}{2^{m+n}(\frac{m+n}{2})!}, & 如果 \ m+n \ 是偶数,\\ 0, & 如果 \ m+n \ 是奇数.\end{cases}$$

14. (a) 由习题 13 的 (c) 部分得知 f_0, f_1, $f_2, \cdots$ 不是两两正交的 (例如, $\langle f_0, f_2\rangle \neq 0$). 求常数 c, 使得 $(x^2+c)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 跟 f_0 和 f_1 正交.

(b) 令 V_{n+1} 是所有 f_0, $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合的集合. 因为 V_n 是 $n+1$ 维空间 V_{n+1} 的 n 维子空间, 所以应该确实存在一个形如 $f_n + a_{n-1}f_{n-1} + \cdots + a_0 f_0$ 的函数, 它与 f_0, f_1, $\cdots, f_{n-1}$ 正交 (因此与 V_n 中所有函数正交). 利用分部积分证明该函数为

$$k_n(x) = (-\frac{1}{2})^n e^{\frac{1}{2}x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

计算 $k_1(x)$, $k_2(x)$ 和 $k_3(x)$. 注意到因子 $(-\frac{1}{2})^n$ 确保 $k_n(x)$ 具有形式 $p_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 其中 $p_n(x)$ 是首一 n 次多项式 (即 x^n 的系数是壹).

(c) 利用 (b) 部分证明函数 $k_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 是两两正交的. 并证明 $\|k_n\|^2 = \langle f_n, k_n\rangle = 2^{-n}n!\sqrt{\pi}$.

(d) (i) 验证 $k_n'(x) = xk_n(x) - 2k_{n+1}(x)$(即, $k_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[xk_n(x) - k_n'(x)]$).

(ii) 还验证 $xk_n(x) + k_n'(x) = nk_{n-1}(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$(其中 $0k_{-1}(x) \equiv 0$).

提示 对 (ii), 证明 $xk_n(x) + k_n'(x) = p_n'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 其中 $k_n(x) = p_n(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ 如同在 (b) 部分. 然后利用分部积分证明 $xk_n(x) + k_n'(x)$ 与 $f_m(x)$, $m = 0, \cdots, n-2$ 正交. 从 (b) 部分得出 $xk_n(x) + k_n'(x)$ 与 $k_{n-1}(x)$ 成比例.

(e) 利用 (d) 部分的 (i) 以及命题 1 和命题 2, 验证 $\hat{k}_{n+1}(\xi) = \frac{i}{2}[\hat{k}_n'(\xi) - \xi\hat{k}_n(\xi)]$, 于是有 $i^{n+1}\hat{k}_{n+1}(\xi) = \frac{1}{2}[i^n\hat{k}_n'(\xi) - i^n\xi\hat{k}_n(\xi)]$.

(f) 因为由第 7.1 节的例 6, $\hat{k_0}(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2} = k_0(\xi)$, 且由于函数列 $i^n\hat{k}_n(\xi)$ 和 $\hat{k}_n(\xi)$ 满足相同的递推公式 [见 (d) 和 (e)], 所以得出 $k_n(\xi) = i^n\hat{k}_n(\xi)$ 或等价地, $\hat{k}_n(\xi) = (-i)^n k_n(\xi)$. 特别, k_0, k_4, $k_8, \cdots$ 与它们的 Fourier 变换相等. 用线性代数的术语来说,Hermite 函数是 Fourier 变换具特征值 $1, i, -1, -i, \cdots$ 的特征向量.

注记 函数 $k_n(x)$ 与 **Hermite函数**成比例, 而 $p_n(x)$ 与 **Hermite特征多项式** 成比例. 这些函数出现在量子力学调和振荡子的研究中, 在第 8.5 节将来研究它们 (也可参看下面的习题 16). 由下一个习题和反演定理 (参看第 7.3 节) 得到: 在没有非零的衰减阶为 $(0,2)$ 的函数与所有 Hermite 函数正交的意义下, Hermite 函数所成由衰减阶为 $(0,2)$ 的函数所成的空间中的一个完全正交函数族.

15. 设 $f(x)$ 是衰减阶为 $(0,2)$ 的函数, $h(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 证明下面计算的正当性, 并利用卷积定理推断: 如果 $f(x)$ 与所有形如 $x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的函数(或等价地, $k_n(x)$) 正交, 则 $\hat{f}(\xi) \equiv 0$.

$$\begin{aligned}(f*h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2}dy = e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(y)\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}\right)dy \\ &= e^{-\frac{1}{2}x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)y^n e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right).\end{aligned}$$

提示 为了证明求和与积分可交换次序, 只要 (参看附录 3 中的控制收敛定理) 找出一个函数 $g(y)$, 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(y)|\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}\leqslant g(y)$$

和 $\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dy<\infty$. 由于 $|f(y)|\leqslant M$, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(y)|\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n y^n}{n!}e^{-\frac{1}{2}y^2}=Me^{xy-\frac{1}{2}y^2},$$

对每个固定的 x, 它关于 y 的积分是有限的 (为什么?).

16. 令 H 是由以下定义的微分算子

$$[Hf](x)=\frac{1}{2}(-f''(x)+x^2f(x)).$$

在量子力学中 (参看第 8.5 节), H 本质上是调和振荡子的能量算子. H 的特征值是那些使得 Schrödinger 方程 $Hf=\lambda f$ 对某个非零函数 f(称为 H 的特征函数, 参看第 4.4 节) 成立的常数 λ.

(a) 从 H 的特殊形式验证: 对任意速减函数 f, 有 $[Hf]^\wedge(\xi)=\frac{1}{2}(-\hat{f}''(\xi)+\xi^2\hat{f}(\xi))=[H(\hat{f})](\xi)$. 推断如果 f 是 H 的特征函数, 则 $\hat{f}$ 也是 H 的具相同特征值的特征函数.

(b) 验证习题 14(b) 中定义的函数 $k_n(x)$ 是 H 的特征值为 $n+\frac{1}{2}$ 的特征函数.(以适当的单位下, 这些特征值表示量子力学振荡子的能级).

提示 先证明对任意 C^2 函数 $f(x)$, 有

$$\frac{1}{2}(-f''(x)+x^2f(x))=\frac{1}{2}(-\frac{d}{dx}+x)(\frac{d}{dx}+x)[f(x)]+\frac{1}{2}f(x).$$

考虑 $f(x)=k_n(x)$, 并利用习题 14 的 (d) 部分的 (i) 和 (ii).

(c) 验证对任意形如 $q_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $H[q_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}]$ 是相同形式的其他函数, 其中 $q_n(x)$ 是次数为 n 的多项式.

注记 从 (c) 部分的结论, 也许可猜测 Hermite 函数 $k_n(x)$ 是 H 的特征函数 (参看习题 14(f)). 的确, 对熟悉线性代数的读者来说, H 是习题 14(b) 中的 V_{n+1} 上的对称算子 (由 Green 公式), 且 H 保持 V_n 不变. 由此得到 V_{n+1} 中的任意向量与 V_n 正交. (比如, $k_n(x)$ 经 H 必映到自身的一个非零常数倍 (即, $k_n(x)$ 必是 H 的特征函数).

17. 令

$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

注意到 $H_n(x)$ 是习题 14(b) 中的多项式 $p_n(x)$ 的非零常数倍, 即 $H_n(x)$ 与一个 Hermite 多项式成比例. 令 z 是另一个变量并令 D 表示算子 $\frac{d}{dx}$.

(a) 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)z^n=e^{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D^n(e^{-x^2})}{n!}(-z)^n=e^{x^2}e^{-(x-z)^2}=e^{2xz-z^2}.$$

(b) 由以下定义 $u(x,t,z)$ 和 $K_n(x,t)$:

$$u(x,t,z)=e^{2xz+tz^2}=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,t)z^n.$$

证明 $K_n(x,t)$ 满足热方程 $v_t=\frac{1}{4}v_{xx}$.

提示 对每个 z, 函数 $u(x,t,z)=e^{2xz+tz^2}$ 满足该热方程. 对 $v_t=\frac{1}{4}v_{xx}$ 两边关于 z 求导 n 次, 并求在 $z=0$ 的结果.

注记 注意到 $K_n(x,-1)=H_n(x)$, 而 $K_n(x,0)=2^nx^n/n!$. 因此, 很奇妙地, 后退一个时间单位单项式转化成 Hermite 多项式.

18. **(Poisson求和公式)**. 令 $f(x)$ 是任一分段连续的函数, 对每个 x, $-\infty<x<\infty$, 有定义, 使得和 $F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2kL)$ 收敛 (绝对收敛) 到一连续和分段 C^1 的函数 $F(x)$. 假设这种收敛关于 $-L\leqslant x\leqslant L$ 是一致的.

(a) 证明 $F(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 且跟它的 Fourier 级数相等.

(b) 在 $F(x)$ 的复 Fourier 级数中令 $x=0$, 得到 Poisson 求和公式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(2kL)=F(0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{m\pi}{L}). \qquad (*)$$

特别关注最后的等式.

(c) 证明: 如果 $f(x)$ 具有衰减阶 $(1,2)$(即 $f(x)$ 是 C^1 的, 且对某个 K, 对所有的 $|x|\geqslant 1$, 有 $|f(x)|+|f'(x)|\leqslant K|x|^{-2}$), 则关于 $f(x)$ 的假设都满足.

19. 由形式运用习题 18 的公式 $(*)$, 来求以下无穷级数的简单表达式:

(a) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(am)}{m}$ (b) $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(am)}{m}\right)^2$ (c) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{a^2+m^2}$ $(a\neq 0)$.

20. (a) 通过在习题 18 的 $(*)$ 中取 $f(x)=(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2/4t}$, $t>0$, 证明

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-L^2k^2/t}=\frac{1}{2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-tm^2\pi^2/L^2}. \qquad (**)$$

著名的 **Jacobi theta函数**是由 $\theta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2t}$ 定义. 由在 $(**)$ 中取 $L=\sqrt{\pi}$ 来验证 $\theta(\frac{1}{t})=\sqrt{t}\theta(t)$.

(b) 令

$$\omega(t)=\frac{1}{4}e^t\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2e^{4t}}.$$

利用 (a) 部分的结果证明重要的事实: $\omega(t)$ 是 t 的偶函数.

注记 令 $\Phi(t)=\omega''(t)-\omega(t)$. 则由 (b) 部分, $\Phi(t)$ 也是偶函数. 数学中最著名的公开问题之一是所谓的 **Reimann假设**, 它等价于断言: $\Phi(t)$ 的 Fourier 余弦变换, 即

$$F(x)=\int_0^{\infty}\Phi(t)\cos(xt)dt,$$

只有实零点. 著名德国数学家 Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826—1866) 1859 年在他的 8 页划时代的题为 *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*("关于小于一给定数值的素数的个数") 论文中叙述了该猜测 (也可参看 [H.M.Edwards, 1974], [G.Pólya, 1974]).

21. (a) 利用 Fubini 定理 (参看附录 2) 证明两个绝对可积的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积 $(f*g)(x)$ 也是绝对可积的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|dydx < \infty.$$

(b) 由 (a) 部分以及卷积定理推断: 两个绝对可积函数的 Fourier 变换的乘积也是一个绝对可积函数的 Fourier 变换. 可以利用事实: 卷积定理对任意两个绝对可积函数成立.
(c) 由 (b) 部分推断: 如果 $p(z)$ 是满足 $p(0)=0$ 的任意多项式, 则 $p(\hat{f}(\xi))$ 是一绝对可积的函数 Fourier 变换, 只要 $f(x)$ 是绝对可积的.
(d) 为什么在 (c) 部分中条件 $p(0)=0$ 是必要的?

提示 对任意绝对可积函数 $h(x)$, 由第 7.1 节的习题 10(c), 有

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}|\hat{h}(\xi)|=0.$$

§7.3 反演定理和 Parseval 等式

既在应用中 (参看在第 7.1 节前的注记) 也在纯数学中的 Fourier 变换的一个基本性质是: 对 f 和 g 较弱的假设下, 如果 $\hat{f}(\xi)=\hat{g}(\xi)$, 则 $f(x)=g(x)$. 换言之, 我们可由 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$ 来重新获得适当的函数 $f(x)$. 在本章的末尾 (补充) 我们证明:

反演定理 设 $f(x)$ 是分段 C^1 函数 (即 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在任意有限区间内分段连续的), 使得 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. 则对每个实数 x, 有

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{1}$$

特别, 如果还假设 $f(x)$ 是连续的, 则 $f(x)$ 通过反演公式 (1) 由 $\hat{f}(\xi)$ 确定. (1) 的右边看起来很像 $\hat{f}(\xi)$ 的 Fourier 变换, 只是在 $i\xi x$ 前没有负号. 由于该积

分实质上还原成 $f(x)$, 所以右边是 $\hat{f}(\xi)$ 的逆 Fourier 变换. 更精确地, 有

定义 函数 $g(\xi)$ 的**逆 Fourier 变换** $\check{g}(x)$ 由以下定义

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi x}d'\xi = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} g(\xi)e^{i\xi x}d'\xi,$$

只要该极限存在, 其中 $d'\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\xi$.

对一个连续的分段 C^1 函数 $f(x)$, 且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$, 反演定理简单表明 $[\hat{f}(\xi)]^{\vee}(x) = f(x)$.

注记 一个绝对可积函数的 Fourier 变换不必是绝对可积的. 的确, 由第 7.1 节的例 4 ($L = 1$) 得知, 下面的绝对可积函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{如果} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

的 Fourier 变换是 $\hat{f}(\xi) = \frac{2\sin\xi}{\xi}$. 可证 (参看习题 4) $\hat{f}(\xi)$ 不是绝对可积的. 由于这个缘故, 反演定理中的积分 (1) 是视为 Cauchy 主值的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d'\xi = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \qquad \square$$

例 1 计算 $g(\xi) = \frac{1}{a^2+\xi^2}$ $(a > 0)$ 的逆 Fourier 变换.

解 如果要直接计算, 那就需要计算积分

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{a^2+\xi^2}d'\xi.$$

虽然利用复围线积分计算它不难, 但我们利用反演定理来进行间接计算. 由第 7.1 节的例 3 得知 Fourier 变换是 $g(\xi)$ 的函数为 $g(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}$. 因此, 由反演定理立刻得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{a^2+\xi^2}d'\xi = \check{g}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}. \qquad \square(2)$$

注记 假设在 (2) 中作变量变换 $\xi \to x$ 和 $x \to -\xi$. 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2}d'x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|\xi|}. \qquad (2')$$

因此, 我们也求出 $\frac{1}{a^2+x^2}$ 的 Fourier 变换! 相同的论证表明, 一般有 $\hat{g}(\xi)=\check{g}(-\xi)$. 的确, 我们有

$$\hat{g}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\xi x}d'x=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i(-\xi)x}d'x=\check{g}(-\xi). \tag{3}$$

换言之, 一个函数的 Fourier 变换的图像正好是该函数的逆 Fourier 变换的图像在垂直坐标轴上的反射. 对适当的函数 f, 令 $g=\hat{f}$, 根据反演定理, 由 (3) 得到 $(\hat{f})^\wedge(\xi)=(\hat{f})^\vee(-\xi)=f(-\xi)$(即, 对一个函数施行两次 Fourier 变换具有反射该函数的图像的效果). 施行四次 Fourier 变换将重新回到原函数 (即 $f^{\wedge\wedge\wedge\wedge}=f$; 为什么?). □

Fourier 变换与复 Fourier 级数的关系

反演公式与 Fourier 级数的收敛结果 (参看第 4.2 节) 相象. 的确, 当 $f(x)$ 是 C^2 且在一个有限区间之外为零时, 可用复 Fourier 级数来证明反演公式 (1). 为此, 令 $f_L(x)$ 是 f 限制在区间 $[-L,L]$ 上的函数. 对任意数 x_0, 取 L 如此大, 使得 $-L<x_0<L$, 且对 $|x|>L$, $f(x)=0$. 由第 4.2 节定理 2 的复 Fourier 级数形式, 得

$$f(x_0)=f_L(x_0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi x_0/L},\quad \text{其中}\quad c_m=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)e^{-im\pi x/L}dx.$$

由于在 $[-L,L]$ 内 $f=f_L$ 以及在 $[-L,L]$ 之外 $f=0$, 故有

$$c_m=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-im\pi x/L}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-im\pi x/L}d'x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\hat{f}(\frac{m\pi}{L}). \tag{4}$$

因此,

$$f(x_0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2L}\hat{f}(\frac{m\pi}{L})e^{im\pi x_0/L}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{m\pi}{L})e^{im\pi x_0/L}\cdot\frac{\pi}{L}. \tag{5}$$

因为 (5) 的最左端是与 L 无关的常数, 故最右端的和也必是与 L 无关. 然而, 该和是以下积分的 Riemann 和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x_0}d'\xi, \tag{6}$$

其中划分的区间具有长度 $\triangle\xi=\pi/L$. 在 f 是 C^2 的假设之下, 由第 7.2 节的定理 1 得知 $\hat{f}(\xi)$ 是连续的 (的确, 是 C^∞ 的) 且对 $|\xi|\geqslant 1$ 有 $|\hat{f}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{-2}$. 因

此, (6) 存在且 Riemann 和 (5) 当 L 趋于无穷时 (即, 当 $\triangle\xi \to 0$ 时) 趋于 (6). 然而, 我们已注意到 (5) 中的和与 L 无关, 因此每个和必等于 (6). 于是当 $L \to \infty$ 时, (5) 变成

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x_0} d'\xi,$$

且它对所有的 x_0 成立, 只要 $f(x)$ 是在一有限区间之外为零的 C^2 函数. 为了得到更一般的反演定理, 我们需要一个不同的论证 (参看本章末尾的补充). 然而, 由于我们将只利用反演定理来得到偏微的假设性解 (它将被个别验证), 所以对这种一般性就没有很大的必要.

也可能利用复 Fourier 级数的 Parseval 等式来得到在一有限区间之外为零的 C^1 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$(参看习题 12) 的 Parseval 等式 (参看下面的 (7)). 而我们将利用反演定理来证明以下 Parseval 等式更一般的形式:

Parseval 等式 如果 $f(x)$, $\hat{f}(\xi)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是绝对可积的, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是分段 C^1 的, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi. \tag{7}$$

证明 在下面的计算中, 为了对 $f(x)$ 运用反演定理以及为了交换积分次序 (参看附录 2) 是正当的, 我们利用了假设条件,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d'\xi\right) \overline{g(x)}dx \quad \text{(反演定理)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{g(x)} e^{i\xi x} d'\xi dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{g(x)} e^{i\xi x} d'x d\xi \quad \text{(附录 2)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} d'x\right)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.
\end{aligned}$$

注意到在第一个等式的右边的逆变换在每个有限区间中可以有有限多个点不同于 $f(x)$, 但这不影响该积分的值. □

注记 当 $g = f$ 时, 由 Parseval 等式得到: 对任意速减函数 f, 有 $\|f\| = \|\hat{f}\|$, 其中 $\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$. 这意味着 Fourier 变换是由速减函数组成的向量

空间的一个 "旋转", 因为函数的长度保持不变. 该事实可用于把 Fourier 变换的概念延拓到更一般的函数类上去 (例如, $\|f\| < \infty$ 的平方可积函数, 但可以不是绝对可积的, 比如 $x/(1+x^2)$). 在通常的空间中, 一个不改变任意点到原点距离的线性变换必是可能由反射产生的一个旋转. 在由速减函数组成的无穷维空间中, 我们已证明 (参看第 7.2 节的习题 14) 存在正交 Hermite 函数族 $k_0(x)$, $k_1(x)$, $k_2(x), \cdots$, 满足 $\hat{k}_n(\xi) = (-i)^n k_n(\xi)$(即,$k_n$ 在复平面经旋转 $-n \cdot \frac{\pi}{2}$ 的值). □

附加例子

例 2 求 $h(x) = x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 的 Fourier 变换.

解 利用定义

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-i\xi x} d'x,$$

直接计算 $\hat{h}(\xi)$ 并非易事. 可以对 $e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-i\xi x} d'x$ 关于 ξ 求导 n 次来得到想要的结果. 而我们的技巧是利用关系 $\hat{h}(\xi) = \check{h}(-\xi)$(参看 (3)). 换言之, 来计算 $\hat{h}(\xi) = \xi^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ 的逆变换 $\check{h}(x)$, 然后用 $-\xi$ 替换 $\check{h}(x)$ 中的 x 得到 $\hat{h}(\xi)$ (参看 (3)). 为计算 $\check{h}(x)$, 对 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 利用公式 $\xi^n \hat{f}(\xi) = i^{-n}[f^{(n)}(x)]^\wedge(\xi)$ (参看第 7.2 节的推论 1), 结果有 $\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$. 由反演定理, 得

$$\check{h}(x) = [\xi^n \hat{f}(\xi)]^\vee(x) = [i^{-n}[f^{(n)}(x)]^\wedge]^\vee(x) = i^{-n} f^{(n)}(x) = i^{-n} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{1}{2}x^2}).$$

因此,

$$\hat{h}(\xi) = \check{h}(-\xi) = i^{-n}(-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\frac{1}{2}\xi^2}) = i^n \frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\frac{1}{2}\xi^2}) = i^n p_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2},$$

其中 $p_n(\xi)$ 是次数为 n 的多项式. 我们有 $p_0(\xi) = 1$, $p_1(\xi) = -\xi$, $p_2(\xi) = \xi^2 - 1$, 用归纳法计算, 一般地有: $p_{n+1}(\xi) = -\xi p_n(\xi) + p_n'(\xi)$. □

例 3 利用 Parseval 等式和 (2′) 计算 $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^4} dx$.

解 令 $g(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}$. 由 Parseval 等式和第 7.2 节的命题 1, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(g')^\wedge(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8}\pi \xi^2 e^{-2|\xi|} d\xi \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-2\xi} d\xi = \frac{\pi}{4}\Big(-\frac{1}{2}\xi^2 e^{-2\xi}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \xi e^{-2\xi} d\xi\Big) \\ &= \frac{\pi}{4}\Big(-\frac{1}{2}\xi e^{-2\xi}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2\xi} d\xi\Big) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

□

例 4 根据形式计算, 以 $\hat{f}(\xi)$ 和 $(\hat{f})'(\xi)$ 表示

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-s)f(x-s)f'(s)ds$$

的 Fourier 变换. 阐述在什么条件下这些计算是有效的.

解 令 $g(x) = xf(x)$. 则 $h(x) = (g * f')(x)$, 然后由卷积定理, 得

$$\hat{h}(\xi) = (g * f')^{\wedge}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(\xi)[f'(x)]^{\wedge}(\xi).$$

现由第 7.2 节的命题 1 和命题 2, 得

$$\hat{g}(\xi) = i\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) \quad 和 \quad [f'(x)]^{\wedge}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi),$$

由此得

$$\hat{h}(\xi) = -\sqrt{2\pi}\xi\hat{f}(\xi)\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi).$$

命题 1 和命题 2 分别要求 $f(x)$ 是具衰减阶 $(1,2)$ 和 $(0,3)$, 因此, 如果 $f(x)$ 是具衰减阶 $(1,3)$ 的话, 两个命题都能运用. 然后 $xf(x)$ 和 $f'(x)$ 还要满足定理 2(卷积定理) 中的条件. 于是, 这只要取 $f(x)$ 具有衰减阶 $(1,3)$. □

卷积定理和反演定理可用来解某些积分方程, 如下例所示.

例 5 解以下积分方程中的 $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{(x-s)^2+b^2}ds = \frac{1}{x^2+a^2} \quad (a > b > 0). \tag{8}$$

可假设 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx < \infty$ 以及 g 是 C^1 的.

解 如果令 $f(x) = \frac{1}{x^2+b^2}$, 则 (8) 成为 $(f*g)(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$. 于是, 由卷积定理, 得

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{\wedge}(\xi). \tag{9}$$

现由例 1, 有

$$\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|\xi|}. \tag{10}$$

利用 (10)(以 b 替换 a) 求出 $\hat{f}(\xi)$, (9) 成为 $\hat{g}(\xi) = \frac{b}{a\sqrt{2\pi}}e^{-(a-b)|\xi|}$. 再运用 (10)(以 $a-b$ 替换 a) 以及利用反演定理, 得到

$$g(x) = \frac{b(a-b)}{a\pi(x^2+(a-b)^2)}.$$

□

Fourier 变换与 Laplace 变换之间的关系

设 $f(t)$ 是对 $t<0$ 为零的函数. 则

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\xi t}dt=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-i\xi t}dt.$$

虽然前面总把 ξ 看作实数, 如果令 $\xi=-is$, 则有

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(-is)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt. \tag{11}$$

(11) 的右端称为 $f(t)$ 的 **Laplace变换**, 记作

$$\mathrm{L}\ f(s)\equiv\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\sqrt{2\pi}\hat{f}(-is). \tag{12}$$

因此, (12) 表明 f 的 Laplace 变换在 s 处实质上是 f 的 Fourier 变换在 $-is$ 处的值. 公式 (12) 说明这些变换具有许多共有性质. (12) 中的衰减因子 $e^{-st}(s>0)$ 使得对当 $t\to\infty$ 时不必是衰减的广泛的函数类可施行 Laplace 变换. 的确, 如果 $|f(t)|\leqslant Ke^{at}$, a 和 K 为某常数, Laplace 变换将对充分大的 s 有定义. 因此, 可大胆地应用 Laplace 变换技巧来解常系数常微方程组, 因为已经知道这些解最多是以指数增长. 而且, 对这种方程组的初值问题可转换成令人满意的代数问题. 然而, 对那些当 $t<0$ 时不恒为零的函数, Laplace 变换不理会 $t<0$ 的 $f(t)$ 的值 (为什么?), 于是这种函数一般不能从它们的 Laplace 变换完全复原. 因此, 尽管有苛刻的衰减要求, 当希望对不限制变量的函数做变换时 (例如, $f(x)$, $-\infty<x<\infty$), Fourier 变换通常比 Laplace 变换更可取.

概要 7.3

1. 反演定理: 设 $f(x)$ 是分段 C^1 函数 (即, $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在任意有限区间是分段连续的), 且有 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. 则对所有实数 x, 有

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{S1}$$

反演定理的证明在本章末尾的补充中, 但在本节, 当 $f(x)$ 是 C^2 的且在一个有限区间之外为零的情形证明了反演定理, 此结果可通过利用 Fourier 级数的收敛定理 (第 4.2 节的定理 2) 来证明.

2. 逆 Fourier 变换: 函数 $g(\xi)$ 的逆 Fourier 变换是

$$\check{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d'\xi = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(\xi) e^{i\xi x} d'\xi,$$

只要该极限存在, 其中 $d'\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\xi$. 反演定理表明, 对适当的函数 $f(x)$(即, 连续的, 分段 C^1 的, 以及绝对可积的), 我们有 $(\hat{f})^{\vee}(x) = f(x)$. 一个函数的 Fourier 变换的图像是该函数逆 Fourier 变换的图像在垂直的坐标轴上的反射 (即, $\hat{g}(\xi) = \check{g}(-\xi)$). 特别, 对适当的函数 $f(x)$, 满足 $g = \hat{f}$, 得到 $(\hat{f})^{\wedge}(\xi) = f(-\xi)$. 这使得是某个适当函数的 Fourier 变换的函数的 Fourier 变换的计算变得容易 (参看例 1). 另外, 对适当的函数 f, 有 $f^{\wedge\wedge\wedge\wedge} = f$.

3. Parseval 等式: 如果 $f(x)$, $\hat{f}(\xi)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是绝对可积的, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是分段 C^1 的. 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi. \tag{S2}$$

4. 积分方程: 卷积定理和反演定理可用来解某种积分方程 (参看例 5).

5. Laplace 变换: $f(t)$ 的 Laplace 变换由以下定义

$$\mathrm{L}\ f(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

因此, 如果 $f(t) = 0,\ t < 0$, 则 $\mathrm{L}\ f(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(-is)$.

练习 7.3

1. 求下列每个函数的逆 Fourier 变换:

(a) $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}$, $a > 0$ (b) $g(\xi) = i\frac{e^{-i\xi}-1}{\xi\sqrt{2\pi}}$ (c) $g(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}$.

提示 复习第 7.1 节的例子.

2. 证明: 两个速减函数 (参看第 7.2 节) 的卷积是速减函数.

3. 设 n 是一个正整数, 令 $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-s)^n f(x-s) f'(s)ds$. 用形式计算以 $\hat{f}(\xi)$ 和 $(\hat{f})^{(n)}(\xi)$ 来表示 $h(x)$ 的 Fourier 变换.

提示 参看例 4.

4. 令 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{如果} \quad x\neq 0\\ 1, & \text{如果} \quad x=0\end{cases}$. 证明 $\lim_{R\to\infty}\int_0^R|f(x)|dx$ 不存在.

提示 如果 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, $(n=1,2,\cdots)$, 则 $\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}$, 所以

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx=\frac{2}{(n+1)\pi}.$$

5. 利用基本公式 $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$ $(n=0,1,2,\cdots;\ \mathrm{Re}(a)>0)$ 求下列函数的 Fourier 变换

(a) $f_n(x)=[\frac{1}{2}(x+|x|)]^n e^{-x}$, $n=0,1,2,\cdots$

(b) $h_n(x)=[\frac{1}{2}(x+|x|)]^n\sin xe^{-x}$, $n=0,1,2,\cdots$

提示 对 (b) 部分, 利用公式 $2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$.

6. (a) 解积分方程 $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}b(x-y)^2}g(y)dy=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, 其中 $0<a<b$.

(b) 当 $a\geqslant b$ 时为什么会存在不绝对可积的, 分段连续的函数满足该方程?

提示 参看第 7.1 节的习题 10.

7. 利用 Parseval 等式计算下面定积分的值, 其中 a, $b>0$:

(a) $\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{(a^2+x^2)^2}dx$ (b) $\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2dx$

(c) $\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin(bx)}{x(a^2+x^2)}dx$ (d) $\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{-ax^2}}{b^2+x^2}dx$.

注记 如我们已经表述过的, 注意到 Parseval 等式不可用于 (b) 部分 (为什么?), 即使由此得出正确结果. 通过利用 (在 $x=0$) 结果 $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^\infty\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$, 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是分段连续和绝对可积 (这样可以应用第 7.2 节的卷积定理) 以及当 $(f*g)(x)$ 是连续的, 分段 C^1 和绝对可积时 (为了反演定理) 该结果是有效的, 来尝试严格证明 (b) 部分.

8. 令

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left(e^{-k\xi^2t}\int_0^t e^{k\xi^2s}\hat{q}(\xi,s)ds\right)e^{i\xi x}d\xi,\quad \text{其中 } k>0.$$

证明

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi k}}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_0^t\frac{q(y,s)}{\sqrt{t-s}}e^{-(y-x)^2/4k(t-s)}ds\right)dy,$$

为了允许交换积分次序, 假设 $q(y,s)$ 是足够好 (例如, 是有界和连续的).

9. 求满足以下积分方程的函数 $f(x)$

$$f(x)+\int_0^\infty f(x-t)e^{-t}dt=\frac{1}{1+x^2}.\qquad(*)$$

提示 令 $g(t)=e^{-t}$, $t\geqslant 0$, 且在其他处等于 0. 注意到 $(*)$ 中的积分是卷积 $(f*g)(x)$.

10. 计算下面积分的值

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\xi}{\xi^2}e^{i\xi x}d\xi.$$

提示 利用反演定理和第 7.1 节的习题 3.

11. 由考虑以 $e^{i\xi x}$ 替换 $\sin(\xi x)$ 产生的结果来计算下面积分的值

$$f(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}\xi\sin(\xi x)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi.$$

12. 在 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是 C^1 的, 且在某个有限区间, 比如 $[-L,L]$ 之外等于 0 的情形下, 证明从关于 Fourier 级数复形式的 Parseval 等式 (参看第 7.1 节) 可得 Parseval 等式 $\int_{\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi$.

提示 如同在 Fourier 级数推导反演定理过程中所做的, 用 $f(x)$ 的 Fourier 变换写出 $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 上的复 Fourier 系数. 然后对复 Fourier 级数应用 Parseval 等式, 再由 $L\to\infty$ 取极限, 从 Riemann 和得到积分 (参看 (4),(5) 和 (6)).

13. 假设 $f(x)$ 是绝对可积和分段 C^1 的, 且对某个复常数 α, 有 $\hat{f}(\xi)=\alpha f(\xi)$. 证明 α 必为 1, i, -1 或 $-i$. 再证明如果 $\alpha=\pm1$,$f(x)$ 是偶的, 而如果 $\alpha=\pm i$, 则 $f(x)$ 是奇的. 注意到有许多这种函数的例子 (参看第 7.2 节习题 14 中的 Hermite 函数).

提示 首先注意到 $\alpha^4=1$(为什么?).

14. 对实数 $x\neq n$, 定义 $w_n(x)=\frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 以及 $w_n(n)=1$. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, & -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他点}.\end{cases}$$

(a) 利用第 7.1 节的例 4 证明 $\hat{f}_n(\xi)=w_n(\xi)$.

(b) 由形式应用 Parseval 等式, 或严格地由利用卷积定理 (参看习题 7(b) 后面的注记) 来证明 $\int_{-\infty}^{\infty}w_n(\xi)w_m(\xi)d\xi=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n.\end{cases}$ 因此, $w_n(\xi)$ 构成 $(-\infty,\infty)$ 上范数平方为 1 的正交族.

(c) 假设对某些复常数 c_n $(-N\leqslant n\leqslant N)$[①], $g(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_nf_n(x)$. 不用 Parseval 等式证明 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx=\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\xi)|^2d\xi$.

(d) $g(x)$ 如同 (c) 部分, 证明 $\hat{g}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)\frac{\sin(\pi(\xi-t))}{\pi(\xi-t)}d\xi$.

注记 形如

$$\hat{g}(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nw_n(\xi),\quad \text{其中}\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty,$$

[①]原文误为 $-N<n<N$.——译者

的函数称为 **Paley-Wiener函数**, 级数称为函数 $\hat{g}(\xi)$ 的**基级数**. 这种级数在狭窄波段信号的 Whittaker-Shannon 采样理论中起了主要作用 (参看 [J.R.Higgins, *Five short stories about the cardinal series*, Bull.Amer.Math.Soc.(New Series)**12** (1985), 45-89]). (d) 部分的结果表明

$$w(x,t)=\frac{\sin(\pi(x-t))}{\pi(x-t)}$$

是 Paley-Wiener 函数类的**再生核**.

§7.4 偏微的 Fourier 变换方法

在本节我们利用 Fourier 变换方法来导出在某种无界区域上偏微边值问题的假定性解. 由于对这些假定性解总要进行个别验证它们是事实上的解, 所以没有绝对必要来证明在推导假定性解中的每一步的正当性. 而且, 证明 Fourier 变换方法在推导这些假定性解中的正当性的任何尝试注定是失败的, 因为这些方法预先假设解不仅存在 (本身就是一个无根据的假设), 而且还假设解衰减得足够快以至于它的 Fourier 变换存在. Fourier 变换仅仅向我们提供了一个假定性的解 (需要用其他手段验证), 不用这些方法或许无法猜出这个解 (参看第 7.2 节的例 3).

无限杆的热问题

这里我们将证明: 如果 $f(x)$ 是连续的, 或是绝对可积 (即, $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$), 或是有界的 (即, 对所有的 x, 有 $|f(x)|\leqslant M$), 则下面初值问题有解 $u(x,t)$, 它在整个闭半平面 $t\geqslant 0$, $-\infty<x<\infty$ 上连续, 且对 $t>0$ 是 D.E. 的 C^{∞} 解.

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).\end{aligned}\tag{1}$$

该解由以下公式给出

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} f(y)dy, \quad t > 0$$

和 (2)

$$u(x,0) = f(x), \quad t = 0.$$

注意到如果对 $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ 定义 $u(x,t) \equiv 0$ 以及对 $t = 0$, $u(x,0) = f(x)$, 则也得到问题 (1) 的解. 然而这个解在 x 轴上的点不连续, 除非 $f(x) \equiv 0$, 即对所有的 x_0, 没有**连续条件**

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = f(x_0), \tag{3}$$

除非 $f(x) \equiv 0$. D.E. 不满足连续条件 (3) 的任何解没有任何明显的价值. 这就是为什么最终证明 (2) 确实满足 (3) 是重要的. 由于 (2) 的被积函数关于 x 和 t(不是 y) 的偏导数关于 y 是绝对可积的, 故由 Leibniz 法则 (参看附录 3) 得到 (2) 中的 $u(x,t)$ 实际上对 $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ 是 C^∞, 即使 $f(x)$ 不必是 C^1. 换言之, 温度分布即刻就变得平滑. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ 以及 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$(参看第 7.1 节的习题 12), 我们将证明: 对任意 $T > 0$, 由 (2) 定义的 $u(x,t)$ 满足

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)| \Big) = 0. \tag{4}$$

此外, 将应用最大值原理证明 $u(x,t)$ 是具有性质 (4) 的 (1) 的唯一解. 没有像 (4) 那样的附加条件, 无法保证 (1) 只有一个解. 的确, 如下例所示, 即使当 $f(x) \equiv 0$ 时, (1) 存在连续的非零解, 但它们不满足 (4).

例 1 在 1935 年, 俄罗斯数学家 A.N.Tychonov 证明了关于具零初始温度的无限杆问题

$$\text{D.E.} \quad u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0;$$

$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = 0,$$

有不同于显然的解 $u(x,t) \equiv 0$ 的解 (即, 唯一性不成立!). 我们给出 Tychonov 解的构造的梗概.

令

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & 如果\ t \neq 0, \\ 0, & 如果\ t = 0, \end{cases}$$

又令

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0.$$

可对上面的级数逐项求导.(逐项求导的正当性, 见 D.V.Widder, *The Heat Equation*, Academic Press, New York(1975), p.26 和第三章.) 因此,

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n+1)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{m=1}^{\infty} f^{(m)}(t) \frac{x^{2(m-1)}}{(2(m-1))!} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = u_{xx},$$

其中为了得到第二个和式已做了指标变换 $m = n+1$, 然后为得到第三个和式, 令 $n = m$. 由于 $f(0) = 0$ 以及 $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$(参看习题 1), 故 $u(x,0) = 0$, 以及经一些努力, 可验证连续条件 (3). 但 $u(x,t)$ 不恒等于零, 因为 $u(0,t) = f(t)$ 且对所有的 $t \neq 0$, $f(t) > 0$. □

由 Fourier 变换方法获得问题 (1) 的解 (2)

由于已经看到以下公式的作用

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} f(y) dy \quad (t > 0), \tag{5}$$

读者无疑首先想知道如何得到该公式. 这可通过纯粹形式应用前面的章节已建立起来的 Fourier 变换的性质得到. Fourier 方法预先假定 $u(x,t)$ 存在且 (以及 $f(x)$) 具有适当的衰减阶. 它们不构成任何证明, 但如下面将看到的, 它们给我们提供可验证的由公式给出的假定性解.

对 (1) 中 D.E. 的两边关于变量 x 取 Fourier 变换, 保持 t 固定, (形式上) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\xi x} d'x = \int_{-\infty}^{\infty} k u_{xx}(x,t) e^{-i\xi x} d'x.$$

利用第 7.2 节的推论 1(自然是形式上的), 得

$$\hat{u}_t(\xi,t) = k(i\xi)^2 \hat{u}(\xi,t) = -k\xi^2 \hat{u}(\xi,t). \tag{6}$$

注意到对固定的 ξ, (6) 是关于 t 的一阶常微. (6) 的解具有形式 $\hat{u}(\xi,t) = F(\xi)e^{-k\xi^2 t}$, 其中 $F(\xi)$ 可由令 $t=0$ 确定:

$$F(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-i\xi x}d'x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}d'x.$$

因此, $F(\xi) = \hat{f}(\xi)$, 所以 $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$. 由第 7.1 节的例 6, 对任意的常数 $a>0$, 有

$$(\sqrt{a}e^{-\frac{1}{2}ax^2})^\wedge(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}.$$

因此, 取 $a = 1/(2kt)$, $t>0$, 得

$$(\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-x^2/(4kt)})^\wedge(\xi) = e^{-k\xi^2 t}.$$

如果 $g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-x^2/(4kt)}$, 则由形式利用卷积定理, 得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)^\wedge(\xi).$$

让 t 固定, 两边取逆变换, 得到公式 (5):

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy.$$

免得读者对这些形式计算过分欢喜, 我们再次指出: 并没有证明 (2) 是 (1) 的解. 甚至没有证明解存在! 现在继续证明 (2) 实际上是 (1) 满足连续条件 (3) 的解.

问题 (1) 的解 (2) 的有效性的证明

先证明当 $t>0$ 和 $f(x)$ 是连续且有界或绝对可积时, (2)(或 (5)) 是 D.E. $u_t = u_{xx}$ 的解. 可把公式 (5) 重写成形式:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)f(y)dy, \tag{7}$$

其中

$$H(x-y,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-y)^2/(4kt)} \ (t>0). \tag{8}$$

定义 (8) 中的函数 $H(x-y,t)$ 称为无限杆热方程的**热核**(或**源解**或**基本解**).

我们有 $H_t = kH_{xx}$, 因可直接验证 (参看第 3.1 节的例 1). 由于在位置 y 处的集中的初始温度源 (参看本章引论中的图 1), 直观上 $H(x-y,t)$ 代表在时刻 t 在位置 x 处的温度分布. 由于 $H_t = kH_{xx}$, 故得出 (7) 是 $u_t = ku_{xx}$,$t > 0$ 的解, 如果能证明 (7) 在积分号下关于 x 和 t 求导是正当的话. 幸运的是, 对 $t > 0$,(2) 的被积函数关于 x 和 t 的所有偏导数关于 y 是连续和绝对可积的 (参看第 7.2 节的例 1). 这是可行, 如果 $f(y)$ 是连续和绝对可积或有界的.(的确, 由于 $H(x-y,t)$ 关于变量 y 是迅速衰减的, 可只要求 $|f(y)| < Ce^{|y|}$.) 于是, 根据 Leibniz 法则 (参看附录 3), 对 $t > 0$ 在 (7) 中可畅通无阻的求导数. 因此 (7) 中的 $u(x,t)$ 满足 D.E.. 注意到 $f(y)$ 关于 x 和 t 是常数, 所以不必有关于 $f(y)$ 的可微性的假设.

剩下来证明连续性条件 (3) 成立. 由在第 7.1 节的例 6 中所证明的结果 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx = \sqrt{2\pi/a}$(取 $a = \frac{1}{2kt}$ 和 $z = x - y$), 我们知道, 对 $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)}dy = 1. \tag{9}$$

考虑由 (7) 给出的 $u(x,t)$. 则由 (9), 有

$$\begin{aligned} |u(x,t) - f(x_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)f(y)dy - f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)dy \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)[f(y) - f(x_0)]dy \right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)|f(y) - f(x_0)|dy. \end{aligned} \tag{10}$$

为证明连续性条件 (3), 必须证明 $|u(x,t) - f(x_0)|$(或 (10) 中最后的积分) 通过取 (x,t)(在半平面 $t > 0$ 中) 充分接近 $(x_0, 0)$ 可变得所希望的任意小. 为此, 把 (10) 最后的积分分解成三部分:

$$\left(\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty} \right) H(x-y,t)|f(y) - f(x_0)|dy,$$

其中 δ 是正常数. 令这些积分从左到右记作 I_1, I_2 和 I_3. 因 $f(x)$ 是连续的, 故对任意 $\epsilon > 0$, 如果 x 充分靠近 x_0 且 δ 充分小, 对 $[x-\delta, x+\delta]$ 的 y, 有

$|f(y)-f(x_0)|<\epsilon$. 则

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x-\delta}^{x+\delta} H(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|dy \leqslant \int_{x-\delta}^{x+\delta} H(x-y,t)\epsilon dy \\ &\leqslant \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)dy = \epsilon. \end{aligned}$$

换言之, 通过取 x 充分靠近 x_0 以及取 δ 充分小, 可使 I_2 达到想要的任意小. 现来证明不管 $\delta>0$ 的选取, 通过取 $t>0$ 充分小, 积分 I_1 和 I_3 可取到所希望的那样小. 我们只对 I_3 来做, 因 I_1 可做同样处理. 我们有

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{x+\delta}^{\infty} H(x-y,t)|f(y)-f(x_0)|dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}|f(y)-f(x_0)|dy \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}|f(y)|dy \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}|f(x_0)|dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\delta}^{\infty} e^{-z^2/4kt}|f(x+z)|dz \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\delta}^{\infty} e^{-z^2/4kt}|f(x_0)|dz \end{aligned} \tag{11}$$

当 $f(x)$ 是有界的, 比如 $|f(x)\leqslant M$ 时, 则 (11) 的最后两个积分每个不超过

$$\frac{M}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\delta}^{\infty} e^{-z^2/4kt}dz \leqslant \frac{M}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\delta}^{\infty} e^{-z\delta/4kt}dz = \frac{M4kt}{\delta\sqrt{4\pi kt}}e^{-\delta^2/4kt},$$

这项通过取 t 充分小且是正数, 可取得想要的那样小. 当 $f(y)$ 不必是有界, 而是绝对可积时, (11) 中的第二个积分像有界情形那样处理, 而 (11) 中的第一个积分估计如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4kt}}|f(x+z)|dz &\leqslant \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\delta}^{\infty}|f(x+z)|dz \\ &\leqslant \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi k}e^{\frac{\delta^2}{4kt}}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy. \end{aligned}$$

应用一次 L'Hospital 法则表明当 $t\to 0^+$ 时, 最后的商式极限趋于 0, 同时由于 $f(x)$ 是绝对可积的, 故最后的积分是有限的. 因此, 当 $f(x)$ 是有界或绝对可积

时, 对任意正数 δ, 通过取 t 充分小且是正的, 可使 I_3(类似地 I_1) 任意小. 回想起已经证明 $f(x)$ 的连续性确保对充分靠近 x_0 的 x 和充分小的 δ, 可使 I_2 任意小. 如我们所注意到的, 这些事实以及 (10) 确保连续性条件 (3). 总之, 我们建立了下述关键结果.

定理 1　令 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是连续的, 且或是有界或是绝对可积. 则由

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} f(y)dy, & t > 0; \\ f(x) & t = 0. \end{cases} \tag{12}$$

定义的函数 $u(x,t)$ 在区域 $\{(x,t);\ t > 0,\ -\infty < x < \infty\}$ 内是 C^∞ 的, 在$\{(x,t);\ t \geqslant 0,\ -\infty < x < \infty\}$ 内是连续的, 且对 $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ 满足$u_t = ku_{xx}$. 特别, (12) 满足问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \end{aligned} \tag{13}$$

以及连续性条件: 当 $(x,t) \to (x_0, 0^+)$ 时 $u(x,t) \to f(x_0)$.

在下面的例子中阐述了定理 1 的用处以及说明了即使 $f(x)$ 是一个简单函数, (12) 的积分计算会是困难的事实. 有机会使用计算机上的符号积分 (例如, Macsyma, Maple, Derive 或 Mathematica) 的读者可验证下面给出的结果 (14).

例 2　当 $f(x) = e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)$, $\alpha > 0$ 情形时求解问题 (13).

解　由于 $f(x)$ 是有界和连续的, 故 (13) 的一个解是 (对 $t > 0$)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} e^{-\alpha y^2} \cos(\beta y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} e^{-\alpha y^2 + i\beta y} dy \right). \end{aligned}$$

为计算最后的积分, 合并指数并完全平方:

$$e^{-(x-y)^2/(4kt)}e^{-\alpha y^2+i\beta y} = \exp\left(-\frac{1}{2}\delta\left[y^2-2\delta^{-1}\left(\frac{x}{2kt}+i\beta\right)y\right]-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

$$(\text{其中}\quad \delta \equiv \frac{1}{2kt}+2\alpha)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4kt}}\exp\left(-\frac{1}{2}\delta\left[y-\delta^{-1}\left(\frac{x}{2kt}+i\beta\right)\right]^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}\delta\delta^{-2}\left(\frac{x}{2kt}+i\beta\right)^2\right)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2},$$

其中 $\gamma \equiv \frac{1}{\delta}(\frac{x}{2kt}+i\beta)$. 此时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2}dy = e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}dy = \sqrt{\frac{2\pi}{\delta}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2},$$

其中最后的等式由第 7.1 节的例 6 的解答得到, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta(y-\gamma)^2}dy = \sqrt{2\pi/\delta}$, 即使当 γ 是复常数 (验证!). 因此,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)}e^{-\alpha y^2+i\beta y}dy\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\sqrt{\frac{2\pi}{\delta}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\mathrm{Re}\big(e^{\frac{1}{2}\delta\gamma^2}\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2kt\delta}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{1}{2}\delta^{-1}[(x/2kt)^2-\beta^2]+i\frac{\beta x}{2\delta kt}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4kt\alpha}}\exp\big(-\frac{x^2}{4kt}+\frac{1}{2}\delta^{-1}[(\frac{x}{2kt})^2-\beta^2]\big)\cos\frac{\beta x}{2\delta kt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4kt\alpha}}\exp\big(-\frac{\alpha x^2+\beta^2 kt}{1+4\alpha kt}\big)\cos\frac{\beta x}{1+4\alpha kt}. \end{aligned} \tag{14}$$

于是 $u(x,0)=e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)$. 如果 $\alpha=0$,(14) 是乘积解 $e^{-\beta^2 kt}\cos\beta x$. □

注记 注意到 (14) 不是问题的唯一解, 因为可以对 (14) 加上例 1 中 Tychonov 解的任意常数倍. 为得到唯一性, 对解 $u(x,t)$ 在 $|x|$ 大时的行为加上一些限制 (即, 在 $\pm\infty$ 处需要某些 “边界条件”). 从物理的观点来看, 一个诱人的条件是: 期望的解当 $|x|\to\infty$ 时趋于零. 在这种情形, 我们有如下结果. □

定理 2(唯一性定理)　假设对 $-\infty < x < \infty$, $f(x)$ 是连续和绝对可积的, 且当 $x \to \pm\infty$ 时 $f(x) \to 0$, 则由

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} f(y)dy, & t > 0, \\ f(x), & t = 0 \end{cases} \tag{15}$$

定义的函数 $u(x,t)$ 是问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x); \\ &\text{“B.C.”} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)|\right) = 0, \quad \text{对所有的 } T > 0 \end{aligned} \tag{16}$$

唯一的连续 (对 $t \geqslant 0$) 解.

证明　如果有 (16) 的两个解, 记为 u_1 和 u_2, 则由 “B.C.”, 对每个小的 $\epsilon > 0$ 和 $x_0 > 0$ 充分大, 有

$$|u_1(\pm x_0, t) - u_2(\pm x_0, t)| \leqslant \epsilon, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$|u_1(x,0) - u_2(x,0)| = 0 \leqslant \epsilon, \qquad -x_0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

则由最大值原理的一个推论 (参看第 3.2 节的定理 3 并注意到在论证中 u 在 $t = 0$ 处不必是 C^2 的), 在矩形 $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 内有 $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \epsilon$. 因此, 在半平面 $t > 0$ 中任取 (x,t), 通过取 $T > t$ 以及 x_0 充分大, 可得 $|u_1(x,t) - u_2(x,t)|$ 小于任意正数 ϵ. 因此 $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. 于是证明了如果 (16) 有解的话, 则只有一个解. 剩下来要证明 (15) 是其解. 由定理 1, 只需证明 (15) 满足 (16) 中的 “B.C.”.

得到下面的第二个不等式用到了 (9), 对 $t > 0$ 和任意的 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|y-x|\leqslant A} e^{-(x-y)^2/(4kt)} |f(y)|dy \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|y-x|>A} e^{-(x-y)^2/(4kt)} |f(y)|dy \\ &\leqslant \max_{x-A\leqslant y\leqslant x+A} |f(y)| + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-A^2/(4kt)} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy. \end{aligned} \tag{17}$$

对充分大的 A, 可使第二项任意小, 因为可以证明函数 $(4\pi kt)^{-\frac{1}{2}}e^{-A^2/(4kt)}$ 的绝对最大值是 $(2\pi e)^{-\frac{1}{2}}A^{-1}$, 证明如下:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-A^2/(4kt)}\right)=\frac{1}{(4\pi kt)^{3/2}}e^{-A^2/(4kt)}\left(\frac{2\pi k}{t}\right)\left(\frac{A^2}{2k}-t\right)$$

对 $t>A^2/2k$ 是负的, 对 $0<t<A^2/(2k)$ 是正的. $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-A^2/(4kt)}$ 的最大值 (在 $t=A^2/(2k)$ 处) 是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}A^{-1}$. 因此, 对 A 充分大, 可使 (17) 中的第二项如所期望的那样小, 然后对 x 充分大 (A 固定), 第一项当 $x\to\pm\infty$ 时趋于 0, 因为 $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. 于是, 对 (15) 来说 (16) 中的 "B.C." 成立. □

注记 定理 2 意味着对 $\alpha>0$, 解 (14) 是唯一的满足条件

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|\right)=0$$

的解. 但当 $\alpha=0$ 时, 定理 2 不能应用, 因为 $\cos(\beta x)$ 既不是绝对可积, 当 $x\to\pm\infty$ 时也不是趋于零. 然而, $u(x,t)=e^{-\beta^2kt}\cos(\beta x)$ 是关于 x 具周期为 $\frac{2\pi}{\beta}$ 的唯一解. 的确, 周期解对应于环形金属丝上的解, 已经证明了这种情形的唯一性 (参看第 3.2 节的例 1). □

例 3 求

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx}+q(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0\end{aligned}\tag{18}$$

的形式解.

解 下面的形式运算只起到发现假定性解的作用, 该假定性解的有效性在有关源项 $q(x,t)$ 的某些假设下可直接验证. 先对 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换. 于是, 得

$$\hat{u}_t(\xi,t)=k(i\xi)^2\hat{u}(\xi,t)+\hat{q}(\xi,t)\quad 或\quad \hat{u}(\xi,t)+k\xi^2\hat{u}(\xi,t)=\hat{q}(\xi,t).\tag{19}$$

注意到方程 (19) 是关于 t 的一阶线性常微. 因此, 如以积分因子 $e^{k\xi^2t}$ 乘 (19), 则得

$$\frac{\partial}{\partial t}[\hat{u}(\xi,t)e^{k\xi^2t}]=e^{k\xi^2t}\hat{q}(\xi,t)\quad 或\quad \hat{u}(\xi,t)e^{k\xi^2t}=\int_0^t e^{k\xi^2s}\hat{q}(\xi,s)ds+F(\xi).$$

而由 I.C. $u(x,0)=0$ 和 $\hat{u}(\xi,0)=F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-i\xi x}dx=0$. 由此, 得

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-k\xi^2t}\int_0^t e^{k\xi^2s}\hat{q}(\xi,s)ds,$$

形式应用反演定理得到

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{-k\xi^2t}\int_0^t e^{k\xi^2s}\hat{q}(\xi,s)ds\big)e^{i\xi x}d\xi$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi k}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\int_0^t\frac{q(y,s)}{\sqrt{t-s}}e^{-(y-x)^2/(4k(t-s))}ds\big)dy,$$

(参看第 7.3 节的习题 8). 由形式应用 Duhamel 原理也能获得相同的假定性解 (参看习题 10). □

例 4 假设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续奇函数. 如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积且当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to 0$, 证明下述问题唯一的连续解关于变量 x 也是奇的:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x);\\&\text{“B.C.”}\quad \lim_{x\to\pm\infty}\big(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|\big)=0,\quad \text{对所有的 } T>0.\end{aligned}\tag{20}$$

说明如果去掉 “B.C.”, 结论不成立.

解

方法 1 由定理 2, 问题 (20) 的唯一解由以下给出:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy, & t>0,\\ f(x), & t=0.\end{cases}$$

所给的 $u(x,0)$ 是奇函数. 如果 $t>0$, 则令 $z=-y$, 由于 $f(-z)=-f(z)$, 得

$$\begin{aligned}u(-x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+y)^2/(4kt)}f(y)dy\\&=-\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\infty}^{-\infty}e^{-(x-z)^2/(4kt)}f(-z)dz=-u(x,t).\end{aligned}$$

因此, $u(x,t)$ 是 x 的奇函数.

方法 2 注意到 $-u(-x,t)$ 也满足 (20) 并利用唯一性 (参看定理 2). 没有 “B.C.” 条件, 可把 (偶的)Tychonov 解加到上述的奇解上, 由此得到非奇的解. □

注记 没有 “B.C.”, 可得到 (20) 的不止一个奇函数解, 因为可以对 Tychonov 解关于 x 求导并得到具零初始数据的奇函数解, 它可加到上述标准的解得到另一个奇函数解. □

例 5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续和绝对可积, 令

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy \quad (t>0). \tag{21}$$

验证下面的关系并给出它的物理解释:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy. \tag{22}$$

解 由于 (21) 的被积函数在 xy–平面上是绝对可积的, 故下面的计算可交换积分次序 (参看附录 2).

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}dx\right)f(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy,\end{aligned}$$

其中利用了事实 $\int_{-\infty}^{\infty}H(x-y,t)dy=1$(参看 (9)). 等式 (22) 可看作能量守恒定律的特殊例子. 的确, 在任意时刻 $t>0$, (22) 的左边是 (以适当的单位) 在时刻 t 时杆内总热能, 而 (22) 的右边是初始总热能. □

例 6 对 $t>0$, 考虑热方程 $u_t=ku_{xx}$ 的基本解 (参看 (8))

$$H(x,t)\equiv\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-x^2/(4kt)}. \tag{23}$$

对固定的 t, x 的函数 $H(x,t)$ 记作 ${}_tH(x)$, 只要不与偏导数 H_t 相混淆. 证明

$$({}_tH *_t H)(x)={}_{2t}H(x) \quad (t>0). \tag{24}$$

解 根据卷积定义 (参看第 7.2 节), 对 $t>0$, 有

$$\begin{aligned}({}_tH *_t H)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}{}_tH(x-y)\,{}_tH(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-y)^2/(4kt)}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-y^2/(4kt)}dy\\ &= \frac{1}{4\pi kt}e^{-x^2/(8kt)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-\frac{1}{2}x)^2/(2kt)}dy=\frac{1}{4\pi kt}e^{-x^2/(8kt)}\sqrt{2\pi kt}\\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi kt}}e^{-x^2/(8kt)}={}_{2t}H(x),\end{aligned}$$

其中用到了以 $\frac{1}{2}x$ 替换 x 和以 $\frac{1}{2}t$ 替换 t 的 (9). 在习题 (8), 利用卷积定理的一个不同 (且更容易的) 证法得出更一般的结果: 对所有正数 s 和 t, ${}_sH *_t H=$

${}_{(s+t)}H$. 这个另一证法更容易, 是由于函数的 Fourier 变换相乘比函数的卷积简单得多. □

注记 解 (21) 可写成 $u(x,t)=({}_tH*f)(x)$(为什么?). 对 $s>0$, 令 $g(x)=u(x,s)$. 由于 $u(x,s+t)$ 是在时刻 t 时具初始温度 $g(x)$ 的解, 故

$$({}_{(s+t)}H*f)(x)=u(x,t+s)=({}_tH*g)(x)=({}_tH*({}_sH*f))(x)=(({}_sH*{}_tH)*f)(x).$$

比较最左端和最右端, ${}_sH*{}_tH={}_{(s+t)}H$ 并不让人感到惊奇. 的确, 这个论证说明可以期望这种卷积性质对方程的关于一个变量的平移是不变的基本解成立. □

例 7 求问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t-ku_{xx}=-\lambda u,\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x)\end{aligned}\tag{25}$$

的连续解, 其中 λ 是常数, $f(x)$ 是连续有界函数. 对 (25) 中的 D.E. 给出物理解释.

解 对 D.E. 形式运用 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_t(\xi,t)+(k\xi^2+\lambda)\hat{u}(\xi,t)=0.$$

因此, 形式上 $\hat{u}(\xi,t)=e^{-\lambda t}\hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2t}$ (为什么?). 由于 $e^{-\lambda t}$ 与 ξ 无关, 故由形式利用卷积定理, 得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=[\hat{u}(\xi,t)]^{\vee}(x)=e^{-\lambda t}[\hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2t}]^{\vee}(x)\\&=e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy.\end{aligned}$$

利用定理 1, 可验证该函数满足原问题. 的确, 注意到 $u(x,t)=e^{-\lambda t}v(x,t)$, 这里 $v_t=kv_{xx}$. 因此, $u_t=-\lambda e^{-\lambda t}v+e^{-\lambda t}v_t=-\lambda u+ku_{xx}$, 正如所要求的. 还有, $u(x,0)=e^{-\lambda 0}v(x,0)=f(x)$.

如果 $\lambda>0$, 则 D.E. 中项 $-\lambda u$ 的出现可能产生于经由杆的侧表面的热流, 比如由于不完全绝热 (参看第 3.1 节的习题 9). 如果 $\lambda<0$, 则项 $-\lambda u$ 代表一热源, 它的强度与温度成比例, 比如由于化学反应或核反应. □

用 Fourier 变换方法推导 D'Alembert 公式

虽然在第五章中对波方程的处理以原来的方式是足够了, 然而用 Fourier 变

换方法来获得 D'Alembert 公式是有益的. 考虑问题

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x,\ t < \infty; \\ \text{I.C.} & u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \end{array} \tag{26}$$

我们还是作形式运算. 最后结果的合理性已经在第五章验证了. 对 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_{tt}(\xi,t) = a^2(i\xi)^2\hat{u}(\xi,t) = -(a\xi)^2\hat{u}(\xi,t),$$

由此得

$$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(a\xi t) + c_2(\xi)\sin(a\xi t)$$

和

$$\hat{u}_t(\xi,t) = -a\xi c_1(\xi)\sin(a\xi t) + a\xi c_2(\xi)\cos(a\xi t).$$

先对 I.C. 施行 Fourier 变换, 得

$$\hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = c_1(\xi) \quad 和 \quad \hat{g}(\xi) = \hat{u}_t(\xi,0) = a\xi c_2(\xi).$$

因此,

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(a\xi t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}. \tag{27}$$

此时我们想应用卷积定理, 但尚未求出一个函数它的 Fourier 变换是 $\cos(a\xi t)$. 事实上, 没有一个 "普通" 函数具有这种性质. 我们没有去求这样的函数, 而是对 $\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)$ 形式取逆变换:

$$\begin{aligned} [\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)]^{\vee}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)e^{i\xi x}d'\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)(e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t})e^{i\xi x}d'\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)(e^{i(x+at)\xi}d'\xi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i(x-at)\xi}d'\xi \\ &= \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)]. \end{aligned} \tag{28}$$

为求 (27) 中第二项的逆, 可用卷积定理, 因由第 7.1 节例 4 得知

$$如果\ h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| \leqslant at, \\ 0, & |x| > at, \end{cases} \quad 则 \quad \hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}. \tag{29}$$

则由卷积定理和 (29), 得

$$\left(\hat{g}(\xi)\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\right)^{\vee}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)h(x-y)dy=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)dy. \tag{30}$$

(28) 和 (30) 相加, 得 (但不是证明)D'Alembert 公式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)dy. \tag{31}$$

还有其他方法得到 (31), 这涉及到 **Dirac delta"函数"**$\delta(x)$. 这不是通常意义下的函数, 因为它表明具有性质: 对任意函数 $f(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0). \tag{32}$$

如果 $\delta(x)$ 是常义的函数, 则在单点 $x=0$ 改变 $f(x)$ 为不同的值而不会改变 (32) 的左端, 但右端将会改变. 特别, (32) 的左端不能用通常的方式 (例如, 作为 Riemann 和的极限) 定义积分, 因为被积函数不是常义函数. 而看待 (32) 的左端的一个方式是它只不过是 $f(x)$ 的花哨写法. 换言之, (32) 是 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx$ 的定义. 类似地, 对任意实数 c, 定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-c)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(c-x)f(x)dx=f(c). \tag{33}$$

则 (由 (33))$\delta(x-c)$ 的 Fourier 变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-c)e^{-ix\xi}d'x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ic\xi}. \tag{34}$$

然后注意到 (表明线性性成立)

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(x+c)+\delta(x-c)]e^{-ix\xi}d'x=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(e^{ic\xi}+e^{-ic\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(c\xi).$$

换言之, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(c\xi)$ 是 $\frac{1}{2}[\delta(x+c)+\delta(x-c)]$ 的 Fourier 变换. 虽然卷积定理是在某些好的常义函数的情况下证明的, 然而我们注意到由于

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)=\hat{f}(\xi)\frac{1}{2}[\delta(x-at)+\delta(x+at)]^{\wedge}(\xi),$$

故应有

$$\begin{aligned}[\hat{f}(\xi)\cos(a\xi t)]^{\vee}(x) &= \left(f * \frac{1}{2}[\delta(x-at)+\delta(x+at)]\right)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{2}[\delta(x-y-at)+\delta(x-y+at)]dy \\ &= \frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)].\end{aligned}$$

这又是没有证明最后结果是有效的, 它在第五章中已个别证明了. 注意到 Dirac delta“函数” 允许我们把 (31) 的解写成一个 “积分”, 如同我们对热方程所做的 (参看 (12)), 即,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [k(x-y,t)f(y)+h(x-y,t)g(y)]dy, \tag{35}$$

其中

$$k(z,t) = \frac{1}{2}[\delta(z-at)+\delta(z+at)] \quad 和 \quad h(z,t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |z| \leqslant at, \\ 0, & |z| > at. \end{cases}$$

Dirac delta “函数” 属于被称做广义函数或分布的对象类. 分布的术语对处理有关奇异性太强的量, 无法用常义的函数代表的情形是相当方便的. 例如, 发生在一个无穷小时间施加的一个作用力时, 在数量上产生有限的变化的情形. 这样的作用力称为脉冲, 用一个 delta“函数” 来表示, 就如工科学生会很快指出那样.

例 8 通过形式计算求出以下问题解的积分表示:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2u_{xx} - u, \qquad -\infty < x, \quad t < \infty; \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad u_t(x,0) = 0.\end{aligned} \tag{36}$$

解 D.E 两边关于 x 取 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_{tt}(\xi,t) = a^2(i\xi)^2\hat{u}(\xi,t) - \hat{u}(\xi,t) \quad 或 \quad \hat{u}_{tt}(\xi,t) + (1+a^2\xi^2)\hat{u}(\xi,t) = 0. \tag{37}$$

由于 (37) 是关于 t 的二阶线性常微, 具常系数, 故求得 (37) 的通解由以下给出

$$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2}) + c_2(\xi)\sin(t\sqrt{1+a^2\xi^2}),$$

其中 $c_1(\xi)$ 和 $c_2(\xi)$ 是任意函数. 而且

$$\hat{u}_t(\xi,t)=\sqrt{1+a^2\xi^2}\left(-c_1(\xi)\sin(t\sqrt{1+a^2\xi^2})+c_2(\xi)\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2})\right).$$

在 $\hat{u}(\xi,t)$ 和 $\hat{u}_t(\xi,t)$ 的表示式中取 $t=0$ 并利用 I.C., 得

$$c_1(\xi)=\hat{u}(\xi,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-i\xi x}dx=e^{-\frac{1}{2}\xi^2},$$

其中已用了第 7.1 节例 6 的结果. 另外,

$$\sqrt{1+a^2\xi^2}c_2(\xi)=\hat{u}_t(\xi,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,0)e^{-i\xi x}dx=0.$$

因此,

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2}).$$

最后, 形式应用反演定理, 得积分表示

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\cos(t\sqrt{1+a^2\xi^2})\cos(\xi x)d\xi,\end{aligned}\tag{38}$$

因为 $\hat{u}(\xi,t)$ 是 ξ 的偶函数.(38) 的被积函数关于 x 和 t 的所有偏导数关于 ξ 是绝对可积的. 因此, 通过积分号下求导 (参看附录 3) 可证明 (38) 是 (36) 的有效解. □

注记 存在 Fourier 变换方法不能应用 (甚至不能形式应用)的情况. 考虑

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=u_{xx}+2x,\qquad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=x^2,\quad u_t(x,0)=0.\end{aligned}$$

在第 5.3 节的定理 1 中, 我们发现, 应用 Duhamel 原理得到解 $u(x,t)=x^2+t^2+xt^2$. 另一方面, 显然不能在 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换, 因为 $h(x)=x$ 的 Fourier 变换不存在. $f(x)=x^2$ 的 Fourier 变换也不存在. □

半平面上的 Laplace 方程

下面的结果 (除了唯一性) 是第 6.4 节习题 7 的结论

定理 3 设 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是有界连续函数. 则问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{39}$$

在半平面 $y \geqslant 0$ 上有唯一有界的连续解, 即

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-s)^2} f(s)ds. \tag{40}$$

注记 公式 (40) 是**上半平面的 Poisson 积分公式**.

公式 (40) 可利用 Fourier 变换求得. 作形式运算, D.E. 关于 x 取 Fourier 变换, 视 y 为常数:

$$(i\xi)^2\hat{u}(\xi,y) + \hat{u}_{yy}(\xi,y) = 0.$$

把 ξ 看作常数, 该“常微”的通解是

$$\hat{u}(\xi,y) = c_1(\xi)e^{\xi y} + c_2(\xi)e^{-\xi y}. \tag{41}$$

如果当 $y \to \infty$ 时 $\hat{u}(\xi,y)$ 以指数增长, 我们就不能指望当 $y \to \infty$ 时 $u(x,y)$ 是有界的. 因此, 我们在 $\hat{u}(\xi,y)$ 上施加条件:

$$c_1(\xi) = 0, \quad \xi > 0 \quad 和 \quad c_2(\xi) = 0, \quad \xi < 0.$$

则 (41) 具有形式

$$c_1(\xi)e^{-|\xi|y} + c_2(\xi)e^{-|\xi|y} = c(\xi)e^{-|\xi|y},$$

其中 $c(\xi) = c_1(\xi) + c_2(\xi)$. 利用 B.C. 得到 $\hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = c(\xi)$. 因此,

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

由第 7.1 节的例 3, 得 (对固定的 y)

$$e^{-y|\xi|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2y}{y^2+x^2}\Big)^{\wedge}(\xi).$$

然后根据卷积定理得到期望的公式 (40). 此外, 这不是 "(40) 是问题 (39) 对 $y \geqslant 0$ 的连续解"的证明, 但我们至少有了可验证的假定性公式, 就如第 6.4 节中的习题 7. □

例 9　求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad -\infty<x<\infty,\quad y>0;$$

$$\text{B.C.}\quad u(x,0^+)=f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x<-1,\\ 1, & \text{如果 } -1<x<1,\\ 2, & \text{如果 } x>1.\end{cases}$$

解　在本例, 边界函数 $f(x)$ 有一些跳跃不连续点, 在其上函数没有定义. 然而, 如果应用公式 (40), 得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}f(s)ds\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{0\cdot y}{y^2+(x-s)^2}ds+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}ds\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{2y}{y^2+(x-s)^2}ds\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{y}\right)+\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right)\right)+1,\end{aligned}$$

对 $y>0$ 它是调和函数. 回忆起由 Laplace 方程的极坐标形式 (参看第 6.3 节的命题 1), 对 $x>0$, $v(x,y)=\arctan(y/x)=\theta$ 是调和的. 因此, $v(y,x+1)$ 和 $v(y,x-1)$ 对 $y>0$ 是调和的. 并且我们能容易验证

$$\lim_{y\to 0^+}u(x,y)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x<-1,\\ 1, & \text{如果 } -1<x<1,\\ 2, & \text{如果 } x>1.\end{cases}$$

还注意到

$$\lim_{y\to 0^+}u(-1,y)=-\frac{1}{2}+1\quad 和\quad \lim_{y\to 0^+}u(1,y)=\frac{1}{2}+1.$$

应该注意到根据 (x,y) 在上半平面是如何趋于 $(-1,0)$(或 $(1,0)$) 的, $u(x,y)$ 趋于不同的值. 例如, 设 α 是 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间的任意角度. 如果 (x,y) 沿着射线 $(x+1)=\tan(\alpha)y(\ y>0)$ 趋于 $(-1,0)$, 则 $u(x,y)=(\alpha+\arctan(\frac{x-1}{y}))\pi^{-1}+1$ 趋于 $(\alpha-\frac{\pi}{2})\pi^{-1}+1=(\alpha+\frac{\pi}{2})\pi^{-1}$, 当 α 在 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间取值时它在 0 和 1 之间取值. □

例 10 考虑问题

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0;$$
$$\text{B.C.}\quad u(x,0)=e^{-x^2}.$$

如果 $u(x,y)$ 是唯一连续和有界的解 (40), 则证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\sqrt{\pi}\quad \text{对每个 } y\geqslant 0. \tag{42}$$

解 由于 e^{-x^2} 是有界和连续的, 由公式 (40) 得 (对 $y>0$)

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}e^{-s^2}ds. \tag{43}$$

如果 (43) 两边关于 x 积分, 则得

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}e^{-s^2}dsdx. \tag{44}$$

由于被积函数对 $y>0$ 是绝对可积的, 故可交换积分次序. 利用 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$(参看第 7.1 节的例 6), 则由 (44) 得到 (42):

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{y^2+(x-s)^2}\Big)e^{-x^2}ds=\frac{y}{\pi}\frac{\pi}{y}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}.$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, 所以 (42) 对 $y=0$ 也成立. □

注记 对 B.C. $u(x,0)=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是连续和绝对可积的, 由相同的论证 (参看习题 13) 得到结果 $\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$. □

概要 7.4

1. 偏微的 Fourier 变换法: 一般而言, 对于至少有一个变量无限制的偏微, Fourier 变换可用来找出一个假定性的解, 这种解必须用其他方法来验证. 这种验证是必要的, 因为当 Fourier 变换运用于偏微时就已经不仅假设解存在, 而且还假设解具有应用第 7.2 节和第 7.3 节中的结果所需要的性质. 该方法的成功主要是由于事实: 关于一个变量(比如 x) 的 Fourier 变换把关于该变量的每个偏导数转换成以 $i\xi$ 的代数相乘. 在我们的例子中, 偏微是关于两个变量的未知函数, 所以这些偏微变成关于剩下的变量的常微. 在高维情形 (例如, 对 $u_t=u_{xx}+u_{yy}$)

就得对多个变量取 Fourier 变换来得到常微 (参看第 8.1 节). 当验证一个假定性的解时常常会出现这种情形: 假定性的解在比 Fourier 方法预先假设更广泛的范围内是有效的. 例如, 由下面的公式 (S1) 产生一个有效解, 即使当 $\hat{f}(\xi)$ 不存在 (例如, 当 $f(x) = \cos x$ 或甚至是 x^2).

2. 无限杆的热问题 (定理 1): 设 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, 是连续的, 且或是有界的或是绝对可积的. 则由下面定义的函数 $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} f(y)dy, & t > 0, \\ f(x) & t = 0, \end{cases} \tag{S1}$$

在区域 $\{(x,t):\ t > 0,\ -\infty < x < \infty\}$ 上是 C^1 的, 在 $\{(x,t):\ t \geqslant 0,\ -\infty < x < \infty\}$ 上连续, 且在 $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ 上满足 $u_t = ku_{xx}$. 特别, (S1) 满足问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x), \end{aligned} \tag{S2}$$

并具有连续条件(第 7.4 节 (3))(即 $\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = u(x_0,0) = f(x_0)$).

3. 无限杆热问题的唯一性: 问题 (S2) 的解没有进一步的假设决不会是唯一的, 因为总可加上 Tychonov 解 (参看例 1) 来获得其他的解. 如果对问题 (S2) 在无穷远处加上一个 "边界条件"

$$\text{“B.C.”} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \left(\max_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)| \right) = 0, \quad \text{对所有的 } T > 0, \tag{S3}$$

则 (S1) 是 (S2) 具 (S3) 的唯一解, 只要 $f(x)$ 连续、绝对可积的以及$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (参看定理 2).

4. 基本解: $u_t = ku_{xx}$ 的热核 (也称作源解或基本解) 是

$$H(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-y)^2/4kt}, \quad t > 0.$$

可把 $H(x-y,t)$ 看作由 y 处一初始集中热源产生的时刻 t 在 x 处的温度. 定义 ${}_tH(x) \equiv H(x,t)$, 可把 (S1) 写成 $u(x,t) = ({}_tH * f)(x)$(即热核与初始温度的卷积. 对正的 s 和 t, 通过应用卷积定理 (参看习题 8) 和例 5 后面的注记, 易证 ${}_tH *_s H =_{(s+t)} H$).

5. D'Alembert 公式和上半平面 Poisson 积分公式: 也可利用 Fourier 变换技巧获得无限弦波问题的 D'Alembert 公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(r)dr$$

和上半平面的 Poisson 积分公式

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}f(s)ds \quad (y>0).$$

在函数 f 和 g 的适当假设下, 在第 5.2 节和第 6.4 节习题 7 中分别验证这些公式提供了 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 和 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的解.

练习 7.4

1. (a) 由形式计算验证: 如果

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t\geqslant 0,$$

其中 $f(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2}, & \text{如果 } t\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } t=0,\end{cases}$ 则 $u(x,t)$ 满足热方程 $u_t=u_{xx}$.

(b) 证明 $f^{(n)}(0)=0,\ n=1,2,\cdots$.

提示 考虑当 $t\to 0$ 时, Newton 商 $\frac{f(t)-f(0)}{t}$ 的极限.

2. 求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.} \quad u_t=ku_{xx}+\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-x^2/(4kt)}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0;\\ &\text{I.C.} \quad u(x,0)=0.\end{aligned}$$

3. 设 $f(y)$ 是分段连续有界函数 (即, 对某个常数 M, $|f(y)|\leqslant M$).

(a) 证明

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}f(x+2s\sqrt{kt})ds \quad (t>0).\end{aligned}$$

(b) 利用 (a) 部分的结果以及附录 3 的控制收敛定理证明: 如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则当 $(x,t)\to(x_0,0^+)$ 时 $u(x,t)\to f(x_0)$.

4. 假设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续偶函数. 如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是绝对可积的, 且当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to 0$, 证明下述问题的唯一连续解 $u(x,t)$ 也是 x 的偶函数:

$$\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad -\infty < x < \infty,\quad t > 0;$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,0) = f(x);$$

$$\text{"B.C."}\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u(x,t)|\right) = 0,\quad \text{对所有的 } T > 0.$$

5. 令 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$ 表示**正态分布函数**. 验证

$$F(-\infty)=0, F(\infty)=1\text{和 } F(-x)=1-F(x)$$

6. 令 $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy$, $t>0$, 其中 $f(y)=1$ 如果 $a\leqslant y\leqslant b$ 以及 $f(y)=0$, 在其他处. 用习题 5 中定义的正态分布函数来表示 $u(x,t)$.

7. (a) 证明 $g(x)$ 是速减函数当且仅当 $\hat{g}(\xi)$ 是速减函数.

提示 利用第 7.2 节的定理 1, 证明 $(\hat{g})^\wedge(x)=g(-x)$.

(b) 对 $t>0$, 令 $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy$, 其中 $f(x)$ 是在某个有限区间之外恒等于零的连续函数. 对每个固定的 $t>0$, 证明 $u(x,t)$ 是 x 的速减函数, 即使 $f(x)$ 也许不是 C^1 的.

提示 利用第 7.2 节的卷积定理和定理 1 , 并利用 (a) 部分.

(c) 假设在 (b) 部分中, $f(x)$ 是有界, 连续和绝对可积的, 但不在某个有限区间之外等于零. 给出一个例子说明对固定的 $t>0$, $u(x,t)$ 关于 x 未必是速减的.

8. 如例 6, 令 ${}_tH(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-x^2/(4kt)}$, k, $t>0$. 利用卷积定理和反演定理证明: 对所有的 s, $t>0$, ${}_sH *\ {}_tH =_{(s+t)} H$. 对该结果给出一个物理解释. 用例 6 的方法可能得到相同结果吗?

9. 对 $y>0$, 令 $P_y(x)=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$. 利用习题 8 的方法证明: 对 y, $z>0$, $P_y * P_z = P_{y+z}$.

10. 通过直接应用 Duhamel 原理 (参看第 3.4 节) 得到例 3 的非齐次热问题的形式解.

11. 利用 Fourier 变换法 (形式上) 求解下述波问题

$$\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx},\quad -\infty<x,\ t<\infty,\quad a\neq 0;$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,0)=\frac{2\sin x}{1+x^2},\quad u_t(x,0)=0.$$

提示 不必计算 $f(x)=\frac{2\sin x}{1+x^2}$ 的 Fourier 变换, 但注意到 $\cos(a\xi t)=\frac{1}{2}(e^{ia\xi t}+e^{-i^a\xi t})$.

12. (a) 考虑常微 $y''(t)+\omega^2y(t)=f(t)$ $(\omega\neq 0)$, 初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$. 利用 Leibniz 法则 (参看附录 3) 验证: 如果 $f(x)$ 是连续的, 则该问题的解是

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(s\sin(\omega(t-s))ds.$$

说明由 Duhamel 原理得到该解的简易的推导 (参看第 5.3 节中关于 (25) 的论证).

(b) 利用 (a) 部分, 通过利用形式 Fourier 变换方法求解以下具齐次 I.C. 的非齐次波方程:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+h(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0.\end{aligned}$$

证明如果 $h(x,t)$ 是 C^1, 则该形式解关于 $-\infty<x<\infty$, $t>0$ 是 C^2, 且满足 D.E. 和 I.C.. 验证 $\lim_{t\to 0^+}u(x,t)=0$.

13. 设 $u(x,y)$ $(y\geqslant 0)$ 是以下问题唯一的连续有界解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0;\\&\text{B.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 是连续有界的, 且 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx.$$

14. 解 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0;\\&\text{B.C.}\quad u(x,0^+)=f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\quad x>0,\\ -1, & \text{如果}\quad x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

15. 对复数 $z=x+iy$ 和 $a=s+it$, 令 $g(z;a)=-\ln|z-a|+\ln|z-\bar{a}|$. 证明

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}g(z;a)\right|_{t=0}=\frac{2y}{y^2+(x-s)^2}. \tag{$*$}$$

注记 函数 g 是上半平面 $y>0$ 的 **Green函数**(参看第 6.4 节的习题 11). 它可解释为由在 xy–平面上点 a 和 $\bar{a}$ 处带相反电荷粒子在 z 点产生的位势. 注意到当 $y=0$ 时 $g(z;a)=0$. 结果 $(*)$ 与第 6.4 节习题 14 中证明的结果类似. 在这两种情形, Dirichlet 问题的 Poisson 核都是 Green 函数的外法向导数 (以 a 为变量), 在边界上取值. 该结果对好的区域成立, 在第 8.6 节对带边紧流形来证明该结果 (至少在形式上).

16. 令

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/4kt}f(y)dy,\quad t>0,$$

其中 $f(x)=\begin{cases}a, & 如果\ y<0,\\ b, & 如果\ y>0,\end{cases}$ a 和 b 是非零常数. 证明 $u(x,t)$ 可表示为以下形式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{(b-a)}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x/\sqrt{4kt}}e^{-s^2}ds,\quad t>0$$

(参看第 3.1 节的习题 12 以及习题 3).

17. (a) 在习题 16 中取 $a=10$ 和 $b=0$. 证明对任意 $t>0$(不论如何小), 对任意 x(不论如何大) 有 $u(x,t)>0$. 得出热方程意味着 (与相对论相反) 热以无限速度扩散.

(b) 假设 $f(x)$ 是有界连续的, 对所有实数 x 是非负的, 并在某处 (可能只在某个小区间) $f(x)>0$. 证明对任意 t 的正值,

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy$$

对所有的 x 是正的.

§7.5 在有限区间和半无限区间上问题的应用

在本节我们将求解 x 限制在一个有限区间或半无限区间 (例如, $0\leqslant x\leqslant L$ 或 $0\leqslant x<\infty$) 的某些问题. 利用镜像法做过这种问题, 由镜像法这种问题适当地 (取决于 B.C.) 延拓成 x 不受限制的相关问题. 以这种方法, 我们可利用前面的由 Fourier 变换法或由其他方法 (例如用 D'Alembert 公式) 获得的对 x 不受限制的结果. 由于镜像法在第五章已大量应用于波问题, 故将集中在热问题以及 Laplace 方程的 Dirichlet 问题和 Newmann 问题.

先建立一些有关有限区间问题解的存在性问题 (在第三章留下未解决的).

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $f(x)$ 是连续的且 $f(0)=f(L)=0$.

注记 注意到这里我们没要求当 $t=0$ 时 D.E. 成立, 因为没有强调 $f(x)$ 是 C^2 的. 然而, 却要求 $u(x,t)$ 对于 $t\geqslant 0$ 和 $0\leqslant x\leqslant L$ 是连续的. 这意味着 $u(x,t)$ 不仅对 $t>0$ 必须满足 D.E., 而且必须满足连续性条件 (参看第 7.4 节的 (3))

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t)=f(x_0). \tag{2}$$

接下来证明下面的存在和唯一性定理.

定理 1 设 令 $\tilde{f}_o(x)$, $-\infty<x<\infty$, 是 $f(x)$ 在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上的奇延拓 $f_o(x)$ 的周期延拓. 则问题 (1) 满足 (2) 的唯一解是

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}\tilde{f}_o(y)dy, & t>0,\\ f(x), & t=0.\end{cases} \tag{3}$$

证明 由第 7.4 节的定理 1 已经知道由 (3) 定义的函数 u 是连续的且对 $0\leqslant x\leqslant L$ 和 $t>0$ 满足 D.E.. 由于 $u(0,t)$ 是奇函数的积分, 故它等于 0. 而且, 由于 $\tilde{f}_o(y)$ 关于 $x=L$ 也是奇的 (即 $\tilde{f}_o(L-y)=-\tilde{f}_o(L+y)$, 所以另一个 B.C. $u(L,t)=0$ 也满足. 唯一性在第 3.2 节的定理 1 和定理 3(对 $\epsilon=0$) 中已证. 这些证明没有要求 $f(x)$ 是 C^2 的, 虽然需要 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 处的连续性 (为什么?). □

下面结果表明, 对问题 (1), 形式无穷级数解 (在第四章末证明一般是有效的) 当 $t>0$ 时实际上是等于真正的解 (3)(即形式解对 $t>0$ 是有效的且满足 (2)).

定理 2 (1) 的解 (3) 等于 (对 $t>0$) 收敛级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-n^2\pi^2kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\quad (t>0), \tag{4}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,3,\cdots.$$

证明 由第 7.4 节的定理 1 以及通过验证得知, 对每个 $t>0$, (3) 中的 $u(x,t)$ 是 x 的 C^∞ 奇周期函数 (周期为 $2L$). 因此, 由第 4.3 节的定理 1 得到: 对每个 $t>0$, (3) 的 $u(x,t)$ 等于它限制在 $[0,L]$ 上的 Fourier 正弦级数:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},\quad \text{其中}\quad B_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

可在 $B_n(t)$ 的积分号下求导 (由 Leibniz 法则, 因为 $u(x,t)$ 关于 $t>0$ 是 C^∞):

$$\begin{aligned}B_n'(t)&=\frac{2}{L}\int_0^L u_t(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_0^L ku_{xx}(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2B_n(t),\end{aligned}$$

其中已用了 Green 公式. 因此, $B_n(t)=c_ne^{-kn^2\pi^2t/L^2}$, c_n 为某个常数, 剩下来证明 $c_n=b_n$. 首先,

$$\begin{aligned}c_n&=\lim_{t\to0^+}B_n(t)=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^L e^{-(x-y)^2/(4kt)}\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(y)dx\right)dy\\&\qquad\text{(参看附录 3)}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(0-z)^2/(4kt)}\left(\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+z)dx\right)dz\\&\qquad(y=z-x).\end{aligned}$$

现利用事实: 对连续有界函数 $h(z)$,

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_0-z)^2/(4kt)}h(z)dz=h(x_0),\tag{5}$$

该事实隐含在第 7.4 节的定理 1 中 (为什么?). 注意到 $\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+z)dx$ 是 z 的连续有界函数 (为什么?). 令 (5) 中的 $h(z)$ 为上述函数, 得到

$$\begin{aligned}c_n&=\lim_{t\to0^+}\frac{2}{L}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(0-z)^2/(4kt)}\left(\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+z)dx\right)dz\\&=h(0)=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\tilde{f}_o(x+0)dx=\frac{2}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}f(x)dx=b_n.\end{aligned}$$ □

注记 如果 $t=0$, 公式 (4) 可能失效, 因 $f(x)$ 可能不等于它的 Fourier 级数. 如果 $f(x)$ 是连续和分段 C^1 的, 且具有 $f(0)=f(L)=0$, 则由第 4.3 节的定理 1, (4) 甚至对 $t=0$ 也是有效的. □

我们也能证明有限区间上具其他类型 B.C. 和连续初始数据的热方程解的存在性, 唯一性和 Fourier 级数表示的有效性. 我们不希望对所有标准的 B.C. 来做这种证明, 而宁可只考虑环形金属丝的情形, 它以下述问题为其模型:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{“B.C.”}\quad u(x+2L,t)=u(x,t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $f(x)$ 是任一周期为 $2L$ 的连续周期函数. 周期为 $2L$ 的周期函数自然对应于在一周长为 $2L$ 的圆上有确切定义的函数. 在下面的解 (7) 中, 可以用 “通常” 的 Fourier 级数替换复 Fourier 级数, 如果想这么做的话.

定理 3 问题 (6) 的唯一连续解由以下等价的公式给出: 对 $t>0$,

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f(y)dy,\\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-n^2\pi^2kt/L^2}e^{-in\pi x/L},\end{cases}\quad(t>0)\tag{7}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-in\pi x/L}dx.$$

证明 由第 7.4 节的定理 1 得知 (7) 中的积分对 $t>0$ 是 C^∞ 且满足 $D.E.$. 它还是周期的. 的确, 积分中以 $x+2L$ 替换 x, 并由公式 $z=y-2L$ 作变量变换得到相同的结果, 因为 $f(y)=z+2L=f(z)$. 因此, (7) 的第一个表示式等于它的 Fourier 级数. 现利用定理 2 的证明中相同的计算, 可确定该 Fourier 级数与 (7) 中的无穷和相同. 另外, 对 $t=0$ 需要有一个不同的公式, 除非 $f(x)$ 是连续和分段 C^1 的. 唯一性在第 3.2 节的例 1 中已经证明; 注意到这个论证不需要 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 是 C^2 的. □

半无限杆热问题的多种解答

例 1　求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0.\\&\text{B.C.}\quad u(0^+, t) = 0,\\&\text{I.C.}\quad u(x, 0^+) = f(x),\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上是连续和绝对可积的, 且 $f(0) = 0$. 解唯一吗?

解　令 $f_o(x)$ 表示 $f(x)$ 的奇延拓 (即, 对 $x \leqslant 0$, $f_o(x) = -f(-x)$). 注意到 $f_o(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是连续的, 因为 $f(0) = 0$. 而且容易看出 $f_o(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是绝对可积的. 因此, 由第 7.4 节的定理 1 得知函数

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} f_o(y) dy, & t > 0, \\ f_o(x), & t = 0, \end{cases} \tag{9}$$

是以下问题的连续解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0;\\&\text{I.C.}\quad u(x, 0) = f_o(x).\end{aligned} \tag{10}$$

因通过检验 (9) 得到 $u(0, t) = 0$, 故 $u(x, t)$ 不仅满足问题 (8) 的 D.E. 和 I.C., 还满足 B.C.. 或许用 $f(y)$ 来表示 $u(x, t)$ 比用 $f_o(y)$ 来表示更合适. 据此, 把积分 (9) 重新写成以下形式

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)^2/(4kt)} [-f(-y)] dy + \int_{0}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} f(y) dy \right).$$

现如果在第一个积分中利用变量变换 $y = -s$, 交换积分限, 然后用 y 替换过度变量 s, 则得

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{-(x-y)^2/(4kt)} - e^{-(x+y)^2/(4kt)} \right) f(y) dy. \tag{11}$$

这表示解作为由在 y 处强度为 $f(y)$ 的集中源和在 $-y$ 处强度为 $-f(y)$ 的集中源产生的基本解的连续叠加. 虽然解 (11) 是非常适于应用, 但解不是唯一的 (参看第 7.4 节例 4 后面的注记), 因为在 $x = \infty$ 没有附加 “B.C.”. □

例 2　利用 $f(x)$ 的偶延拓 $f_e(x)$(即, $f_e(x) = f(-x)$, $x < 0$), 尝试求解例 1 提出的问题.

解 再次容易验证 $f_e(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是连续和绝对可积的. 因此, 由第 7.4 节的定理 1, 由

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/(4kt)}f_e(y)dy, & t>0,\\ f_e(x), & t=0.\end{cases}$$

给出的函数是以下问题的连续解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f_e(x),\end{aligned}$$

且 $u(x,t)$ 还满足例 1 给出的问题 (8) 的 D.E. 和 I.C. . 现由于 $f_e(x)$ 是偶函数, 故可把 $u(x,t)$ 表示成

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^{\infty}\left(e^{-(x-y)^2/(4kt)}+e^{-(x+y)^2/(4kt)}\right)f(y)dy,$$

但 $u(x,t)$ 一般不满足 B.C.(例如, 如果 $f(x)>0$, $x>0$, 则 $u(0^+,t)>0$). □

例 3 求解问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续和绝对可积的.

解 对该问题, 取 $f(x)$ 的偶延拓 $f_e(x)$. 则如同例 1, 得

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^{\infty}\left(e^{-(x-y)^2/(4kt)}+e^{-(x+y)^2/(4kt)}\right)f(y)dy.$$

在习题 3 要求读者提供该解验证的细节. □

注记 似乎在例 1 和例 3 中运用的奇延拓或偶延拓的技巧 (即镜像法) 局限于齐次 B.C. 问题. 然而, 这种方法也可用于解在端点 $x=0$ 具指定的依赖时间温度的半无限杆问题 (参看下面的例 5). 首先需要一个有关在 $x=0$ 处有跳跃间断点的适当的奇函数二阶导数的 Fourier 变换的结果 (例 4). □

例 4 令 $g(x)$ 是奇函数, 它在 $(-\infty,\infty)$ 上除了 $x=0$ 之外是 C^2. 假设 $g(0^+)$, $g'(0^+)$ 和 $g''(0^+)$ 存在, 并设 $g(x)$, $g'(x)$ 和 $g''(x)$ 是绝对可积的且当

$x \to \infty$ 时它们趋于零. 则证明

$$(g'')^\wedge(\xi) = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi g(0^+) - \xi^2 \hat{g}(\xi). \tag{12}$$

换言之, 由于在 $x=0$ 处的可能跳跃间断性, 必须在通常的表示式 $-\xi^2\hat{g}(\xi)$(参看第 7.2 节的推论 1) 中添加一个修正项.

解 因 $g''(x)$ 是奇函数, 故有

$$(g'')^\wedge(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g''(x)e^{-i\xi x}d'x = \int_0^{\infty} g''(x)(e^{-i\xi x} - e^{i\xi x})d'x. \tag{13}$$

利用 $2i\sin(\xi x) = (e^{i\xi x} - e^{-i\xi x})$ 以及 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}(g'')^\wedge(\xi) &= -2i\int_0^{\infty} g''(x)\sin(\xi x)d'x \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}[g'(x)\sin(\xi x) - g(x)\xi\cos(\xi x)]\Big|_{0+}^{\infty} + 2i\xi^2\int_0^{\infty} g'(x)\sin(\xi x)d'x,\end{aligned}$$

由此导出 (12), 因 $g(x)$ 是奇函数, 且当 $x \to \infty$ 时 $g(x)$ 和 $g'(x)$ 趋于零. □

例 5 利用例 4 的结果来求以下问题的假定性解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.} \quad u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(0^+, t) = h(t); \\ &\text{I.C.} \quad u(x, 0^+) = 0,\end{aligned}$$

其中 $h(t)$ 是 $0 \leqslant t < \infty$ 的给定的函数且 $h(0) = 0$.

解 对 $t \geqslant 0$ 定义 $u(0,t) = 0$, 对每个固定的 t, 令 $v(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 关于 x 变量的奇延拓. 注意到 $v(0^+,t) = h(t)$, $v(0,t) = 0$ 和 $v(0^-,t) = -h(t)$. 如果 u 满足 D.E., 则 $v_t = v_{xx}$, 除了在 $x=0$ 处可能不成立. 在 D.E. 的两边关于 x 取 Fourier 变换, t 保持不变, 利用例 4 的方法 ($g(x) = v(x,t)$), 形式上得到

$$\begin{aligned}(\hat{v})_t(\xi,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v_t(x,t)e^{-i\xi x}d'x = \int_{-\infty}^{\infty} v_{xx}(x,t)e^{-i\xi x}d'x \\ &= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi h(t) - \xi^2\hat{v}(\xi,t),\end{aligned}$$

或

$$(\hat{v})_t(\xi,t) + \xi^2\hat{v}(\xi,t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\xi h(t). \tag{14}$$

一阶线性常微 (14) 的通解是

$$\hat{v}(\xi,t)=-\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi e^{-\xi^2 t}\int_0^t e^{\xi^2 s}h(s)ds+e^{-\xi^2 t}F(\xi),$$

初始条件 $\hat{u}(\xi,0)=0$ 隐含 $F(\xi)\equiv 0$. 于是, 有

$$\hat{v}(\xi,t)=-\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\xi\int_0^t e^{\xi^2(t-s)}h(s)ds. \tag{15}$$

形式利用反演定理以及交换积分次序等, 得

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{v}(\xi,t)e^{i\xi x}d'\xi=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{\infty}i\xi e^{-\xi^2(t-s)}e^{ix\xi}d'\xi\right)h(s)ds\\&=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\xi^2(t-s)}\right)^{\vee}(x)h(s)ds\\&=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2(t-s)}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\right)h(s)ds,\end{aligned}$$

其中利用了第 7.1 节的例 6. 简化最后的表达式并回忆起对 $x>0$, $v(x,t)=u(x,t)$, 得到假定性解

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}h(s)ds,\quad x,\ t>0. \tag{16}$$

我们仍然只证明了: 如果问题的解存在, 并具有为了上述形式处理是有效的所需要的所有性质, 则该解由 (16) 给出. 尽管如此, 可直接验证 (16) 满足 D.E, 满足 $u(x,0^+)=0$ 和 (如在下面例子所验证的) 满足 $u(0^+,t)=h(t)$. □

例 6 $u(x,t)$ 由 (16) 给出, 证明, 不管表示形式, 对 $t>0$, 有 $u(0^+,t)=h(t)$(未必是 0). 利用事实:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-ay}dy=\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{17}$$

该事实经由变量变换 $y=\frac{1}{2}x^2$ 容易证明.

解 在 (16) 中把积分变量 s 变换成 $y=\frac{x^2}{(t-s)}$, 于是 $dy=\frac{x^2}{(t-s)^2}ds$. 则得 (参看附录 3)

$$u(0^+,t)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x^2/t}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{4}y}h(t-\frac{x^2}{y})dy=\frac{h(t)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{4}y}dy,$$

由 $a=\frac{1}{4}$ 的 (17), 上式为 $h(t)$. □

例 7 利用在例 1 和例 5 中求得的解来解问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(0^+, t) = h(t); \\ &\text{I.C.} \quad u(x, 0^+) = f(x), \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $h(t)$ 和 $f(x)$ 是连续的, 且 $f(x)$ 是绝对可积的.

解 由于 D.E., B.C. 和 I.C. 都是线性的, 故叠加原理表明 (18) 的解完全就是由例 1 和例 5 求得的解之和

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right) f(y)dy \\ & + \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-y)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-y)}} h(y)dy. \end{aligned}$$ □

例 8 给出以下问题的物理解释

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = ku_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &\text{B.C.} \quad u_x(0^+, t) = au(0^+, t); \\ &\text{I.C.} \quad u(x, 0^+) = g(x), \end{aligned} \tag{19}$$

其中 a 是正常数, $g(x)$[①]是给定的连续函数. 求出一个假定性解并讨论使假定性解是有效的条件.

解 有一半无限杆, 它在每个截面 x 的初始温度由函数 $g(x)$ 给定. B.C. 意味着热量以与杆的端点的温度 $u(0^+, t)$ 成正比的变化率经由该端点流出. 在实际中当端点绝热不完善或热接触不好时经常出现这种边界条件 (参看第 3.3 节末尾前的讨论). 为求一个假定性解, 我们再作 (19) 的解的所有假设 (包括存在性), 这些假设为使我们能进行以下的步骤是必须的. 令 $v(x,t) = u_x(x,t) - au(x,t)$. 则 (19) 的 B.C. 变成 $v(0^+, t) = 0$, 这是例 1 考虑的情形. 假设 u 是 C^3 的, g 是 C^1 的, 故有 v 是 C^2 的, 且 v 满足问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad v_t = kv_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &\text{B.C.} \quad v(0^+, t) = 0; \\ &\text{I.C.} \quad v(x, 0^+) = g'(x) - ag(x) = f(x). \end{aligned} \tag{20}$$

(注意到 $v_t = u_{xt} - au_t = k(u_{xxx} - au_{xx}) = kv_{xx}$.) 由例 1, (20) 的解是

$$v(x,t) = \int_0^{\infty} B(x,y,t) f(y) dy, \tag{21}$$

[①]原文误为 $f(x)$.——译者

其中

$$B(x,y,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\left(e^{-(x-y)^2/(4kt)} - e^{-(x+y)^2/(4kt)}\right),\ t > 0.$$

因 v 由 (21) 给出, 故可解一阶常微 $u_x - au = v$ 来得到 u, 于是得到

$$u(x,t) = -e^{ax}\int_x^{\infty} e^{-ar}v(r,t)dr, \tag{22}$$

该解不是最一般的解, 但是唯一的不随 x 的增加迅速增长的解. 由 (21) 和 (22), 得 (先形式上交换积分次序)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -e^{ax}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-ar}B(r,y,t)drf(y)dy \\ &= -e^{ax}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-ar}B(r,y,t)dre^{ay}\frac{d}{dy}[e^{-ay}g(y)]dy \\ &= e^{ax}\int_0^{\infty} e^{-ay}\frac{d}{dy}\left(e^{ay}\int_x^{\infty} e^{-ar}B(r,y,t)dr\right)g(y)dy, \end{aligned}$$

其中已经关于 y 分部积分了, 并注意到 $B(r,0,t) = B(r,\infty,t) = 0$ 以及假设 $e^{-ar}g(y)$ 对于 $y \geqslant 0$ 是有界的. 施行导数, 有

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} e^{a(x-r)}[B_y(r,y,t) + aB(r,y,t)]dr\right)g(y)dy, \tag{23}$$

这就是 (19) 的假定性解. 对 $t > 0$, 可验证内部积分 (记作 $I(x,y,t)$) 以及它关于 x 和 t 的所有偏导数存在, 且是 y 的速减函数. 在以下设 $g(x)$ 是 $x > 0$ 的连续函数, 并假设对所有充分大的 x, $|g(x)| < x^p$, p 为某个正常数. 为得出对 $t > 0$, (23) 定义了一个 C^∞ 函数 $u(x,t)$, 则反复利用 Leibniz 法则. 此外, 利用 Green 公式, 可直接验证 $I_t(x,y,t) = kI_{xx}(x,y,t)$, 由此得知 (19) 满足 D.E.$u_t = ku_{xx}$. 通过应用 Leibniz 法则以及利用事实 $B(0,y,t) = B_y(0,y,t) = 0$, 可明确地验证对 $t > 0$, $u_x(0,t) = au(0,t)$. 最后, 用相当大的努力, 可证明对 $x > 0$, $u(x,0^+) = g(x)$. (首先, 可证明对任意正数 x, $\lim_{t\downarrow 0}\int_0^{\infty} I(x,y,t)dy = 1$.) 因此, 不管在导出假定性解的过程中作了什么假设, 在 $g(x)$ 是连续的并当 $x \to \infty$ 时 g 的增长不会比某个多项式迅速的假设下, (23) 向我们提供了问题 (19) 的解. □

Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换

当求解 x 限制在半无限区间 $[0,\infty)$ 的问题时, 作为不同于镜像法的另一种方法, 可利用下面定义的 Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换. 如同 Fourier 正

弦级数和 Fourier 余弦级数与通常的 Fourier 级数的联系那样, Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换与通常的 Fourier 变换具有相同的联系.

定义 令 $f(x)$ 是定义在 $0 \leqslant x < \infty$ 的函数. 则 $f(x)$ 的 **Fourier正弦变换**是

$$\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\xi x) dx,$$

$f(x)$ 的 **Fourier余弦变换** 是

$$\hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\xi x) dx,$$

只要这些积分存在.

如果 $f_e(x)$ 和 $f_o(x)$ 表示实函数 $f(x)$ 的偶延拓和奇延拓, 则

$$\hat{f}_c(\xi) = (f_e)^\wedge(\xi) \quad 和 \quad -i\hat{f}_s(\xi) = (f_o)^\wedge(\xi).$$

因此可由正弦变换和余弦变换求解的问题通过考虑延拓也能用通常的 Fourier 变换求解. 就像 Fourier 正弦级数和 Fourier 余弦级数的理论要转化到通常的 Fourier 级数理论一样,Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换的理论要转化到通常的 Fourier 变换理论. 特别, 可利用通常的 Fourier 变换反演定理来建立关于单边变换的相关反演公式 ($x > 0$):

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\xi) \sin(\xi x) d\xi \tag{24}$$

和

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\xi) \cos(\xi x) d\xi, \tag{25}$$

其中假设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上是分段 C^1 和绝对可积的.

在下个例子中阐述了公式 (25) 在第一象限 $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ 上 Laplace 方程的一个问题中的用处. 然而, 也可通过把问题偶延拓成上半平面, 然后利用 Poisson 积分公式 (参看第 7.4 节的 (40), 以 $f_e(x)$ 替换 $f(x)$) 立刻获得该解, Poisson 积分公式由通常的 Fourier 变换方法得到的.

例 9 求以下问题假定性解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\infty,\quad 0<y<\infty;$$
$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u_x(0^+,y)=0, \\ u(x,0^+)=f(x), \end{cases}$$

这里假设 $u(x,y)$ 是有界的, 且 $u(\infty,y)=u_x(\infty,y)=0,\ 0<y<\infty$.

解 进行形式演算, 对 D.E. 关于 x 取 Fourier 余弦变换, y 保持不变. 这里选择 Fourier 余弦变换是由 B.C. 决定的. (读者可考虑为什么 Fourier 正弦变换是不合适的理由.) 我们得

$$(u_{yy})_c^\wedge(\xi,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_{yy}(x,y)\cos(\xi x)dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_{xx}(x,y)\cos(\xi x)dx,$$

其中 $(u_{yy})_c^\wedge(\xi,y)$ 表示 u_{yy} 的 Fourier 余弦变换. 经两次分部积分, 得

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_{xx}(x,y)\cos(\xi x)dx \\
=&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(x,y)\cos(\xi x)\Big|_{x=0}^{\infty} \\
&-\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_x(x,y)\sin(\xi x)dx \\
=&-\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}u(x,y)\sin(\xi x)\Big|_{x=0}^{\infty}+\xi^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\cos(\xi x)dx=\xi^2\hat{u}_c(\xi,y),
\end{aligned}$$

其中用了 B.C. 和假设 $u(\infty,y)=u_x(\infty,y)=0$. 因此,

$$(u_{yy})_c^\wedge(\xi,y)-\xi^2\hat{u}_c(\xi,y)=0,$$

并作形式假设 $(u_{yy})_c^\wedge=(\hat{u}_c)_{yy}$, 则该关于 y 的常微的通解是

$$\hat{u}_c(\xi,y)=c_1(\xi)e^{\xi y}+c_2(\xi)e^{-\xi y},$$

其中 $c_1(\xi)$ 和 $c_2(\xi)$ 是 ξ 的任意函数. 由于所给问题要求 $u(x,y)$ 是有界的, 所以假设对 $\xi>0$, $c_1(\xi)=0$ 以及对 $\xi<0$, $c_2(\xi)=0$. 于是

$$\hat{u}_c(\xi,y)=c(\xi)e^{-|\xi|y},$$

其中 $c(\xi)=c_1(\xi)+c_2(\xi)$. 特别, $\hat{u}(\xi,0)=c(\xi)$. 由第二个 B.C., 得

$$c(\xi)=\hat{u}_c(\xi,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx=\hat{f}_c(\xi).$$

因此, $\hat{u}_c(\xi,y)=\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}$, 然后由单边变换的反演定理 (参看 (25)), 得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}\cos(\xi x)d\xi\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(s)\cos(\xi s)ds\right)e^{-\xi y}\cos(\xi x)d\xi.\end{aligned}$$

如果交换积分次序, 则关于 ξ 的积分可直接计算, 且导致的解与通过在第 7.4 节的 Poisson 积分公式 (40) 中以 f 的偶延拓替换 f 获得的解相同. □

概要 7.5

1. 有限杆或半无限杆的热问题: 有限杆或半无限杆的热问题的解由镜像法, 可从第 7.4 节关于无限杆的定理 1 的解获得. 这种通过镜像法来完成的做法, 与有限弦问题的解由第五章的无限弦的 D'Alembert 公式获得的方式相同. 在每个端点都是绝热或都保持在 0 的情形, 初始温度延拓为无限杆, 必须选择在每个等于 0 的端点是奇函数, 在每个绝热的端点是偶函数的延拓. 在例 5 中, 用镜像法解答了在端点具指定的依赖时间的温度的热问题, 这表明镜像法不局限于齐次 B.C..

2. 端点保持 0 的有限杆问题的情形 (定理 1): 考虑有限杆问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=ku_{xx},\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x),\end{aligned}\tag{S1}$$

其中 $f(x)$ 是连续的, 且 $f(0)=f(L)=0$, 我们要求 $u(x,t)$ 对 $t\geqslant 0$ 和 $0\leqslant x\leqslant L$ 是连续的. 这意味着 $u(x,t)$ 对 $t>0$ 不仅要满足 D.E. 还要满足连续性条件

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)}u(x,t)=f(x_0).\tag{S2}$$

定理 1 令 $\tilde{f}_o(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是 $f(x)$ 在 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的奇延拓 $f_o(x)$ 的周期延拓. 则问题 (S1) 满足 (S2) 的唯一解是

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)} \tilde{f}_o(y)dy, & t > 0, \\ f(x), & t = 0. \end{cases} \tag{S3}$$

3. 形式解的有效性: 像 (S3) 的积分公式, 在确定第 4.3 节讨论过的有限杆热问题的形式无穷 Fourier 级数解时是有益的. 该积分公式表明解存在且对 $t > 0$ 实际上是 C^∞ 的, 即使连续的初始温度分布有角点. 证明对每个 $t > 0$, 该积分公式解的 Fourier 级数与形式解相同 (参看定理 2 和它的证明), 构成了形式解有效性的证明. 我们没用验证由叠加原理获得的形式解, 已经看到这种解对无穷级数可能不成立. 当 $t = 0$, 形式解会不收敛到 $f(x)$, 但连续性条件 (S2) 成立, 因 (S2) 对等价的积分解成立.

4. Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换: 令 $f(x)$ 是定义在 $0 \leqslant x < \infty$ 的函数. 则 $f(x)$ 的 **Fourier正弦变换**和 **Fourier余弦变换**分别由以下给出

$$\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)dx \quad \text{和} \quad \hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)dx,$$

只要这些积分存在. 当 $f(x)$ 是实值函数时, 有

$$\hat{f}_c(\xi) = (f_e)^\wedge(\xi) \quad \text{和} \quad -i\hat{f}_s(\xi) = (f_o)^\wedge(\xi).$$

可利用通常 Fourier 变换的反演定理来建立这些单边变换相关的反演公式 ($x > 0$)

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\xi)\sin(\xi x)d\xi$$

和

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\xi)\cos(\xi x)d\xi,$$

其中假设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是分段 C^1 和绝对可积的. 例 9 阐述了 Fourier 余弦变换在解第一象限中的 Dirichlet/Neumann 问题的用处, 虽然直接运用镜像法更简单.

练习 7.5

1. 求以下问题的解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx},\quad x>0,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是分段 C^1 和绝对可积的, 且当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$.

2. 由形式计算求以下问题一个形式解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = u_{xx},\quad x>0,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=h(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=0,\end{aligned}$$

其中 $h(t)$ 是适当的连续函数.

提示 寻求是 x 的偶函数的解 $u(x,t)$(参看例 4, 例 5 和例 6).

3. 求以下问题的一个假定性解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = u_{xx},\quad 0<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=h(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=f(x),\end{aligned}$$

其中 $h(t)$ 和 $f(x)$ 是适当的连续函数.

4. (a) 利用 Fourier 变换方法 (形式上的), 求以下具齐次 I.C. 和 B.C. 的非齐次热方程的假定性解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = ku_{xx}+h(x,t),\quad 0<x<\infty,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad u_x(0^+,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=0.\end{aligned}$$

(b) 证明 (a) 部分求得的假定性解也可直接通过形式利用 Duhamel 原理得到.

提示 关于 Duhamel 原理参看第 3.4 节.

5. 利用镜像法和 Fourier 正弦变换各求出以下问题的一个解:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x,\ y<\infty;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(0^+,y)=0;\\u(x,0^+)=f(x),\end{cases}\end{aligned}$$

其中假设 $u(x,y)$ 是有界的, 且 $u(\infty,y)=u_x(\infty,y)=0,\ 0\leqslant y<\infty$. 证明这两个解实际上是相同的.

6. (a) 如同例 5, 求以下波问题假定性解的积分公式:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<\infty,\ t>0;\\&\text{B.C.}\quad u(0^+,t)=h(t);\\&\text{I.C.}\quad u(x,0^+)=u_t(x,0^+)=0,\end{aligned}$$

其中假设 $u(\infty,t)=u_x(\infty,t)=0,\ t>0$. 可利用事实: 常微 $y''(t)+\xi^2y(t)=g(t)$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的解由

$$y(t)=\frac{1}{\xi}\int_0^t g(s)\sin(\xi(t-s))ds$$

给出 (参看第 7.4 节的习题 12).

(b) 通过假设具形如 $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$ 的解, 得到更简单的假定性解: 如果 $x<t,\ u(x,t)=h(t-x)$, 如果 $x\geqslant t,\ u(x,t)=0$. 在什么条件下该解对 $t,\ x>0$ 是 D.E. 的 C^2 解?

提示 从 I.C. 注意到, 对 $x>0$ 有 $F(x)+G(x)=0$ 和 $F'(x)-G'(x)=0$. 因此, $u(x,t)=0,\ 0<t<x$. 现利用 B.C.$h(t)=u(0,t)=G(-t)$ 来确定 $G(s),\ s<0$, 从而得到 $u(x,t),\ 0<x<t$.

(c) 当 $h(t)\equiv 1,\ t>0$ 时, 明确地求出 (a) 中解答的值.

7. 以 $u_x(0^+,t)=h(t),\ t>0$ 替换习题 6 中的 B.C.. 用你选择的方法求由此产生的问题的假定性解 $u(x,t)$. 对 $h(t)$ 什么假设下, $u(x,t)$ 对 $x>0$ 和 $t>0$ 是 D.E. 的 C^2 解?

8. (a) 求解以下第一象限 Dirichlet 问题, 其中 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是给定的有界连续函数, 且 $g(0)=f(0)=0$. 只有一个解吗?

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x,\ y<\infty;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(0^+,y)=g(y),\\ u(x,0^+)=f(x).\end{cases}\end{aligned}$$

(b) 通过由第一象限到上半平面的共形映照 $F(z)=z^2$ 把 (a) 部分的问题转化成上半平面的问题来解原问题.

9. (a) 利用 Fourier 变换求以下问题的假定性解 $u(x,t)$, 其中 b 是常数:

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{+}bu_x=h(x,t),\quad -\infty<x,\ t<\infty;\\&\text{I.C.}\quad u(x,0)=f(x).\end{aligned}$$

(b) 对 $h(x,t)$ 和 $f(x)$ 什么假设下, (a) 部分中求得的解是 D.E. 的 C^1 解?

补充 (反演定理)

令 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ 是在以下意义下的分段 C^1 函数: $f'(x)$ 在每个有限区间上除去有限多个点是存在且连续的, $f'(x)$ 在这些点处具有有限跳跃. 对这样的函数, 在每点 x_0, 下面极限存在

$$f(x_0^+) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \quad 和 \quad f(x_0^-) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x),$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x\downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0} \quad 和 \quad f'(x_0^-) = \lim_{x\uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}. \tag{1}$$

反演定理 令 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, 是分段 C^1 和绝对可积的(即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$). 则对任意 x_0, 有

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x_0} d'\xi \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x_0} d'\xi. \tag{2}$$

证明 (2) 的右边是

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} d'x \right) e^{i\xi x_0} d'\xi = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-R}^{R} e^{-i\xi(x-x_0)} d'\xi \right) d'x, \tag{3}$$

其中积分次序的交换是允许的, 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ 和 $\int_{-R}^{R} |e^{-i\xi(x-x_0)}|d\xi = 2R < \infty$ (参看附录 3). 现对 $x \neq x_0$,

$$\int_{-R}^{R} e^{-i\xi(x-x_0)} d'\xi = \frac{e^{iR(x-x_0)} - e^{-iR(x-x_0)}}{i(x-x_0)} = \frac{2\sin(R(x-x_0))}{x-x_0},$$

当 $x = x_0$ 时左边等于 $2R$. 由于 $d'\xi d'x \equiv \frac{1}{2\pi} d\xi dx$, 故 (3) 变成

$$\lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} f(x) \frac{\sin(R(x-x_0))}{x-x_0} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \frac{\sin(R(x-x_0))}{x-x_0} dx \right).$$

则只需证明第一项的极限是 $\frac{1}{2} f(x_0^+)$ 以及第二项的极限是 $\frac{1}{2} f(x_0^-)$. 由于证明是类似的, 故只证明

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} f(x) \frac{\sin(R(x-x_0))}{x-x_0} dx = \frac{1}{2} f(x_0^+). \tag{4}$$

由变量变换 $z=x-x_0$, (4) 中的积分变成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0+z)\frac{\sin(Rz)}{z}dz. \tag{5}$$

在下面的引理中将证明 $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(Rz)}{z}dz=\frac{1}{2}$. 用 $f(x_0^+)$ 相乘, 得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0^+)\frac{\sin(Rz)}{z}dz=\frac{1}{2}f(x_0^+).$$

因此,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0+z)\frac{\sin(Rz)}{z}dz-\frac{1}{2}f(x_0^+)\right|\\ =&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+z)-f(x_0^+)]\frac{\sin(Rz)}{z}dz\right|\equiv I.\end{aligned} \tag{6}$$

需要证明 (6) 中的 I 当 $R\to\infty$ 时趋于 0. 对任意常数 $A>1$, 有

$$\begin{aligned}I\leqslant&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^A \frac{f(x_0+z)-f(x_0^+)}{z}\sin(Rz)dz\right|\\ &+\frac{1}{\pi}\int_A^\infty |f(x_0+z)|\left|\frac{\sin(Rz)}{z}\right|dz+\frac{1}{\pi}|f(x_0^+)|\left|\int_A^\infty\frac{\sin(Rz)}{z}dz\right|.\end{aligned} \tag{7}$$

令 W,J 和 K 分别代表表示式 (7) 的右端第 1,2 和 3 项. 因 $z\geqslant A>1$, 故在 J 有 $|\frac{\sin(Rz)}{z}|\leqslant 1$, 由此得, 当 $A\to\infty$ 时

$$J<\frac{1}{\pi}\int_A^\infty |f(x_0+z)|dz=\frac{1}{\pi}\int_{A+x_0}^\infty |f(y)|dy\to 0,$$

因假设 $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx<\infty$. 于是, 通过取 A 充分大可使 J 任意小. 现经变量变换 $x=Rz$, 得

$$K=\frac{1}{\pi}|f(x_0^+)|\left|\int_{AR}^\infty\frac{\sin x}{x}dx\right|,$$

于是, 对任一 $A>1$ 的值, 可通过取 R 足够大使得 K 为期望的那样小 (为什么? 参看下面的引理). 最后, 由于 (1) 中的极限存在, 故第 4.2 节的 Riemann-Lebesgue 引理隐含: 当 $R\to\infty$ 时, W 趋于 0, 于是完成了 (4) 的证明 (也可参看第 7.1 节的习题 10). 由于关于 x_0^- 对应于 (4) 的结果可以同样的方法证明, 故期望的公式 (2) 成立. □

引理

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

证明　注意到对任一 $x>0$, $\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{x}$. 因此, 对 $0<\epsilon<R$ 有

$$\int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}dx = \int_\epsilon^R\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x d\lambda dx = \int_0^\infty\int_\epsilon^R e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda, \tag{9}$$

其中交换积分次序是允许的, 因为 $|e^{-\lambda x}\sin x|\leqslant e^{-\lambda x}$ 和 $e^{-\lambda x}$ 在带形 $\lambda\geqslant 0$, $\varepsilon\leqslant x\leqslant R$ 中是可积的. 现有

$$\int_\epsilon^R e^{-\lambda x}\sin x dx = \text{Im}\left(\int_\epsilon^R e^{(i-\lambda)x}dx\right) = \text{Im}\left(\left.\frac{e^{(i-\lambda)x}}{i-\lambda}\right|_\epsilon^R\right)$$

$$= \text{Im}\left(\frac{e^{(i-\lambda)R}-e^{(i-\lambda)\epsilon}}{i-\lambda}\right) = \text{Im}\left(\frac{(i+\lambda)[e^{(i-\lambda)\epsilon}-e^{(i-\lambda)R}]}{1+\lambda^2}\right). \tag{10}$$

注意到

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\infty\int_R^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda\right| = \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\left|\text{Im}\left(\frac{(i+\lambda)e^{(i-\lambda)R}}{1+\lambda^2}\right)\right|d\lambda$$

$$\leqslant \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda R}d\lambda = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0.$$

因此, 由于该极限为零, 故利用 (9), 有

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^\infty\int_\epsilon^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda - \int_0^\infty\int_R^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda\right)\\ &= \int_0^\infty\int_\epsilon^\infty e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda = \int_0^\infty \text{Im}\left(\frac{(i+\lambda)e^{(i-\lambda)\epsilon}}{1+\lambda^2}\right)d\lambda\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda.\end{aligned} \tag{11}$$

现有

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda. \tag{12}$$

因 $\lambda e^{-\lambda\epsilon} \leqslant \frac{1}{\epsilon e}$, 故对任意常数 $a > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right| \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_0^{a}\frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right| + \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_a^{\infty}\frac{e^{-\lambda\epsilon}\lambda\sin\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right| \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\sin\epsilon\int_0^a\frac{\lambda}{1+\lambda^2}d\lambda + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sin\epsilon}{\epsilon}\frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan a\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan a\right].
\end{aligned}$$

因 a 可任意大, 故 (12) 中最后的极限等于零. 剩下来证明

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2} \quad \text{或} \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda = 0. \tag{13}$$

为此,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_0^{a}\frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda + \int_a^{\infty}\frac{1-e^{-\lambda\epsilon}\cos\epsilon}{1+\lambda^2}d\lambda\right) \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\to 0}[1-e^{-a\epsilon}\cos\epsilon]\int_0^a\frac{1}{1+\lambda^2}d\lambda + \int_a^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2}-\arctan a.
\end{aligned}$$

因 a 可任意大, 故 (13) 得证. □

注记 如果愿意接受以下计算中的交换积分次序的有效性的话, 则由形式计算很快得到该引理.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}\sin x d\lambda dx \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}d\lambda = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

注意到由 Green 公式 (参看第 4.1 节) 立刻得到

$$\lambda^2\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}\sin x dx + \int_0^{\infty}e^{-\lambda x}\sin x dx = 1 \ (\lambda > 0),$$

此提供了上述计算中的第三个等式. 因此, 该引理证明的复杂性只是由于需要证明交换积分次序的有效性. 即使是对那些熟悉 Lebegue 积分理论 (或熟悉附录 2 和附录 3 的内容) 的读者, 这种有效性的证明也不是立刻能得出的, 因为 $\exp(-\lambda x)$ 在第一象限 $0 \leqslant \lambda$, $x < \infty$ 不是可积的. 的确,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx d\lambda &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda}d\lambda = \lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{R}}^{R}\frac{1}{\lambda}d\lambda \\
&= \lim_{R\to\infty}(\ln R - \ln\frac{1}{R}) = \lim_{R\to\infty} 2\ln R = \infty.
\end{aligned}$$

然而, $e^{-\lambda x}\sin x$ 在带形 $0 \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant \lambda < \infty$ 上是绝对可积的, 因

$$\int_0^R \int_0^\infty e^{-\lambda x}|\sin x| d\lambda dx \leqslant \int_0^R \int_0^\infty x e^{-\lambda x} d\lambda dx = R.$$

则 Fubini 定理 (参看附录 2) 使以下计算中的交换积分次序是有效的

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x d\lambda dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty \int_0^R e^{-\lambda x}\sin x dx d\lambda \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda^2+1} - \frac{e^{-R\lambda}[\lambda\sin R + \cos R]}{\lambda^2+1}\right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2+1} d\lambda = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

其中由控制收敛定理 (参看附录 3) 可在积分号下取极限. 在该注记前的证明虽然较长, 但它有不依赖附录 2 和附录 3 内容的优点. 最后, 我们提及一下, 该引理也可用复围线积分 (如果读者知道该内容) 来证明, 这种证明最终把积分转化到半单位圆周长度的一半 (即, $\frac{\pi}{2}$). □

第八章　高维情形的偏微

在前面的章节, 我们已经考虑了一维热流 ($u_t = ku_{xx}$) 和波的传播 ($u_{tt} = a^2u_{xx}$) 以及二维稳态温度, 静电学和流体流 ($u_{xx}+u_{yy}=0$). 由于我们生活在具三个空间维数的世界, 所以在高维情形检验对应的结果也是重要的, 在高维情形会提出很多非常相关的初边值问题. 由于在偏微研究和应用中的很多技巧和中心思想已经在处理低维情形中展现过, 把我们所学到的延拓到高维情形在概念上没有像想象中那么困难. 特别, 分离变量技巧,(齐次线性方程的) 叠加原理以及 Fourier 级数和 Fourier 变换的某些方面都可施行到高维情形.

由于坐标系的多样性, 大多数的难点本质上只是在技巧上. 例如, 在一直线上本质上只有一个标准坐标系, 但 (除了笛卡儿坐标或直角坐标) 在平面上有极坐标, 在空间有柱坐标和球坐标. 坐标的选取取决于所考虑区域的对称性 (如果有的话). 当变量可分离时, 某些导致的常微会是难以求解的. 的确, 某些解不能用初等函数 (例如, 正弦函数, 余弦函数, 指数函数, 等等) 来表示, 需引入新的特殊函数, 像 Bessel 函数. 遗憾的是在很多处理中, 由于注意力放在特殊的函数而不是 (偏微的) 的乘积解上, 在求解过程背后的主要思想被掩盖了, 这些乘积解是一些常微的解乘在一起的结果. 乘积解与时间无关的部分通常是 Laplace 算子 $\triangle$ 对于所考虑区域的特征函数. 特殊函数主要是用来构造满足 B.C. 的特征函数的. 一旦每个初始条件表示为特征函数的线性组合 (即, 写成一个特征函数的展开式), 则求得初边值问题的解通常是简单的. 特征函数展开 (参看 4.4 节)

构成了定义在光滑 (可能是弯曲) 的称为流形的多维空间上函数的 Fourier 级数的自然推广, 即使在其上, 比如由于缺少对称性, 变量分离是不可行的.

在 8.1 节用直角坐标考虑标准的高维热方程, 波方程和 Laplace 方程, 利用多重 Fourier 级数和多重 Fourier 变换求解这些偏微的初边值问题. 在 8.2 节引入 Laplace 算子的特征值和特征函数的统一概念, 主要在矩形上. 还证明在矩形上适当函数的特征函数展开 (多重 Fourier 级数) 的一致收敛定理. 第 8.3 节讨论了用球坐标表示的标准的偏微. 以几何上自然方式定义了球面上的 Laplace 算子, 以及引入它的特征函数 (称为球面调和函数). 在第 8.4 节证明了球面上的 C^2 函数 f 的特征函数展开式 (f 的 Laplace 级数) 一致收敛到 f. 在其他的问题中, 我们还研究在一个实体球内的热流以及振动气球的波问题. 在第 8.5 节考虑很多特殊函数, 如 Bessel 函数以及它们在解柱内热问题和表示圆形膜振动方式中的用处. 还求解了用量子力学描述氢原子中的电子能级的 Schrödinger 方程. 在第 8.6 节引入 n–维空间中光滑 k–维流形概念, 并在这种对象上定义了 Laplace 算子. 在最后一节中, 叙述了有关特征函数的性质, 它们在解的构造以及在流形上标准偏微问题的 Green 函数的应用结果. 虽然这里没有对这些结果都给出证明, 但提供了它们证明的参考文献.

§8.1 高维的偏微 —— 直角坐标

本节我们重新引出与应用密切相关的高维热方程, 波方程和 Laplace 方程. 在本节仅限于矩形或长方体上的边值问题, 所以用直角坐标. 由于这些技巧 (分离变量, 叠加原理和 Fourier 级数) 都是相当熟悉的, 所以可包括很多领域.

矩形和长方体上的热方程

在第 6.1 节已求得在一均匀介质中二维热流温度 $u(x,y,t)$ 可遵循的唯一可能的二阶线性偏微是

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}), \tag{1}$$

其中 k 是正常数 (热的扩散率) 且假设无热源. 在矩形情形, 产生了在矩形的边上温度保持 0 的 (1) 的最简单的初边值问题, 即

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_t = k(u_{xx}+u_{yy}), \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M,\ t>0; \\ \text{B.C.} & \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,M,t)=0, \\ u(0,y,t)=0, & u(L,y,t)=0; \end{cases} \\ \text{I.C.} & u(x,y,0)=f(x,y), \end{array} \tag{2}$$

其中 $f(x,y)$ 是连续函数, 在矩形的边界上等于零, 并不明显地要求 $u(x,y,t)$ 对 $t \geqslant 0$ 是连续的. 进行分离变量, 把乘积解 $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$ 代入 (1), 并把 t 从 x 和 y 中分离出来, 得

$$\frac{T''}{kT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = b, \tag{3}$$

b 为某个常数. 于是, 对某个常数 c, 有

$$\frac{X''}{X} = b - \frac{Y''}{Y} = c \quad 或 \quad \begin{cases} X''-cX=0, \\ Y''+(c-b)Y=0. \end{cases} \tag{4}$$

由 B.C. $u(0,y,t)=0$ 和 $u(L,y,t)=0$, 只有当 $c=c_n \equiv -(n\pi/L)^2$ 且 $X(x)$ 是 $\sin(n\pi x/L)$, $n=1,2,3,\cdots$ 的常数倍时才能避免零解. 类似地, 由 B.C. $u(x,0,t)=0$, $u(x,M,t)=0$ 和方程 $Y''+(c-b)Y=0$ 得到 $c-b=(m\pi/M)^2$ 和 $Y(y)$ 必是 $\sin(m\pi y/M)$, $m=1,2,3,\cdots$ 的常数倍. $-b$ 的可能值, 记作 $\lambda_{n,m}$, 由以下给出

$$\lambda_{n,m} \equiv (\frac{m\pi}{M})^2 - c_n = \pi^2\big((\frac{n}{L})^2 + (\frac{m}{M})^2\big), \quad m,\ n=1,2,3,\cdots. \tag{5}$$

由 (3), 有 $T''=kbT$, 因此 (2) 的 D.E. 和 B.C. 乘积解族由以下的常数倍组成

$$u_{n,m}(x,y,t) = e^{-\lambda_{n,m}kt}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \quad m,n=1,2,3,\cdots. \tag{6}$$

由于 (2) 的线性齐次 D.E. 和 B.C., 可应用叠加原理得到 D.E. 和 B.C. 的更一般

的解:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}u_{n,m}(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}e^{-\lambda_{n,m}kt}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{7}$$

其中整数 n 和 m 独立地从 1 取到某个有限数 N. 当 $t=0$ 时,

$$u(x,y,0)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}. \tag{8}$$

如果 (2) 中的初始温度 $f(x,y)$ 具有这种形式, 则 (7) 是 (2) 的解. 当然, 不是每个给定的 $f(x,y)$ 会正好具有这种形式. 然而, 可期望适当好的 $f(x,y)$ 可由形如 (8) 的和来逼近, 比如在某个正实验误差之内. 有一个最大值原理 (可用第 3.2 节中最大值原理相同的方式叙述和证明) 隐含 D.E. 和 B.C. 的两个解相差不会超过它们在 $t=0$ 时的最大值. 因此, 在初始逼近中的误差不随 t 的增加而变大. 此外, (2) 的唯一性由最大值原理保证. 和 (8) 称为 (有限) 二重 Fourier 正弦级数. 更精确地, 有以下定义

矩形 $(0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M)$ 上函数 $f(x,y)$ 的**二重Fourier正弦级数**是表示式

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{9}$$

其中

$$b_{n,m}=\frac{4}{LM}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}dxdy,\quad m,n=1,2,3,\cdots, \tag{10}$$

只要这些积分存在.

在第 8.2 节将讨论二重 Fourier 级数以及一些它们的收敛性质. 如果初始温度的二重 Fourier 正弦级数存在, 则 (2) 的形式解由 (7) 给出, 其中 N 由 ∞ 替换, $b_{n,m}$ 由 (10) 给出. 如果除了有限项之外 $b_{n,m}$ 都等于零, 则该形式解显然是精确的 C^{∞} 解. 下面的证明将会困难得多: 如果函数 $f(x,y)$ 是在闭矩形上连续,

在矩形的边上为零, 则形式解对 $t>0$ 定义了 (1) 的一个真实解, 当 $t\to 0^+$ 时该解可连续延拓到 $f(x,y)$. 回忆起这种类型的结果在一维情形通过把解表示成经适当延拓的初始温度与热方程的基本解的卷积给出过证明 (参看第 7.5 节的定理 1). 在问题 (2) 的情形, 令 $\tilde{f}_{o,o}(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的唯一的延拓 (到整个 xy–平面), 关于 x 是奇的和周期的 (以 $2L$ 为周期), 且关于 y 是奇的和周期的 (以 $2M$ 为周期). 则问题 (2) 唯一的连续解可写成以下形式

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)}\tilde{f}_{o,o}(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y},\ t>0, \tag{11}$$

其中当 $t=0$ 时, $u(x,y,0)=f(x,y)$. 解 (11) 通过镜像法获得 (参看第 7.5 节), 由镜像法把初始温度 $f(x,y)$ 适当延拓 (取决于 B.C.) 到定义在整个平面上的 $F(x,y)$. 则

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)}F(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y}\quad (t>0), \tag{12}$$

是在整个平面上热方程初值问题的解. 解 (12) 经形式利用二维 Fourier 变换方法得到, 我们将在 8.2 节讨论二维 Fourier 变换. (注意到 $4\pi kt$ 的平方根在 (12) 中不出现, 因为热方程的二维源解结果是 x 方向和 y 方向两个一维源解的乘积.) 如同一维情形 (参看第 7.4 节的定理 1), 利用 Leibniz 法则可直接证明, 对 $t>0$, (12) 是热方程的 C^∞ 解, 只要 $F(x,y)$ 是连续和有界的 (或绝对可积的). 在这种情形, 如同前面, 也可证明当 $t\to 0^+$ 时, (12) 连续地延拓到初始温度 $F(x,y)$(当然有 $F(x,y)=f(x,y)$, $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant M$).

在选取延拓 $F(x,y)$ 时, 根据 B.C.(如同在 (2) 中) 解要求为零的每条边上, 我们用奇延拓, 而对于是绝热的每条边上 (即, 在 B.C. 中, 如果温度$u(x,y,t)$ 的偏导数 [沿该边的法线方向] 是 0; 参看下面的例 2) 我们用偶延拓.

例 1 求解问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t=2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant 3,\quad 0\leqslant y\leqslant 5,\quad t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,5,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(3,y,t)=0;\end{cases}\\
&\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=\cos[\pi(x+y)]-\cos[\pi(x-y)]+\sin(2\pi x)\sin\tfrac{3\pi y}{5}.
\end{aligned}\tag{13}$$

解　我们可用 (7), 只要 I.C. 能写成 (8) 的形式. 利用公式 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$, 得到期望的形式

$$u(x,y,0)=-2\sin\frac{3\pi x}{3}\sin\frac{5\pi y}{5}+\sin\frac{6\pi x}{3}\sin\frac{3\pi y}{5}.$$

由于这是 (8) 的形式, 其中 $L=3$, $M=5$, 故可用 $k=2$ 的 (7), 得

$$u(x,y,t)=-2e^{-4\pi^2 t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)+e^{-218\pi^2 t/25}\sin(2\pi x)\sin\frac{3\pi y}{5}.$$

虽然将会不方便, 也可把解写成 (11) 的形式, 其中 $\tilde{f}_{o,o}(x,y)=\cos(\pi(x+y))-\cos(\pi(x-y))+\sin(2\pi x)\sin\frac{3\pi y}{5}$, 它具有所要求的函数奇性和周期性. □

类似地可处理另一种类型的边界条件, 其中一些边上是绝热的而另一些边上保持在 0, 如下面例子所表示的.

例 2　解

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t=k(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad 0\leqslant y\leqslant M,\quad t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u_y(x,M,t)=0,\\ u_x(0,y,t)=0, & u_x(L,y,t)=0;\end{cases}\\
&\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=\cos\tfrac{2\pi x}{L}\sin\tfrac{3\pi y}{2M}.
\end{aligned}\tag{14}$$

如何处理具形式 $u(x,y,0)=f(x,y)$ 的一般的 I.C.?

解　这时边 $y=0(\ 0\leqslant x\leqslant L)$ 保持为零, 而其他的三条边是绝热的. 与通常一样, 寻求 D.E. 满足 B.C. 的乘积解, 然后考虑 I.C.. 分离变量导出关于 X 和 Y 的方程 (4). B.C. $u_x(0,y,t)=0$ 和 $u_x(L,y,t)=0$ 隐含 $X(x)$ 是 $\cos\frac{n\pi x}{L}$, $n=0,1,2,\cdots$ 的常数倍. B.C. $u(x,0,t)=0$ 和 $u_y(x,M,t)=0$ 隐含 $Y(y)$ 是 $\sin((m+\frac{1}{2})\pi y/M)$, $m=0,1,2,\cdots$ 的常数倍 (参看第 3.3 节的例 2). 满足 (14)①的 D.E. 和 B.C. 的乘积解族由以下的常数倍组成

$$u_{n,m}(x,y,t)=\exp\left(-\left[\left(\frac{n}{L}\right)^2+\left(\frac{m+\frac{1}{2}}{M}\right)^2\right]\pi^2 kt\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{M},\tag{15}$$

n, $m=0,1,2,\cdots$. 在更一般初始温度 $f(x,y)$ 的情形, 要尝试把 $f(x,y)$ 写成函数 $u_{n,m}(x,y,0)$ 的线性组合, 然后 $u_{n,m}(x,y,t)$ 相同的线性组合将给出 $t>0$ 的解. 对眼下处理的问题, 注意到 I.C. 只是 $u(x,y,0)=u_{2,1}(x,y,0)$. 因此

$$u(x,y,t)=u_{2,1}(x,y,t)=\exp\left(-\left[\left(\frac{2}{L}\right)^2+\left(\frac{3}{2M}\right)^2\right]\pi^2 kt\right)\cos\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{3\pi y}{2M}.$$

①原文误为 (10).——译者

如果 I.C. 是 $u(x,y,0)=f(x,y)$, 其中 $f(x,y)$ 在闭矩形上是连续的且在边 $y=0$ 上为零, 但不必是 (15) 中的 $u_{n,m}(x,y,0)$ 的有限线性组合, 则可证 (参看第 7.5 节定理 2) 当 $t>0$ 时, 以下是 D.E. 和 B.C. 的解:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}c_{n,m}u_{n,m}(x,y,t), \tag{16}$$

其中

$$c_{n,m}=\frac{4}{LM}\int_0^M\int_0^L f(x,y)\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{M}dxdy. \tag{17}$$

当 $t\to 0^+$ 时该解连续延拓到 $f(x,y)$, 但牵涉到导数的 B.C. 将不成立, 除非 $f(x,y)$ 满足这些 B.C.. 等价地, 当 $t>0$, 有积分公式:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)}F(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y},\ t>0, \tag{18}$$

其中 $F(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的唯一延拓 (到整个 xy–平面), 关于 x 是奇的和周期的 (以 $2L$ 为周期), 关于 y 是周期的 (以 $4M$ 为周期), 关于 $y=M$ 是偶的, 关于 $y=0$ 是奇的 (参看第 5.3 节例 2, 其中用了这种延拓). □

容易把上述的考虑推广到三维热流情形. 与其讨论一般的情形我们不如来考虑一个例子.

例 3 一边长为 1 的立方体, 具热扩散常数 k, 最初处于常数沸点温度 100°C, 突然 (在 $t=0$) 被置于 0°C 的冰水中. 求作为 t 的函数在方体中心的温度, 并证明当 t 充分大时该温度 $\approx 6400\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$. 估计最小的 t 使得在该中心的真实温度与此近似在 10% 之内 (比如, 在 $5760\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$ 与 $7040\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$ 之间).

解 设该方体由 $0\leqslant x,\ y,\ z\leqslant 1$ 表示. 鉴于 B.C. $u(0,y,z)=0,\ u(1,y,z)=0,\ u(x,0,z)=0,\cdots$, 由分离变量得到热方程 $u_t=k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$ 关于这些 B.C. 的以下乘积解族:

$$u_{n,m,p}(x,y,z,t)=e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2kt}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(p\pi z).$$

当 x, y 或 z 等于 0 或 1 时, 所有这些解为 0. 因此, 这些解的叠加

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n,m,p=1}^{\infty}B_{n,m,p}u_{n,m,p}(x,y,z,t)$$

当 $t=0$ 时在方体的各个面上不可能是 100. 于是, 我们作形式处理. 假设严格在方体的内部, 有

$$100=\sum_{n,m,p=1}^{\infty}B_{n,m,p}u_{n,m,p}(x,y,z,0). \tag{19}$$

注意到这些函数 $u_{n,m,p}(x,y,z,0)$ 在方体中在以下意义下是正交的

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\int_0^1 u_{n,m,p}\ (x,y,z,0)u_{N,M,P}(x,y,z,0)dxdydz\\&\qquad=\begin{cases}0, & \text{如果 } n\neq N \text{ 或 } m\neq M \text{ 或 } p\neq P,\\ \frac{1}{8}, & \text{如果 } n=N,\ m=M \text{ 和 } p=P.\end{cases}\end{aligned}$$

则形式地由该正交性和 (19), 得

$$\begin{aligned}B_{n,m,p}&=8\int_0^1\int_0^1\int_0^1 100\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(p\pi z)dxdydz\\&=\frac{800}{\pi^3}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\frac{1}{m}[1-(-1)^m]\frac{1}{p}[1-(-1)^p]\\&=\begin{cases}\frac{6400}{\pi^3 nmp}, & \text{如果 } n,\ m \text{ 和 } p \text{ 是奇数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

因此, 形式上有

$$u(x,y,z,t)=\frac{6400}{\pi^3}\sum_{n,m,p\ \text{奇数}}^{\infty}\frac{1}{nmp}e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2 kt}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(p\pi z). \tag{20}$$

虽然形式上得到这个公式, 但可证明对 $t>0$, (20) 定义热方程一个 C^∞ 解, 且对 (x,y,z) 严格在方体的内部, 有 $u(x,y,z,0^+)=100$. 计算该解在方体中心的

值, 有

$$
\begin{aligned}
u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t) &= \frac{6400}{\pi^3}\sum_{n,m,p\ \text{奇数}}^{\infty}\frac{1}{nmp}e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2kt}(-1)^{(n+m+p-3)/2} \\
&= \frac{6400}{\pi^3}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\left(\sum_{\substack{n+m+p=2q+3\\ n,m,p\ \text{奇数}}}^{\infty}\frac{1}{nmp}e^{-(m^2+n^2+p^2)\pi^2kt}\right). \qquad (21)
\end{aligned}
$$

关于 q 的求和是交错的, 但括号内的表示式, 记作 $A(q,t)$, 当 q 增加时不总是单减的 (例如,$A(0,0)=1$ 和 $A(1,0)=1$).(读者也许希望判断 $A(q,0)$ 对 $q\geqslant 1$ 是否关于 q 是单减的.) 因此, 无法得出一个部分和的误差不超过后面一项. 然而, 即刻我们将会求得一正数 t_0, 使得对 $t>t_0$, $A(q,t)$ 关于 q 总是单减的, 于是对 $t>t_0$, 这第一项 $e^{-3\pi^2kt}$ 与整个和 (21) 相差不超过第二项的数值 $e^{-11\pi^2kt}$. 对 $t>\ln 10/(8\pi^2k)\approx 0.02916/k$, 该第二项小于第一项的 10%. 因此对 $t>0.02916/k$, 只用第一项来近似 (21) 由此产生的误差小于 10%, 如果现在要确定的 t_0 的值小于 $0.02916/k$ 的话. 为求 t_0, 注意到满足 $n+m+p=2q+3$ 的每组三元数 (n,m,p) 产生和数为 $2(q+1)+3$ 的三元数 (即, $(n+2,m,p)$, $(n,m+2,p)$, $(n,m,p+2)$). 然而, 在这种过程中, 指数中的因子 $(n^2+m^2+p^2)$ 至少增加 6 (例如, $(n+2)^2>n^2+2n+4\geqslant n^2+6$). 因此, 考虑所有的三元数组, 得到 $A(q+1,t)<3e^{-6\pi^2kt}A(q,t)$. 因此, $A(q,t)$ 必关于 q 严格递减, 只要 $3e^{-6\pi^2kt}<1$ 或 $t>\ln 3/(6\pi^2k)\approx 0.0186/k=t_0$. 于是, 由于 $t_0<0.02916/k$, 故在中心的温度将在 $6400\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}$ 的 10% 之内, 只要 $t>0.02916/k$. 可验证, 当 $t=0.02916/k$ 时, 不论 k 为何值, 该近似温度 $\approx 87°$C. □

注记 函数 (20) 以下面的做法可用一个积分公式来表示. 把空间分解成方体, 这些方体的顶点的坐标都是整数. 令 $F(x,y,z)$ 是这样的函数: 在方体 $0<x,\ y,\ z<1$ 内为 1, 在该方体的每个面上为 0, 在与该方体相邻且有一个公共面的方体严格内部为 -1. 重复这种方式, 使 $F(x,y,z)$ 在整个空间有定义, $F(x,y,z)$ 在每个方体内部为 1 或 -1 且在公共面上为 0(平均值). 通过应用 Fourier 变换技巧, 对 $t>0$ 得到另一解:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} & e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2]/(4kt)}\cdot \\
& F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}.
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

解的这种形式似乎计算起来更困难. 然而, 如果取 $x = y = z = \frac{1}{2}$, 且把积分区域限制在有限的长方体 B, $-1 < \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} < 2$(包括 27 个单位方体并以原方体作为中心) 之内的话, 对小的 $t > 0$(即, 当例 3 中的近似是不好的时刻) 可得到 $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t)$ 很精确的近似. 对小的 t, 这种新的近似将是好的, 因为对 $x = y = z = \frac{1}{2}$ 和充分小的正数 t, (22) 的被积函数在 B 外非常小. 在 B 上的积分可用数值计算或用好的正态分布表帮助下计算. □

长方体上的 Laplace 方程

也许长方体上 Laplace 方程最简单类型的问题是

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M,\ 0 < z < P; \\ \text{B.C.} & \begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y), \quad u(x,y,P) = g(x,y), \\ u(x,y,z) = 0, \quad \text{在面 } x = 0,\ x = L,\ y = 0,\ y = M \text{ 上}, \end{cases} \end{array} \tag{23}$$

其中 f 和 g 是给定的在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant M$ 上连续的函数, 它们在该矩形的边界上为零. 我们寻求 D.E. 在长方体内的 (C^2) 解, 该解在满足 B.C. 的意义下连续延拓到长方体的边界. 熟悉的方法是利用分离变量来求满足齐次 B.C. 的那些乘积解 $X(x)Y(y)Z(z)$, 然后利用叠加原理, 取这些乘积解的线性组合使其满足 B.C. $u(x,y,0) = f(x,y)$ 和 $u(x,y,P) = g(x,y)$. 把乘积 $X(x)Y(y)Z(z)$ 代入 D.E. 得到 $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$. 这些项中的任一项不可能被消除留下剩余两项的和式, 除非被消除项是常数 (为什么?). 根据过去的经验, 我们知道为使 $X(x)$ 满足 B.C. $X(0) = X(L) = 0$, 必有 $X(x)$ 是 $\sin\frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的常数倍, 类似地, $Y(y)$ 是 $\sin\frac{m\pi y}{M}$, $m = 1, 2, 3, \cdots$ 的常数倍. 对每对 (n, m), 关于 Z 的方程是 $Z'' - \pi^2[(n/L)^2 + (m/M)^2]Z = 0$. 考虑到 (可能的) 非齐次 B.C. 是给定在面 $z = 0$ 和 $z = P$ 上这样的事实, 表示关于 Z 的方程的通解的一个很方便的方式是

$$Z_{n,m}(z) = \frac{1}{\sinh(P\sqrt{\lambda_{n,m}})}\left(a_{n,m}\sinh((P-z)\sqrt{\lambda_{n,m}}) + b_{n,m}\sinh(z\sqrt{\lambda_{n,m}})\right),$$

其中 $\sqrt{\lambda_{n,m}} = \pi\sqrt{(n/L)^2 + (m/M)^2}$. 因此, 齐次 D.E. 和 B.C. 更一般的解是

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{N} Z_{n,m}(z) \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}. \tag{24}$$

注意到在面 $z = 0$ 和 $z = P$ 上, 有

$$u(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{N} a_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}$$

和

$$u(x,y,P) = \sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi y}{M}.$$

因此, 如果 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 分别由这些有限二重 Fourier 正弦级数给出, 则问题 (23) 的一个解由 (24) 给出. 当 $f(x,y)$ 或 $g(x,y)$ 不是有限二重 Fourier 正弦级数时, 我们有形式解, 用很大的努力可证明该形式解严格在长方体内是有效的并可连续延拓到长方体各面上指定的值. 对 Dirichlet 问题 (23)(或更一般地, 在 $\mathbf{R}^n$, $n = 1,2,3,\cdots$ 中任一有界开集上的 Dirichlet 问题) 有最大值最小值原理, 可像第 6.4 节定理 1 的证明那样来给予证明. 于是, 边界数据的合理的近似导出在内部合理的解.

例 4 求常数 c, 使得以下 Neumann 问题有解, 并求出这样的解. 解唯一吗?

$$\text{D.E.} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad 0 < x,\ y,\ z < \pi.$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u_x(0,y,z) = u_x(\pi,y,z) = 0, & u_y(x,0,z) = u_y(x,\pi,z) = 0, \\ u_z(x,y,0) = 0, & u_z(x,y,\pi) = c + 4\sin^2 x\cos^2 y. \end{cases} \tag{25}$$

解 很快可验证 D.E. 满足齐次 B.C. 的乘积解具有形式:

$$u_{n,m}(x,y,z) = a_{n,m}\cosh\left(\sqrt{n^2+m^2}z\right)\cos(nx)\cos(my), \quad n,m = 0,1,2,\cdots.$$

应用叠加原理产生更一般的解

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=0}^{N} a_{n,m}\cosh\left(\sqrt{n^2+m^2}z\right)\cos(nx)\cos(my), \tag{26}$$

对此, 有

$$u_z(x,y,\pi)=\sum_{n,m=0}^{N}a_{n,m}\sqrt{n^2+m^2}\sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right)\cos(nx)\cos(my). \tag{27}$$

注意到最后的表达式是具有零常数项 (即 $\sqrt{0^2+0^2}=0$) 的有限二重余弦级数. (25) 中非齐次 B.C. 可写成有限二重余弦级数的形式:

$$u_z(x,y,\pi)=(c+1)-\cos(2x)+\cos(2y)-\cos(2x)\cos(2y). \tag{28}$$

如果 $c=-1$, 则可相比较 (27) 和 (28) 的系数得到解

$$u(x,y,z)=\frac{\cosh(2z)[\cos(2y)-\cos(2x)]}{2\sinh(2\pi)}-\frac{\cosh(z\sqrt{8})\cos(2x)\cos(2y)}{\sqrt{8}\sinh(\pi\sqrt{8})}.$$

可对该解加上任一常数得到又一个解. 为理解为何必须取 $c=-1$, 回忆起 $u(x,y,z)$ 可解释为稳态温度函数, 它只有当通过这些面的热能净流量是 0 时才存在. 因此, $c+4\sin^2 x\cos^2 y$ 在面 $z=\pi$ 上的积分必须为零, 所以 $c=-1$. □

矩形上的波方程

令 $u(x,y,t)$ 是绷在矩形 $0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M$ 上均匀薄膜的横向位移 (在 z 方向). 利用与第 6.1 节相同的论证, 导出支配这种位移的唯一的线性二阶偏微是二维波方程 $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$ 是可能的, 其中 a 是受到干扰的薄膜中传播的常速度. 关于 $u(x,y,t)$ 合适的初边值问题是

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M,\ -\infty<t<\infty;\\
&\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,M,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(L,y,t)=0;\end{cases}\\
&\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=f(x,y),\quad u_t(x,y,0)=g(x,y).
\end{aligned} \tag{29}$$

分离变量过程与二维热问题类似, 除了以 $T''-ba^2T=0$ 代替 $T'-bkT=0$.

如前, $-b$ 的允许值是 (5) 的 $\lambda_{n,m}$, 因此, 得到乘积解集合

$$u_{n,m}(x,y,t)=\left(a_{n,m}\cos(at\sqrt{\lambda_{n,m}})+b_{n,m}\right)\sin(at\sqrt{\lambda_{n,m}})\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{30}$$

其中

$$\lambda_{n,m}=\pi^2\left((\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2\right),\quad n,m=1,2,3,\cdots. \tag{31}$$

如果初始位移和初始速度是有限二重 Fourier 正弦级数

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}A_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},\quad g(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}B_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

则问题 (29) 的解是

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N}u_{n,m}(x,y,t),\ \text{其中}\ a_{n,m}=A_{n,m}\ \text{和}\ b_{n,m}=\frac{B_{n,m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}}. \tag{32}$$

由 (30) 定义的函数 $u_{n,m}(x,y,t)$ 称为矩形膜的 (n,m) 级**谐波**. 该谐波的**频率**是单位时间实现的振动的次数, 即

$$\nu_{n,m}=\frac{a}{2\pi}\sqrt{\lambda_{n,m}}=\frac{a}{2}\sqrt{(\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2}. \tag{33}$$

例 5 证明: 如果 $(L/M)^2$ 不是有理数, 则没有两个谐波 (30) 有相同的频率. 对正方膜, 证明有无穷多对具有相同频率的谐波.

解 假设 $\nu_{n,m}=\nu_{p,q}$ 和 $(n,m)\neq(p,q)$. 则 $n\neq p$ 和 $m\neq q$(为什么?). 因此, $q^2-m^2\neq 0$, 故

$$(\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2=(\frac{p}{L})^2+(\frac{q}{M})^2\quad \text{隐含}\quad \frac{n^2-p^2}{q^2-m^2}=\frac{L^2}{M^2}.$$

因这最后的等式的左边是有理数, 则 L^2/M^2 必是有理数, 这与假设矛盾. 对正方膜, 注意到即使 $n\neq m$, 仍有 $\nu_{m,n}=\nu_{n,m}$. 因此, 对正方膜, (m,n) 级谐波和 (n,m) 级谐波有相同的频率. □

概要 8.1

1. 二维热方程: 初边值问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{D.E.} & u_t = k(u_{xx}+u_{yy}), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad 0 \leqslant y \leqslant M, \quad t>0; \\
\text{B.C.} & \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,M,t)=0, \\ u(0,y,t)=0, & u(L,y,t)=0; \end{cases} \\
\text{I.C.} & u(x,y,0)=f(x,y),
\end{array}
\tag{S1}
$$

其中

$$
f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, \tag{S2}
$$

有由以下给出的解

$$
u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}e^{-\lambda_{n,m}kt}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},
$$

其中

$$
\lambda_{n,m}=\pi^2\big((\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2\big), \quad n,m=1,2,3\cdots.
$$

2. 积分表示: 在上述问题 (S1) 中, 如果 $f(x,y)$ 在闭矩形上是连续的 (但不必是形如 (S2)), 且在每条边上为零, 则 (S1) 的唯一的连续解是

$$
u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]/(4kt)}\tilde{f}_{o,o}(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}d\bar{y}, \ t>0,
$$

(且 $u(x,y,0)\equiv f(x,y)$), 其中 $\tilde{f}_{o,o}(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 唯一的延拓 (到整个平面), 关于 x 是奇的和周期的 (以 2 L 为周期) 以及关于 y 是奇的和周期的 (以 $2M$ 为周期).

3. 二重 Fourier 正弦级数: 函数 $f(x,y)$ 在矩形 $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant M$ 上的二重 Fourier 正弦级数是表示式

$$
\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},
$$

其中

$$b_{n,m} = \frac{4}{LM}\int_0^M \int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}dxdy, \quad n,m=1,2,3,\cdots,$$

只要这些积分存在.

4. Laplace 方程: 问题

$$\text{D.E.} \quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, \quad 0<x<L,\ 0<y<M,\ 0<z<P;$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u(x,y,0)=f(x,y), \quad u(x,y,P)=g(x,y), \\ u(x,y,z)=0, \quad \text{在面} \quad x=0,\ x=L,\ y=0,\ y=M \text{ 上}, \end{cases}$$

其中

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N} a_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

和

$$g(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N} b_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

的解由以下给出

$$u(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{N} Z_{n,m}(z)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

其中

$$Z_{n,m}(z)=\frac{1}{\sinh(P\sqrt{\lambda_{n,m}})}\left(a_{n,m}\sinh((P-z)\sqrt{\lambda_{n,m}})+b_{n,m}\sinh(z\sqrt{\lambda_{n,m}})\right),$$

以及 $\sqrt{\lambda_{n,m}}=\pi\sqrt{(\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2}$.

5. 二维波方程: 问题

$$\text{D.E.} \quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), \quad 0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M,\ -\infty<t<\infty;$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, \quad u(x,M,t)=0, \\ u(0,y,t)=0, \quad u(L,y,t)=0; \end{cases}$$

$$\text{I.C.} \quad u(x,y,0)=f(x,y) \quad u_t(x,y,0)=g(x,y),$$

其中

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}A_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

和

$$g(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}B_{n,m}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

的解是

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{N}u_{n,m}(x,y,t),\quad 且\quad a_{n,m}=A_{n,m}\quad 和\quad b_{n,m}=\frac{B_{n,m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}},$$

其中 (n,m) 级谐波 $u_{n,m}(x,y,t)$ 是

$$u_{n,m}(x,y,t)=(a_{n,m}\cos(at\sqrt{\lambda_{n,m}}+b_{n,m}\sin(at\sqrt{\lambda_{n,m}}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M},$$

以及 $\sqrt{\lambda_{n,m}}=\pi\sqrt{(\frac{n}{L})^2+(\frac{m}{M})^2}$. $u_{n,m}$ 的频率为 $\frac{a}{2\pi}\sqrt{\lambda_{n,m}}$, $n,m=1,2,3,\cdots$.

练习 8.1

1. 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=6(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 3,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,3,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(2,y,t)=0;\end{cases}$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=4\sin\frac{3\pi x}{2}\sin(\pi y)-2\sin(\pi x)\sin\frac{2\pi y}{3}.$$

2. 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx}+u_{yy},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u(x,1,t)=0,\\ u_x(0,y,t)=0, & u_x(1,y,t)=0;\end{cases}$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=2\sin^2(2\pi x)\sin(\pi y).$$

3. 求解问题

$$\text{D.E.}\quad u_t=u_{xx}+u_{yy},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0;$$

$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u(x,0,t)=0, & u_y(x,1,t)=0,\\ u_x(0,y,t)=0, & u(1,y,t)=0;\end{cases}$$

$$\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=\sin\frac{\pi(3x+y)}{2}-\sin\frac{3\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}.$$

4. 一矩形平板 $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant M$ 具有热传导常数 k, 在边 $y=0$ 和 $y=M$ 上绝热, 在边 $x=0$ 和 $x=L$ 上保持零温度.

(a) 对给定的连续初始温度分布 $u(x,y,0)=f(x,y)$, 写出在该板上二维热流适当的初边值问题.

(b) 利用二重 Fourier 级数, 形式求解在 (a) 部分建立的问题.

(c) 利用镜像法 (即, 通过利用初始温度到整个 xy–平面适当的延拓; 参看第 7.5 节), 获得形如 (12) 的形式解的积分表示式.

5. 设 $f(x,t)$, $g(y,t)$ 和 $h(z,t)$ 分别满足热方程 $f_t=kf_{xx}$, $g_t=kg_{yy}$ 和 $h_t=kh_{zz}$. 证明 $u(x,y,z,t)\equiv f(x,t)g(y,t)h(z,t)$ 满足 $u_t=k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$. 在波方程情形同样的构造行得通吗? 为什么行或为什么不行?

6. (a) 利用习题 5 的技巧, 证明: 如果 $F(x)$, $G(y)$ 和 $H(z)$ 是连续和有界的, 则问题

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\quad -\infty<x,y,z<\infty,\quad t>0;\\&\text{I.C.}\quad u(x,y,z,0^+)=F(x)G(y)H(z)\end{aligned}$$

的一个解是

$$u(x,y,z,t)=\\ =\frac{1}{(4\pi kt)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2]/(4kt)}F(\bar{x})G(\bar{y})H(\bar{z})d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}.$$

(b) 如果在 (a) 中的 $F(x)G(y)H(z)$ 以这种形式函数的有限线性组合 (例如, 有限三重 Fourier 级数) 来替换, 则所给的解将仍然有效吗? 请解释.

(c) 为什么在 (a) 部分的解不是唯一的?

提示 参见第 7.4 节的例 1.

7. 考虑例 3 中的方体. (a) 如果该方体在它的一个面上绝热, 则对大的 t, 在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的温度是多少?

(b) 如果方体除了一个面之外都是绝热的, 则在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的温度是多少?

(c) 如果方体在两个面上是绝热的, 为使对大的 t 在中心的温度降得最小, 应该选两个相邻的面还是选两个相对立的面?

8. 解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad 0<x<3\pi,\ 0<y<2\pi,\ 0<z<1;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(x,y,0)=\sin x\sin y, & u(x,y,1)=0,\\ u(x,y,z)=0, & \text{在面 } x=0,\ x=3\pi,\ y=0,\ y=2\pi \text{ 上}.\end{cases}\end{aligned}$$

9. 解

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad 0<x,\ y,\ z<\pi;$$
$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u_x(0,y,z)=u_x(\pi,y,z)=0, & u_y(x,0,z)=u_y(x,\pi,z)=0;\\ u_z(x,y,0)=\cos x\sin^2 y, & u_z(x,y,\pi)=0.\end{cases}$$

10. (a) 考虑长方体 $0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant M,\ 0\leqslant z\leqslant P$. 假设在该长方体的八个顶点 (角点) 赋予实数值. 证明有唯一的具形式 $u(x,y,z)=axyz+bxy+cyz+dxz+ex+fy+gz+h$ 的调和函数在这八个顶点上等于给定的值.

提示 应用二维的结果 (参看第 6.2 节的例 1) 得到在两个面 $z=0$ 和 $z=P$ 上的调和函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$, 且在角点具有正确的值. 令 $u(x,y,z)=[(P-z)f(x,y)+zg(x,y)]/P$.

(b) 假设给定在 (a) 部分的长方体的十二条棱 (不是面) 上连续的函数, 且当三条棱相汇一角点时这些函数在该角点处相等. 证明存在定义在长方体内部的调和函数 u(即 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$), 它可连续延拓到边界, 使得该延拓在每个面的内部是调和的, 并在每条棱上等于给定的连续函数. 可假设在每个面上的 Dirichlet 问题是可解的 (参看第 6.2 节).

提示 首先, 利用 (a) 部分把问题转化成在棱上给定的函数在八个顶点等于 0 的情形. 然后在每对相对的面上求解 Dirichlet 问题, 并像 (a) 部分那样组成一个 (凸) 线性组合. 把三对相对的面的结果相加然后除以二 (为什么?).

11. 解释为什么习题 10 的结果允许我们把长方体上的 Dirichlet 问题转化成一个相应的问题, 其中在长方体上的边界给定的函数在八个顶点上为零. 解释为什么这样的简化是必要的, 如果打算通过利用二重 Fourier 正弦级数求解面上 Dirichlet 问题的话, 如同对 (23) 所做的那样.

12. 通过假设形如 $u(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz$ 是解, 来求解以下方体上的 Neumann 问题, 其中在每个面上法向导数是给定的常数:

$$\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad 0<x,\ y,\ z<1;$$
$$\text{B.C.}\quad \begin{cases} u_x(0,y,z)=a_0, & u_y(x,0,z)=b_0, & u_z(x,y,0)=c_0,\\ u_x(1,y,z)=a_1, & u_y(x,1,z)=b_1, & u_z(x,y,1)=c_1.\end{cases}$$

为什么该问题无解, 除非 $a_0+b_0+c_0=a_1+b_1+c_1$? 在解这个问题中 Fourier 级数或分离变量会有任何作用吗? 为什么有作用或为什么没有作用?

13. 求以下问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0\leqslant x,y\leqslant 1,\ -\infty< t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u(x,0,t)=0, & u(x,1,t)=0,\\ u(0,y,t)=0, & u(1,y,t)=0;\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u(x,y,0)=0,\quad u_t(x,y,0)=x(x-1)y(y-1).\end{aligned}$$

14. 在一矩形膜中波传播的速度 a 是 600ft/s, 该膜最低的两个频率是每秒 300 周波和每秒 400 周波. 该膜的长和宽是多少?

§8.2 特征函数观点

本节引入 Laplace 算子的特征函数和特征值的概念. 这些概念提供一个统一的观点, 由这种观点能理解任意区域上任意维数的热方程和波方程的边值问题. 而且, 这些概念不依赖使用的坐标系的类型, 因此在随后的子节中当我们研究以球坐标和柱坐标表示的偏微时它们提供了一个指导性原则. 还证明了高维 Fourier 级数的一个收敛性定理, 以及讨论了高维 Fourier 变换.

△ 的特征函数和特征值

注意到虽然函数

$$f_{n,m}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$$

因它们不满足 Laplace 方程不是调和的, 但 $f_{n,m}$ 的 Laplace 是

$$\triangle f_{n,m}=(f_{n,m})_{xx}+(f_{n,m})_{yy}=-\pi^2\Big(\big(\frac{n}{L}\big)^2+\big(\frac{m}{M}\big)^2\Big)f_{n,m}=-\lambda_{n,m}f_{n,m}.\qquad(1)$$

因此, 当 Laplace 算子 $\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 作用在函数 $f_{n,m}$ 上时, 结果是该函数的一个常数倍, 即 $-\lambda_{n,m}f_{n,m}$.

> 一般, 对某常数 λ, 具有性质 $\triangle g+\lambda g=0$ 的函数 $g(x,y)$ 称为 △ 的**特征函数**, 只要 $g(x,y)$ 不是恒等于零. 常数 λ 称为相应于特征函数 $g(x,y)$ 的**特征值**.

注记 "特征" 是由德语而来, 意为 "自身", 该名称大概来自事实: 除了相差一个常数因子, △ 把这种函数变成自身. 因此, (1) 表明 $f_{n,m}(x,y)$ 是 △ 具特征

值 $\lambda_{n,m}$ 的特征函数. 对那些熟悉线性代数中的特征值概念的读者可能注意到在线性代数的意义下 ($\triangle f_{n,m} = -\lambda_{n,m} f_{n,m}$) $\triangle$ 相应于 $f_{n,m}$ 的特征值是 $-\lambda_{n,m}$. 然而, 对现在的情形上述的定义更方便, 因把非负的量 $\lambda_{n,m}$(与 $-\lambda_{n,m}$ 相对) 看作特征值更方便.

例 1 证明: 如果 $g(x,y)$ 是 $\triangle$ 具特征值 $\lambda \geqslant 0$ 的任一 C^2 特征函数, 则

(a) $v(x,y,t) = be^{-\lambda kt} g(x,y)$ 是热方程 $v_t = k\triangle v$ 的解, 和

(b) $u(x,y,t) = [b_1 \cos(a\sqrt{\lambda}t) + b_2 \sin(a\sqrt{\lambda}t)]g(x,y)$ 满足波方程 $u_{tt} = a^2 \triangle u$, 其中 b, b_1 和 b_2 是任意常数.

解 注意到 $\triangle v = \triangle(be^{-\lambda kt}g) = be^{-\lambda kt}\triangle g = -be^{-\lambda kt}\lambda g = -\lambda v$, 类似地, $\triangle u = -\lambda u$. 因此, $v_t = -\lambda bke^{-\lambda kt} g = -k\lambda v = k\triangle v$ 以及 $u_{tt} = -(a\sqrt{\lambda})^2 u = -a^2\lambda u = a^2 \triangle u$. □

这个例子说明 $\triangle$ 的特征函数可用来构造热方程和波方程的解. 的确, 这些偏微的所有乘积解具有如同例 1 的形式. 自然, Laplace 方程 $\triangle u = 0$ 的解是具特征值 $\lambda = 0$ 的特征函数, 例 1 中构造的解则是稳态解. 在具齐次 B.C. 的问题中, 例 1 中构造的解将满足这些 B.C., 只要特征函数 $g(x,y)$ 满足这些 B.C.. 注意到所有这些评注对任意空间维数都成立. 特别对 1 维, Laplace 算子简化为 $\frac{d^2}{dx^2}$, 它的特征函数具有形式 $c_1 \sin(bx) + c_2 \cos(bx)$(具特征值 b^2) 或 $c_1 e^{bx} + c_2 e^{-bx}$(具特征值 $-b^2$). 在第三章和第五章讨论的 B.C. 提供了取决于 B.C. 的特别形式的特征函数和特征值 (例如, 当 $u(0,t) = 0$ 和 $u(L,t) = 0$ 时, $\sin \frac{n\pi x}{L}$). 对具齐次 D.E. 和 B.C. 的热问题和波问题, 以前的做法可用特征函数表述成以下步骤.

1. 利用分离变量, 求出具特征值 λ_n($n = 1,2,3,\cdots$) 的满足 B.C. 的特征函数 $g_n(x,y)$. 则如同例 1, 以时间的适当函数乘 $g(x,y)$ 得到满足 D.E. 和 B.C. 的函数 $u_n(x,y,t)$.
2. 利用叠加原理组成 D.E. 和 B.C. 更一般的解 $\sum c_n u_n(x,y,t)$.
3. 用特征函数的线性组合, 比如通过计算 Fourier 系数, 来近似 I.C. 中的每个函数 (例如, 初始温度, 或初始位置和初始速度).
4. 把乘积解的和 $\sum c_n u_n(x,y,t)$ 代入每个 I.C., 通过使与步骤 3 求得的系数相等来确定 $u_n(x,y,t)$ 的与时间有关的任意常数.

假设步骤 1 中的特征函数 $g_n(x,y)$ 已经确定, 则剩下唯一可能的困难是步骤 3. 概括说来, Fourier 级数 (单重的, 二重的或多重的) 是以满足给定的线性

齐次 B.C. 的特征函数的线性组合来恰当表示函数的学科. 的确, Fourier 级数常被称作**特征函数展开**. 虽然有一些定理证明特征函数的存在性以及适当好的函数特征函数展开的有效性, 然而这个过程一个主要障碍是当一个边值问题的区域不是一个标准形状, 比如不是长方体, 圆盘, 球, 圆柱, 等等时, 要求出特征函数是困难的. 在第 8.3–8.5 节中, 我们将确定对球和圆柱的边值问题的特征函数.

注记 Fourier 变换也可看作当需要用特征函数 $e^{i\xi x}$(具特征值 ξ^2) 的连续叠加 (即, 积分) 来表示某种定义在无穷区域上的函数时提供了特征函数展开. 例如, 如果 $f(x)$ 是速减函数, 具 Fourier 变换 $\hat{f}(\xi)$, 则反演定理 (参看第 7.3 节) 表明 $f(x)$ 由

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \tag{2}$$

给出, 这是 $\triangle$ 的特征函数 $e^{i\xi x}$ 的连续叠加. □

对具齐次 B.C. 的热问题, 如果能得到 I.C. 中的函数的一个特征函数展开, 则该问题的解就垂手可得. 只需对每个特征函数乘上在例 1(a) 中恰当的与时间有关的因子. 例如, 如果 (2) 是初始温度 $f(x)$ 的 "特征函数展开", 则热方程 $u_t = ku_{xx}$ 相应的假定性解是 (注意到 $e^{i\xi x}$ 对应的特征值是 ξ^2)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{-i\xi w} dw e^{-\xi^2 kt} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(w-x)} e^{-\xi^2 kt} d\xi \right) f(w) dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(w-x)^2/(4kt)} f(w) dw, \end{aligned}$$

此为在第 7.4 节求得的解. 相同的技巧 (但用多重 Fourier 变换) 得出这种解的高维形式, 即在第 8.1 节中的 (12). 也可用这种技巧得到平面或空间上波方程的 D'Alembert 公式的高维类似公式, 但有更容易的方式 (覆盖在第 8.3 节里) 得到这些公式.

例 2 求 $\triangle$ 一个特征函数, 在一个正方形的边界上等于零, 但不是形如 $f(x)g(y)$ 的乘积.

解 注意到如果 $g_1(x,y)$ 和 $g_2(x,y)$ 是 $\triangle$ 相同的特征值 λ 的两个特征函数, 则任一线性组合 $c_1g_1 + c_2g_2$ 也是特征值 λ 的特征函数. 的确, 利用 $\triangle$ 的线性性,

有 $\triangle(c_1g_1+c_2g_2)=c_1\triangle g_1+c_2\triangle g_2=-\lambda(c_1g_1+c_2g_2)$. 还注意到如果 $g_1(x,y)$ 和 $g_2(x,y)$ 在正方形的边界上为零, 则 $c_1g_1+c_2g_2$ 也满足该边界条件. 特别, 考虑正方形 $0\leqslant x,\ y\leqslant\pi$ 且对不相等的正整数 n 和 m, 令 $g_1(x,y)=\sin(nx)\sin(my)$ 以及令 $g_2(x,y)=\sin(mx)\sin(ny)$. 这些是 $\triangle$ 具公共特征值 (n^2+m^2) 的两个特征函数. 因此, 它们的任一线性组合也是具特征值 (n^2+m^2) 的特征函数. 特别令 α 是 $[0,2\pi)$ 中的任意常数, 考虑线性组合

$$g(x,y)=\cos\alpha\sin(nx)\sin(my)+\sin\alpha\sin(mx)\sin(ny). \tag{3}$$

当然, 当 $\alpha=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ 时 $\frac{3\pi}{2}$, 该组合化成形如 $f(x)h(y)$ 的乘积. 然而, 对 α 在 $[0,2\pi)$ 中的其他值, $g(x,y)$ 不能写成这种形式 (为什么?). 为确定起见, 考虑当 $n=1,\ m=2$ 和 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 的情形. 这时, $g(x,y)=[-\sin x\sin(2y)+\sin(2x)\sin y]/\sqrt{2}=\sqrt{2}\sin x\sin y[-\cos y+\cos x]$, 它不仅在正方形的边界上等于零, 在对角线 $y=x$ 上也等于零, 且在其他点不等于零. 形如 $f(x)h(y)$ 的函数不可能在该对角线上等于零, 除非它在正方形上恒等于零 (为什么?). □

波节曲线, 对称分类和特征空间

特征函数 $g(x,y)$ 在其上为零的曲线称为**波节曲线**. 如果 λ 是特征值 (即 $\triangle g+\lambda g=0$), 则如同例 1, 生成波方程 $u_{tt}=a^2\triangle u$ 一个相应的解, 比如 $\cos(at\sqrt{\lambda})g(x,y)$. 注意到随着膜以这种方式振动, 在波节上的点保持不动 (即

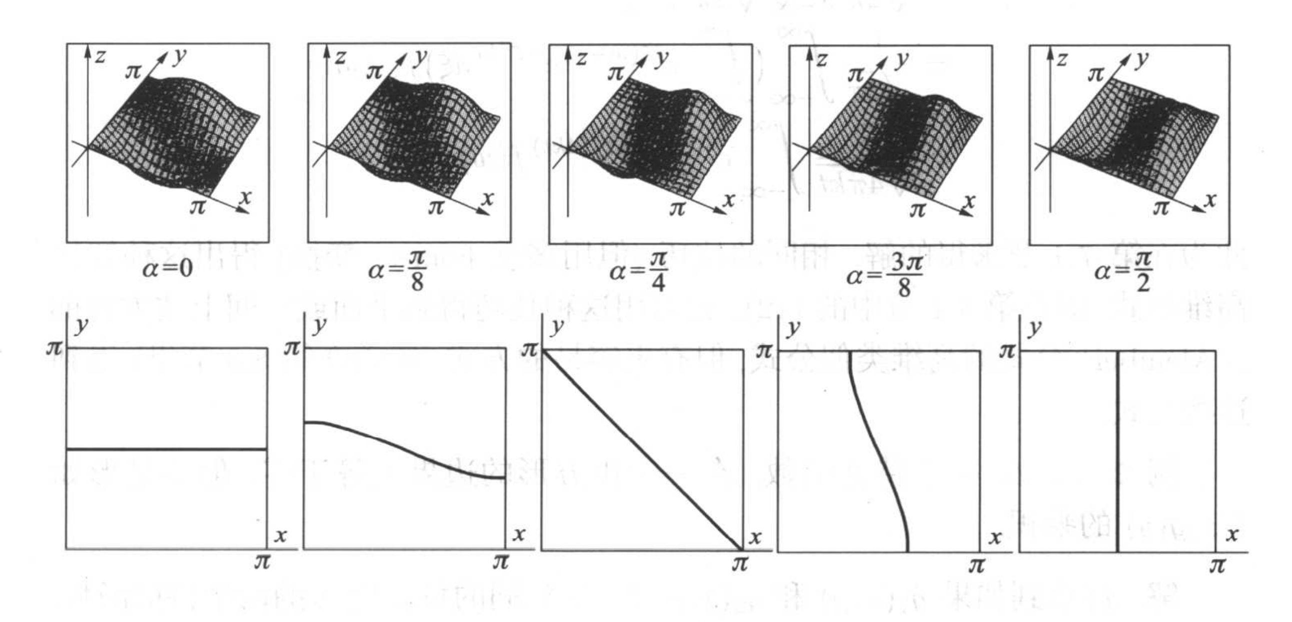


图 1

随着膜的振动, 这些点不作上下移动). 如果矩形膜的边长的平方比 L^2/M^2 是无理数, 则由 8.1 节的例 5, 不存在具有相同频率的两个谐波 (或等价地, 不存在具有相同特征值的两个独立的特征函数). 在这种情形, 任一特征函数的波节曲线由等距水平线和 (或) 垂直线段组成. 如果比 L^2/M^2 是有理数 (例如, 像正方形), 则由具相同特征值的特征函数的各种线性组合的波节曲线 (参看 (3)) 可表现为各种各样的形式. 对以式子 (3) 具 $n=1$ 和 $m=2$ 的线性组合, 对各种 α 的波节曲线在图 1 中显示. 在固定时刻 $t=\pi/(a\sqrt{5})$, $u(x,y,t)=\cos(at\sqrt{5})g(x,y)$ 相应的振动方式的图也绘出. 当 $n=1$ 和 $m=3$, 产生更复杂模式, 如在图 2 中

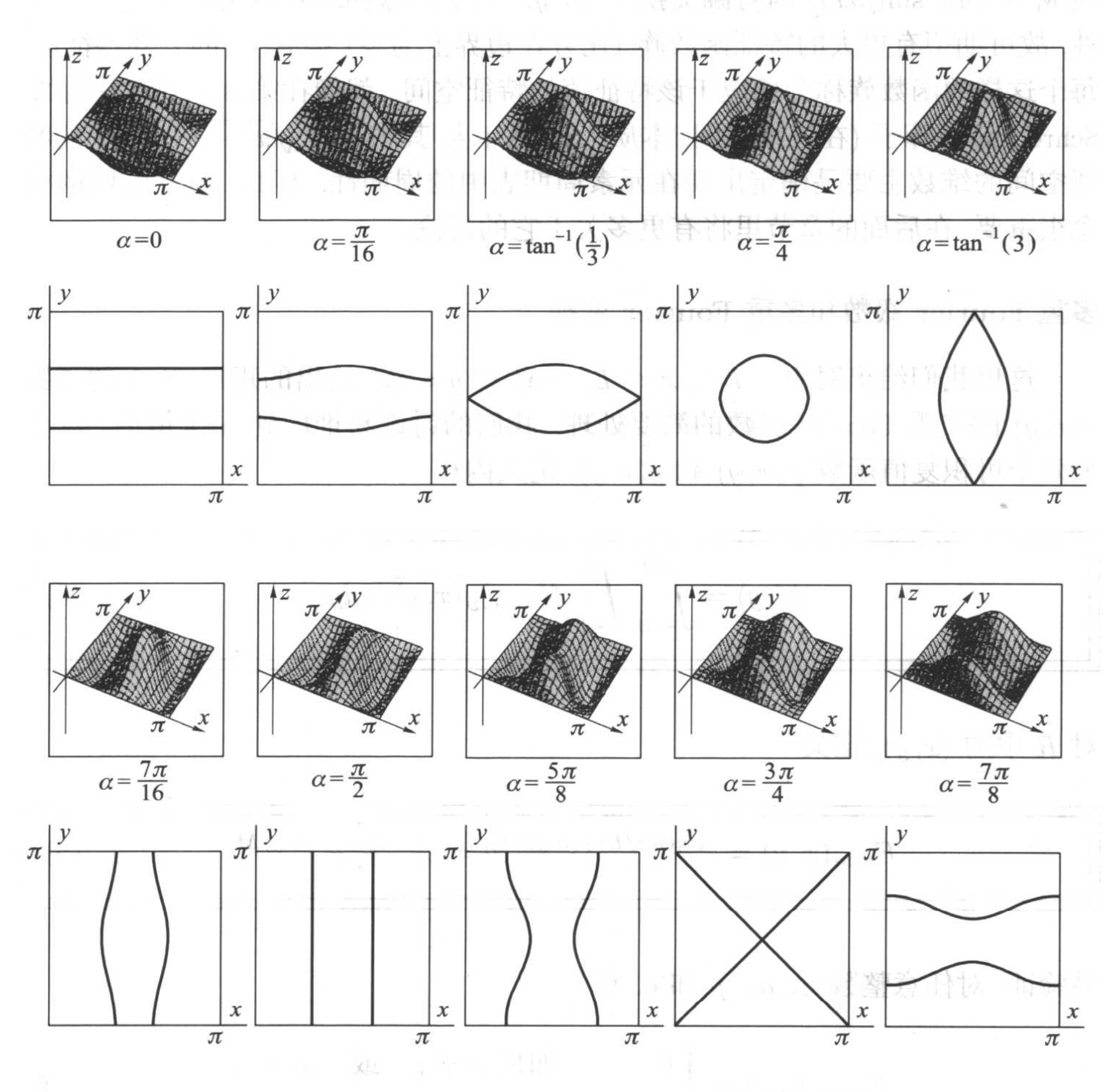


图 2

所示.

如果一真实的正方膜以伴随多种不同模式的频率振动, 则由于方形方面的微小偏差, 膜中的微小缺陷, 或一些未知的原因, 振动通常将只服从多种可能方式中的一种方式. 这是 "自发对称分类" 重要概念的一个具体例子. 虽然对称在理论上是精确的, 但在实际中几乎总是违反的. 通常, 如果一个区域具有某些对称性, 则可推出许多特征值将会有不只一个特征函数, 因为在翻动或旋转该区域的对称运算下不改变对称性, 一个特征函数可能变换成另一个具相同特征值的特征函数. 例如, 当正方形关于对角线 $y = x$ 翻转, 特征函数 $\sin(nx)\sin(my)$ 转换成 $\sin(ny)\sin(mx)$, 因对翻交换 x 和 y. 由于圆盘和球具有更高程度的对称性, 故可期望有更大的特征函数族 (比方在边界上为零) 拥有 $\triangle$ 的公共特征值. 每个这样的函数族称为相应于该特征值的特征空间. 就像在第 8.5 节将看到的, Schrödinger 算子 (在三维空间, 本质上是 $\triangle + \frac{1}{\rho}$, 其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 的特征空间的维数主要是确定出现在元素周期表中的周期性. 因此, 特征空间的概念很重要, 在后面的章节里将有更多关于它的讨论.

多重 Fourier 级数和多重 Fourier 变换

这里我们给出对由 $-L \leqslant x \leqslant L$, $-M \leqslant y \leqslant M$ 给出的矩形 R 上的函数 $f(x,y)$ 的二重 Fourier 级数的简要处理. 我们的讨论易推广到 n 维情形. 对 R 上两个可积复值函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$, 定义内积

$$\langle f, g\rangle = \int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L} f(x,y)\overline{g(x,y)}\,dxdy. \tag{4}$$

对 R 中的 (x,y), 定义

$$E_{n,m}(x,y) = e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]} = e^{in\pi x/L}e^{im\pi y/M}. \tag{5}$$

易验证, 对任意整数 n, m, p 和 q, 有

$$\langle E_{n,m}, E_{p,q}\rangle = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \neq p \quad \text{或} \quad m \neq q, \\ 4LM, & \text{如果 } n = p \quad \text{和} \quad m = q, \end{cases} \tag{6}$$

即, 函数 $E_{n,m}$ 组成范数为 $4LM$ 的正交函数族.

定义 定义在矩形 $R(0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M)$ 上的函数 $f(x,y)$ 的 (复)**二重 Fourier 级数**是表示式

$$\begin{aligned}\text{FS } f(x,y) &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} E_{n,m}(x,y) \\ &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]},\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$c_{n,m} = \frac{1}{4LM}\langle f, E_{n,m}\rangle = \frac{1}{4LM}\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L} f(x,y)e^{-i\pi[(nx/L)+(my/M)]}dxdy, \tag{8}$$

$E_{n,m}$ 由 (5) 定义, 只要所有这些积分存在.

注意到关于 $c_{n,m}$ 的公式 (8) 可由 (7) 的两边与 $E_{n,m}$ 取形式内积然后利用正交性结果 (6) 得到. 在和式 (7) 中, 整数 n 和 m 独立地取遍所有整数. 敏捷的读者会想知道级数 (7) 是否收敛以及不管项的求和次序如何是否得到同样的结果. 虽然在有限项的和中, 求和的次序没关系, 但在无穷项和式中求和的次序会有很大的不同. 例如, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$, 但把这个和重新写成 $(1 + \frac{1}{5}) - \frac{1}{3} + (\frac{1}{9} + \frac{1}{13}) - \frac{1}{7} + (\frac{1}{17} + \frac{1}{21}) - \frac{1}{11} + \cdots$, 得到大于 $\frac{13}{15}$ 的值, 此值大于 $\frac{\pi}{4}$. 然而, 如果一个无穷级数的项的绝对值 (或模, 如果项是复数) 的和式是有限的 (即, 该级数是绝对收敛的), 则求和的次序将没关系. 级数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ 的问题是它不是绝对收敛的 (即, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$). Fourier 级数 (7) 是**绝对收敛的**, 如果所有系数模的和 $\sum |c_{n,m}|$ 是有限的. 该 Fourier 级数求和的次序将是无关紧要的. 于是, 在下面的定理中我们先给出关于函数 $f(x,y)$ 的保证 $\sum |c_{n,m}| < \infty$ 的判别准则.

定理 1 (二重 Fourier 级数收敛定理) 设 $f(x,y)$ 是矩形 $-L \leqslant x \leqslant L$, $-M \leqslant y \leqslant M$ 上 C^k 函数 $(k \geqslant 3)$. 令 K 是 $|\partial^k f/\partial x^k|$ 和 $|\partial^k f/\partial y^k|$ 在该矩形上的最大值的最大者. 假设对每个 $j = 0, 1, \cdots, k-1$, 有

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(-L,y) = \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(L,y) \quad 和 \quad \frac{\partial^j f}{\partial y^j}(x,-M) = \frac{\partial^j f}{\partial y^j}(x,M). \tag{9}$$

则对任一正整数 N, 有

$$\sum_{\substack{|n|>N \\ \text{或 } |m|>N}} |c_{n,m}| \leqslant \frac{2\pi K(\sqrt{2}/\pi)^k \max(L^k, M^k)}{(k-2)N^{k-2}}, \tag{10}$$

其中 $c_{n,m}$ 是 **Fourier** 系数 $\frac{1}{4LM}\langle f, E_{n,m}\rangle$. 特别, $\sum |c_{n,m}| < \infty$. 另外, 对 f 的二重 **Fourier** 级数中由 m 和 n 从 $-N$ 到 N 求和得到的部分和, 有

$$\Big|f(x,y) - \sum_{n,m=-N}^{N} c_{n,m} e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]}\Big| \leqslant \frac{2\pi K(\sqrt{2}/\pi)^k \max(L^k, M^k)}{(k-2)N^{k-2}}, \tag{11}$$

即, 这些部分和在矩形上一致收敛到函数 $f(x,y)$.

证明　反复关于 x 分部积分并利用关系式 (9) 来消去端点值, 得

$$c_{n,m} = \frac{1}{4LM}\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L} f(x,y)\overline{E_{n,m}(x,y)}dxdy = \cdots$$

$$= \frac{1}{4LM}\left(\frac{L}{n\pi i}\right)^k \int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)\overline{E_{n,m}(x,y)}dxdy, \quad n \neq 0. \tag{12}$$

如果对 y 分部积分, 类似的结果成立. 于是, 由 K 的定义,

$$|c_{n,m}| \leqslant K\left(\frac{L}{|n|\pi}\right)^k \quad \text{和} \quad |c_{n,m}| \leqslant K\left(\frac{L}{|m|\pi}\right)^k, \quad n,\ m \neq 0. \tag{13}$$

(13) 中分子 L 和 M 可用大者替换 (即, 用 $\max(L,M)$ 替换), 然后选取两个由此产生的不等式中的结果更强的一个 (即, 分母更大者), 对 $n,\ m \neq 0$, 得

$$|c_{n,m}| \leqslant K\left(\frac{\max(L,M)}{\pi \max(|m|,|n|)}\right)^k \leqslant K\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^k \frac{\max(L^k, M^k)}{(n^2+m^2)^{k/2}}, \tag{14}$$

因 $\sqrt{\frac{1}{2}(n^2+m^2)} \leqslant \max(|m|,|n|)$. 利用二重积分比较, 得

$$\sum_{\substack{|n|>N \\ \text{或 } |m|>N}} \frac{1}{(n^2+m^2)^{k/2}} \leqslant \int_{u^2+v^2>N^2} (u^2+v^2)^{-k/2} dudv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_N^{\infty} r^{-k} r dr d\theta = \frac{2\pi N^{2-k}}{(k-2)}. \tag{15}$$

结合 (14) 和 (15), 得到结果 (10). 一旦证明 FS $f(x,y)=f(x,y)$, 则 (11) 的左边变成

$$\left|\sum_{\substack{|n|>N\\ \text{或 } |m|>N.}} c_{n,m}e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]}\right| \leqslant \sum_{\substack{|n|>N\\ \text{或 } |m|>N}} |c_{n,m}|,$$

则 (11) 由 (10) 得到. 因此, 尚需证明 FS $f(x,y)=f(x,y)$. 注意到因已假设 $f(x,y)$ 是 $C^k(k\geqslant 3)$ 的, 且有端点条件 (9) 成立, 我们无疑知道对 $[-M,M]$ 中每个固定的 y, $f(x,y)$(作为 x 的函数) 完全满足第 4.2 节任一收敛定理的条件. 因此, 有

$$f(x,y)=\sum_{|n|=0}^{\infty} g_n(y)e^{in\pi x/L}, \quad \text{其中} \quad g_n(y)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x,y)e^{-in\pi x/L}dx. \tag{16}$$

由 Leibniz 法则, $g_n(y)$ 无疑是 C^2 的, 且利用 (9), 有 $g_n(-M)=g_n(M)$ 和 $g_n'(-M)=g_n'(M)$. 因此, $g_n(y)$ 作为 y 的函数也等于它的 Fourier 级数, 即

$$g_n(y)=\sum_{|m|=0}^{\infty} C_{n,m}e^{im\pi y/M}, \quad \text{其中} \quad C_{n,m}=\frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} g_n(y)e^{-im\pi y/M}dy=c_{n,m}.$$

因此, 把 $g_n(y)$ 的这个表示式代入 (16), 得

$$f(x,y)=\sum_{|n|=0}^{\infty}\Big(\sum_{|m|=0}^{\infty} c_{n,m}e^{im\pi y/M}\Big)e^{in\pi x/L}=\text{FS } f(x,y),$$

其中已默许利用事实 $\sum|c_{n,m}| < \infty$ (即在最后的等式中, 我们需要知道 FS $f(x,y)$ 与项的排序无关). □

注记 利用 Euler 公式,

$$e^{i\pi(\frac{nx}{L}+\frac{my}{M})}=e^{i\frac{n\pi x}{L}}e^{i\frac{m\pi y}{M}}=\left(\cos\frac{n\pi x}{L}+i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\cos\frac{m\pi y}{M}+i\sin\frac{m\pi y}{M}\right),$$

复 Fourier 级数可写成四种可能乘积

$$\begin{array}{ll}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}, & \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}\\ \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}, & \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}.\end{array} \tag{17}$$

而且, 如果函数 $f(x,y)$(定义在矩形 $-L\leqslant x\leqslant L$, $-M\leqslant y\leqslant M$ 上) 是实值的, 则复 Fourier 级数中所有虚数项消除, 只留下具实系数涉及 (17) 诸项的级数. 如

果函数 $f(x,y)$ 关于 x 是奇的, 关于 y 是奇的, 则只包含项 $\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}$. 因此, 如果想用二重正弦级数表示定义在矩形 $0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant M$ 上的函数, 可对该函数关于 x 和关于 y 奇延拓到更大的矩形 $-L\leqslant x\leqslant L$, $-M\leqslant y\leqslant M$ 上, 然后计算该延拓函数的复 Fourier 级数. 这完全等价于利用第 8.1 节的公式 (10) 来计算未经延拓的函数的二重 Fourier 正弦级数. 一般而言, 经不同类型的延拓, 所有各种二重 Fourier 级数看起来是经适当延拓的函数的复 Fourier 级数的特殊情形. 所有上述对二重 Fourier 级数的处理都易变更用来处理三重 Fourier 级数或任意维数的多重 Fourier 级数的情形 (例如, 见习题 6). □

二重 Fourier 变换

假设 $f(x,y)$ 是对所有 (x,y) 有定义的函数, 设 $f(x,y)$ 是绝对可积的(即, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dxdy<\infty$). 则 $f(x,y)$ 的**二重 Fourier 变换**是函数

$$\hat{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i(\xi x+\eta y)}dxdy. \tag{18}$$

形式上, $\hat{f}(\xi,\eta)$ 也可通过先对变量 x 取 Fourier 变换, 然后对结果关于 y 取 Fourier 变换得到, 即

$$\hat{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi,y)e^{-i\eta y}dy,\quad \text{其中}\quad \hat{f}(\xi,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-i\xi x}dx.$$

换言之,

$$\hat{f}(\xi,\eta)=[\hat{f}(\xi,y)]^{\wedge}(\eta). \tag{19}$$

绝对可积函数 $g(\xi,\eta)$ 的**二重 Fourier** 变换的反演是函数

$$\check{g}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta. \tag{20}$$

显然,$\check{g}(x,y)=[\check{g}(x,\eta)]^{\vee}(y)$. 通过两次形式应用一维 Fourier 变换反演定理 (参看第 7.3 节), 可得形式二重 Fourier 变换的反演定理, 即

$$f(x,y)=[\hat{f}(\xi,\eta)]^{\vee}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta. \tag{21}$$

由交叠应用单个变量的卷积定理 ($[k*g]^\wedge(\xi)=\sqrt{2\pi}\hat{k}(\xi)\hat{g}(\xi)$) 也可得到形式 (二重) 卷积定理如下. 对 "好的", 适当的衰减函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)$, 有

$$[f*h](x,y)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-w,y-z)h(w,z)dwdz. \tag{22}$$

则

$$\begin{aligned}[f*h]^\wedge(\xi,\eta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-w,y-z)h(w,z)\\&e^{-i(\xi x+\eta y)}dwdzdxdy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-w,y-z)h(w,z)dw)\\&e^{-i\xi x}dx)dz)e^{-i\eta y}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi,y-z)\hat{h}(\xi,z)dz)e^{-i\eta y}dy\\&=2\pi\hat{f}(\xi,\eta)\hat{h}(\xi,\eta),\end{aligned}$$

其中形式利用了 Fubini 定理 (参看附录 3), 单变量卷积定理和 (19).

注意到所有这些形式处理在所有出现的函数是速减的情形下肯定成立. 在利用 Fourier 变换方法求偏微假定性解中, 对建立使得反演定理和卷积定理成立的非常一般的条件没什么优越, 因这样的解必须独立地验证. 此外, 上述的定义和结果毫无困难地推广到任意有限维数 n 的 Fourier 变换情形.

概要 8.2

1. 特征函数和特征值: 对某个常数 λ, 满足 $\triangle g+\lambda g=0$ 的函数 g 称为是 $\triangle$ 的特征函数, 只要 $g(x,y)$ 不恒等于零. 常数 λ 称为相应于特征函数 g 的特征值.

2. 二重 Fourier 级数: 定义在矩形 $R(-L\leqslant x\leqslant L,\ -M\leqslant y\leqslant M)$ 上函数 $f(x,y)$ 的 (复) 二重 Fourier 级数是表示式

$$\mathrm{FS}\ f(x,y)=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_{n,m}E_{n,m}(x,y)=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_{n,m}e^{i\pi[(nx/L)+(my/M)]},$$

其中①

$$c_{n,m}=\frac{1}{4LM}\langle f,E_{n,m}\rangle=\frac{1}{4LM}\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L}f(x,y)e^{-i\pi[(nx/L)+(my/M)]}dxdy,$$

① 原书下式中的被积函数误为 $f(x,y)e^{-i\pi(mx/L+ny/M)}$.——译者

和 $E_{n,m}(x,y) = e^{i\pi(nx/L+my/M)}$, 只要所有这些积分存在. 定理 1 给出级数 $FS\ f(x,y)$ 在 R 上一致收敛到 $f(x,y)$ 的准则.

3. 二重 Fourier 变换: 假设 $f(x,y)$ 是对所有的 (x,y) 有定义的函数, 并设 $f(x,y)$ 是绝对可积的 (即 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dxdy < \infty$). 则 $f(x,y)$ 的二重 Fourier 变换是函数:

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(\xi x+\eta y)}dxdy.$$

绝对可积函数 $g(\xi,\eta)$ 的二重 Fourier 变换的反演是函数:

$$\check{g}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta.$$

通过两次形式应用一维 Fourier 变换反演定理, 可得到形式二重 Fourier 变换反演定理, 即

$$f(x,y) = [\hat{f}(\xi,\eta)]^{\vee}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta.$$

由交叠应用单变量卷积定理也能得到以下形式 (二重) 卷积定理. 若

$$[f*g](x,y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-w,y-z)h(w,z)dwdz,$$

则

$$[f*g]^{\wedge}(\xi,\eta) = 2\pi\hat{f}(\xi,\eta)\hat{h}(\xi,\eta).$$

练习 8.2

1. (a) 求 $\triangle = \partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ 在矩形 $R\ (0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2)$ 上满足 B.C. $f_x(0,y) = f_x(3,y) = 0\ (0 \leqslant y \leqslant 2)$ 和 $f_y(x,0) = f_y(x,2) = 0\ (0 \leqslant x \leqslant 3)$ 的所有特征函数 $f(x,y)$.

(b) 对 (a) 部分中求得的每个特征函数, 构造在 R 上热方程 $u_t = k\triangle u$ 的相应解. 叙述解是这些构造解的线性组合的一个初边值问题.

(c) 再做 (b) 部分, 但现在是有关 R 上的波方程 $u_{tt} = a^2\triangle u$.

2. (a) 矩形膜谐波的频率与在矩形的边界上为零的 Laplace 算子特征函数的特征值之间有什么关系?

(b) 令 λ_1 和 λ_2 是 (a) 部分特征函数的最小特征值 (其中 $\lambda_1 < \lambda_2$). 证明膜的长和宽由 λ_1 和 λ_2 确定. 证明 $\frac{2}{5} \leqslant \lambda_1/\lambda_2 < 1$, 只对正方膜有 $\frac{2}{5} = \lambda_1/\lambda_2$.

注记 最近发现 [见 C.Gordon, D.L.Web, 和 S.Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Amer. Math. Soc. **27**(1992), 134-138] 膜的精确形状 (不必是矩形的) 是无法确定的, 即使知道了所有特征值 (或所有频率). 作为对这方面的进一步阅读, 我们推荐文章:Marc Kac, *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly **73S**(1966), 1~23.

3. 给出一个矩形膜例子, 它不是正方膜, 但有两个线性无关 (即一个不是另一个的常数倍) 的特征函数具相同的特征值.

提示 参看第 8.1 节的例 5. 有无穷多种可能的例子.

4. 在单位正方形 $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ 考虑二维热流, 具绝热边界. 解释为什么具 $u(x,y,0) = \cos(3\pi x)\cos(\pi y)$ 的温度 $u(x,y,t)$ 的最大值趋于零 (当 $t \to \infty$) 比具 $v(x,y,0) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$ 的温度 $v(x,y,t)$ 的最大值趋于零快. 一般而言, 初始特征函数温度分布的特征值的大小如何影响最大温度的相对衰减率?

5. 利用定理 1 叙述和证明定义在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant M$ 上适当函数 $g(x,y)$ 的二重 Fourier 级数的一个一致收敛定理. 特别, 解释为什么为了利用定理 1 必须假设 $g_{xx}(0^+,y) = 0\ (0 \leqslant y \leqslant M)$.

6. 叙述和证明本节的收敛定理 (定理 1) 在三重复 Fourier 级数中的类似定理.

7. 由形式应用二重 Fourier 变换的性质, 导出以下热问题的第 8.1 节的假定性解 (12):

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t = k(u_{xx}+u_{yy}), \quad -\infty < x,y < \infty,\ t > 0;\\ &\text{I.C.}\quad u(x,y,0) = F(x,y),\end{aligned}$$

其中 $F(x,y)$ 是给定的绝对可积和连续的函数.

8. (a) 叙述和证明长方体上热方程的最大值原理.

(b) 如果初始温度和边界温度只近似地知道, 为什么有这样的结果很重要?

(c) 为建立在 (a) 部分叙述的最大值原理, 模仿第 3.2 节一维热方程最大值原理的证明. 对长方体中的热流, 这本质上相同的证明行得通吗?

9. 利用形式计算, 对二重 Fourier 变换验证 Parseval 等式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi,\eta)\overline{\hat{g}(\xi,\eta)}d\xi d\eta.$$

提示 可对每个变量分别应用 Parseval 等式. 或利用反演定理用 $\hat{f}(\xi,\eta)$ 表示 $f(x,y)$, 然后交换积分次序.

10. (a) 对在矩形上的二重 Fourier 级数叙述和证明 Bessel 不等式.

(b) 对如定理 1 的函数 $f(x,y)$ 叙述和证明 Parseval 等式.

提示　对 (a) 部分, 模仿单个变量情形的 Bessel 不等式的证明 (参看第 4.2 节), 对 (b) 部分, 利用练习 4.2 的习题 5 和习题 7 的想法.

§8.3 球坐标的偏微

在第 6.1 节, 我们已经看到二维 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 在坐标旋转变换下保持它的形式不变. 对空间的 Laplace 方程结果也是对的, 因任一空间的旋转是关于 x, y 和 z 轴的旋转的复合, 由二维的结果, 每个这种旋转保持二维结果的形式. 因此, 我们期望用球坐标来看 Laplace 方程 $\triangle u\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ (或三维热方程 $u_t=k\triangle u$ 或三维波方程 $u_{tt}=a^2\triangle u$), 可利用这种旋转对称性. 而且许多自然的或人造的物体 (例如, 地球, 太阳, 泡泡, 眼球, 肿瘤, 网球, 气球, 水滴, 橘子, 某种细胞和病毒, 原子, 等等) 近似球的形状, 对这些物体的边值问题利用球坐标是绝对必要的.

球坐标的 Laplace 算子 —— 几何构造

在下面的图 1 中, P 是某个任意点 (不同于原点 O), ρ 是 P 到原点的距离, φ 是正 z–轴到线段 OP 的角度 $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$, θ 是正 x–轴到 OP 在 xy–平面的射影 OP' 的角度 $(0\leqslant\theta<2\pi)$.

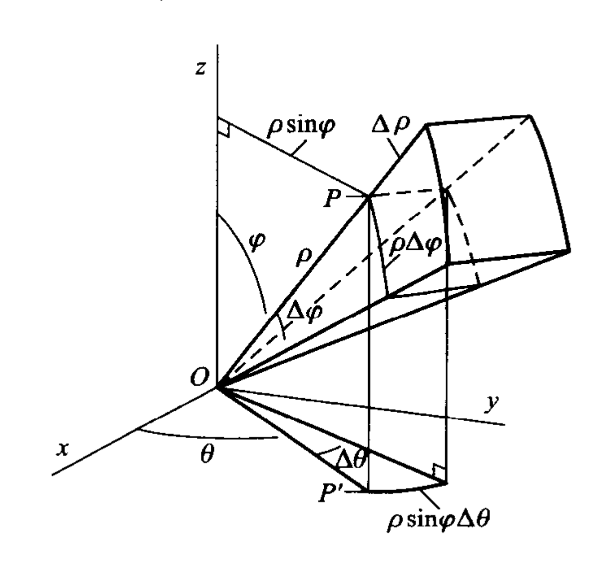


图 1

P 的**球坐标**是 (ρ,φ,θ). 注意到当 P 在 xy–平面时, P 的球坐标是 $(r,\frac{\pi}{2},\theta)$. 因此, 球坐标是极坐标的自然推广. 在应用领域的许多书籍中, θ 取作从 z–轴的角

度 (即, 在图 1 中 φ 和 θ 对换). 知道混乱的来源是有益的. 的确, 许多书用 (r,θ) 表示极坐标, 然后当引入球坐标时, 定义 θ 是从 z–轴的角度! 联系球坐标与笛卡儿坐标的转换式是

$$\begin{aligned}
&x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
&y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \quad \varphi=\arccos\left(\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad (x^2+y^2+z^2\neq 0),\\
&z=\rho\cos\varphi, \quad \theta=\begin{cases}\arccos\left(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y\geqslant 0, \quad (x^2+y^2\neq 0),\\ -\arccos\left(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\pi, & y<0.\end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

考虑形如 $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$, $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ 的立体区域. 称它为**球形体**. 该体的体积由下式给出

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\frac{1}{3}(\rho_2^3-\rho_1^3)(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)(\theta_2-\theta_1).$$

特别, 对球 $0\leqslant\rho\leqslant\rho_2$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 我们得 $\frac{4}{3}\pi\rho_2^3$. 这个积分是总和了所有无穷小的, 在图 1 中所示的接近长方体的球形体的体积 $dV=(d\rho)(\rho\sin\varphi d\theta)(\rho d\varphi)=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$ 的结果. 量 $\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$ 称为**球体积元素**, 且在用球坐标计算函数的三重积分时必含在其中的 (就像用极坐标计算二重积分时 $rdrd\theta$ 必含在其中一样). 现来证明允许用球坐标来计算一个函数的 Laplace 算式的公式. 虽然可用链法则来证明下面的结果, 然而我们的证明提供了在以后的章节中将需要的某种几何思想.

命题 1 (球坐标的 Laplace 算式) 设 $u(x,y,z)$ 是定义在 xyz–空间的一个区域上的 C^2 函数. 如果 u 用球坐标表示, 记作 $u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)$, 则对 $\rho\sin\varphi\neq 0$,

$$\begin{aligned}
u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}&=\frac{1}{\rho^2}\left((\rho^2U_\rho)_\rho+\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi U_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\right)\\
&=U_{\rho\rho}+\frac{2}{\rho}U_\rho+\frac{1}{\rho^2}\left(U_{\varphi\varphi}+\cot\varphi U_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

证明 函数 f 在任一点 P 的 Laplace 算式可通过组成函数在 P 点沿三条直线的二阶导数的和来计算, 这三条直线是以弧长为参数且在 P 点垂直相交. 变量 ρ 确定过 P 点的径向线关于弧长的参数, 的确, (2) 中的第一项是 U 沿着该直线的二阶导数. 对另外两条直线, 取常数纬度曲线的切线和常数经度曲线的切线 (分别以 θ 和 φ 为参数). 令 $(\rho(t),\theta(t),\varphi(t))$ 是沿与过点 $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$, $\varphi_0\neq 0$ 或 π 的经线相切的直线在距离 t 处 (比如, 向下方向) 点的球坐标. 有 $\rho^2(t)=t^2+\rho_0^2$, $\theta(t)\equiv\theta_0$ 和 $\sin(\varphi(t)-\varphi_0)=\frac{t}{\rho(t)}$. 则 U 沿该直线的二阶导数是

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}U(\rho(t),\varphi(t),\theta(t))\right) &= \frac{d}{dt}\left(U_\rho\frac{d\rho}{dt}+U_\varphi\frac{d\varphi}{dt}+U_\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\\ &= U_{\rho\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+U_\rho\rho''(t)+U_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ &\quad +U_\varphi\varphi''(t)+U_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+U_\theta\theta''(t).\end{aligned}\tag{3}$$

现 $2\rho\rho'=2t$ 和 $2\rho'^2+2\rho\rho''=2$. 因此, 在 $t=0$, 有 $\rho'=0$ 和 $\rho''=\frac{1}{\rho_0}$. 而且, $\cos(\varphi-\varphi_0)\varphi'=\rho^{-1}-t\rho^{-2}\rho'$ 以及 $-\sin(\varphi-\varphi_0)\varphi'^2+\cos(\varphi-\varphi_0)\varphi''=-2\rho^{-2}\rho'+2\rho^{-3}\rho'^2-t\rho^{-2}\rho''$. 因此, 在 $t=0$ 处, 得 $\varphi'=\rho_0^{-1}$ 和 $\varphi''=0$. 于是, (3) 成为

$$\frac{1}{\rho_0}U_\rho+\frac{1}{\rho_0^2}U_{\varphi\varphi}.\tag{4}$$

剩下来证明 U 沿着与过点 $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$ 的常数纬线相切的直线的二阶导数是

$$\frac{1}{\rho_0}U_\rho+\frac{1}{\rho_0^2}\cot(\varphi_0)U_\varphi+\frac{1}{\rho_0^2\sin^2\varphi_0}U_{\theta\theta}.\tag{5}$$

对该直线, 仍然有 $\rho(t)^2=\rho_0^2+t^2$, $\sin(\theta(t)-\theta_0)=t/[\rho(t)\sin\varphi_0]$ 和 (利用 (1)) $\cos\varphi(t)=\rho_0\cos\varphi_0/\rho(t)$. 因此, 在 $t=0$, 如同前, 又有 $\rho'=0$, $\rho''=\rho_0^{-1}$, $\theta'=[\rho_0\sin\theta_0]^{-1}$ 和 $\theta''=0$. 为计算 $\varphi'(0)$ 和 $\varphi''(0)$, 先注意到 $-\sin(\varphi)\varphi'=\rho_0\cos\varphi_0[-\rho^{-2}\rho']$ 和 $-\cos(\varphi)\varphi'^2+\sin(\varphi)\varphi''=\rho_0\cos\varphi_0[2\rho^{-3}\rho'^2-\rho^{-2}\rho'']$. 因此, 在 $t=0$, 有 $\varphi'=0$ 和 $\varphi''=\rho_0^{-2}\cot\varphi_0$. 把这些值代入 (3), 得 (5), 把 (4) 和 (5) 加到 $U_{\rho\rho}$, 得式子 (2). □

例 1 函数 $u(x,y,z)=xyz$ 显然是调和的 (即, $\triangle u=0$), 用球坐标把 $u(x,y,z)$ 重写成 $U(\rho,\varphi,\theta)$ 然后验证 (2) 的右边为 0.

解 利用 (1), 得

$$u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)=\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
& U\rho\rho + \frac{2}{\rho_0}U_\rho + \frac{1}{\rho_0^2}\big(U_{\varphi\varphi} + \cot\varphi U_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\big) \\
= {}& 6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta + \rho\big((2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi)_\varphi \\
& + \cot\varphi(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi)\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta) - 2\rho\cos\varphi\sin(2\theta) \\
= {}& 6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta) + \rho\big((2\sin\varphi - 3\sin^3\varphi)_\varphi \\
& + \cot\varphi(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi)\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta) - 2\rho\cos\varphi\sin(2\theta) \\
= {}& 6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta) + \rho\big(2\cos\varphi - 9\sin^2\varphi\cos\varphi \\
& +(2\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi)\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta) - 2\rho\cos\varphi\sin(2\theta) \\
= {}& 6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta + \rho\big(-2\cos\varphi - 9\sin^2\varphi\cos\varphi \\
& +(2 - 3\sin^2\varphi)\cos\varphi\big)\frac{1}{2}\sin(2\theta) \\
= {}& 6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta) - 6\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta) = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

单位球面上的 Laplace 算子 $\triangle_s$

在命题 1 的证明中我们看到在球坐标下 Laplace 算式分解成三部分, 它们对应于 U 沿着与以 ρ, φ 和 θ 为参数的坐标曲线相切的直线的二阶导数:

$$
U_{\rho\rho} + \left(\frac{1}{\rho_0^2}U_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho_0}U_\rho\right) + \left(\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta} + \cot\varphi U_\varphi\right) + \frac{1}{\rho_0}U_\rho\right). \tag{6}
$$

这给出了 (2) 中各项的几何解释; 用别的方法, 难以从几何上说清楚. 如果有个最初仅定义在以 φ 和 θ 为参数的单位球上的函数 $f(\varphi,\theta)$, 则由定义 $\tilde{f}(\rho,\varphi,\theta) \equiv f(\varphi,\theta)$(即, 沿着球的法线以常值延拓) 可把该函数延拓到原点之外的所有空间. 对在球面 $\rho = 1$ 上的 C^2 函数 $f(\varphi,\theta)$, Laplace 算子 $\triangle_s$ 是

$$
\triangle_s f(\varphi,\theta) = \triangle\tilde{f}(\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=1} = \frac{1}{\sin\varphi}[\sin\varphi f_\varphi]_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta}. \tag{7}
$$

根据 $U = \tilde{f}$ 的 (6), 在球面上点 P 处, Laplace 算式 $\triangle_s f$ 是 $\tilde{f}$ 沿着一对在 P 垂直相交的切线的二阶导数的和. 如果这些直线旋转, 二阶导数的和保持不变. 因此, 无论什么情况, 表示式 (7) 将有确切的极限, 即使当 φ 趋于 0 或 π(即, 球面上 C^2 函数的 Laplace 算式是连续的, 因为在每点, Laplace 算式几何上可用相

同的方式计算). 换言之, 如果 f 是球面上的 C^2 函数, (7) 中 $\triangle_s f$ 在 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 上明显的奇性总是可除的 (参看下面的例 2). Laplace 算式的有点复杂的形式 (7) 是由于纬线圆的周长是 $2\pi\sin\varphi$ 的事实, 它与 φ 有关. 换句话说, 公式 (7) 中关于 $\triangle_s$ 的不对称来抵消取决于北极和南极的选择的坐标 (φ,θ) 方面的不对称是必要的. □

例 2 对单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$(或 $\rho=1$) 上点 (x,y,z), 令 $u(x,y,z)=xyz$. 用该球面上的坐标 (φ,θ) 写出该函数, 记作 $u(x,y,z)=f(\varphi,\theta)$. 计算 $\triangle_s f$ 并证明 $\triangle_s f+12f=0$.

解 由例 1 得知, 对任意的 (x,y,z), $u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)=\frac{1}{2}\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin 2\theta$. 因在单位球面上 $\rho=1$, 故 $f(\varphi,\theta)=\frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi\sin(2\theta)$. 为计算 $\triangle_s f$, 注意到 (7) 隐含: 可简单的置 $\rho=1$, 然后计算 $\tilde{f}(\rho,\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta)$ (在空间) 的 Laplace. 这种计算正好就是如例 1 那样, 除了 $\rho=1$ 以及 $U_{\rho\rho}+2\rho^{-1}U_\rho=6\rho\cos\varphi\sin^2\varphi\sin(2\theta)$①不再出现, 因 $\tilde{f}$ 与 ρ 无关. 于是, 例 1 中的计算导出结果 $\triangle_s f=-6\rho\cos\varphi\sin^2\varphi\sin(2\theta)=-12f$. □

> **定义** 定义在单位球面上的 C^2 函数 $f(\varphi,\theta)\not\equiv 0$, 使得对某个常数 λ 有 $\triangle_s f+\lambda f=0$, 则称是**球面调和的**.

换言之, 球面调和函数是单位球面上 Laplace 算子 $\triangle_s$ 的特征函数, 相应的常数 λ 是 $\triangle_s$ 的特征值. 在例 2 中我们求得 $\frac{1}{2}\cos\varphi\sin^2\varphi\sin(2\theta)$ 是特征值 12 的球面调和函数.

例 3 设 $f=f(\varphi,\theta)$ 是定义在球面上的 C^2 函数, 满足 $\triangle_s f+\lambda f=0$. 如果 $\lambda<0$, 则证明 $f=0$, 而如果 $\lambda=0$, 证明 f 必为常数. 换言之, 证明 $\triangle_s$ 的特征值是非负的, 具特征值 0 的唯一特征函数 (球面调和) 是不为零的常值函数.

解 由假设, 得 $\lambda f^2=-f\triangle_s f$. 如果对该式两边在球面上积分, 得

$$\lambda\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)^2\sin\varphi d\varphi d\theta=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\big((\sin\varphi f_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin\varphi}f_{\theta\theta}\big)d\varphi d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi f_\varphi)d\varphi d\theta-\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\varphi}\Big(\int_0^{2\pi} f f_{\theta\theta}d\theta\Big)d\varphi$$

①原文误为 $U_\rho+2\rho^{-1}U_\rho=6\rho\cos\varphi\sin^2\varphi\sin 2\theta$.——译者

$$= -f\sin\varphi f_\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(f_\varphi)^2\sin\varphi d\varphi d\theta - \int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\varphi}\Big((ff_\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$
$$-\int_0^{2\pi}(f_\theta)^2 d\theta\Big)d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big((f_\varphi)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}(f_\theta)^2\Big)\sin\varphi d\theta d\varphi \geqslant 0,$$

其中已对 φ 和 θ 分部积分, 并利用 ff_θ 是 θ 的周期函数以及在 $[0,\pi]$ 上 $\sin\varphi \geqslant 0$ 的事实. 为证明交换积分次序是正当的, 已利用 $\triangle_s f(\varphi,\theta)$ 可连续延拓到 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$, 因对 C^2 函数 f, $\triangle_s f$ 在球面上是连续的. 量

$$(f_\varphi)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi}(f_\theta)^2$$

是梯度

$$\nabla f \equiv f_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\sin\varphi} f_\theta \mathbf{e}_\theta$$

的长度的平方, 其中 $\mathbf{e}_\varphi$ 和 $\mathbf{e}_\theta$ 分别是 φ 和 θ 增加方向的单位向量. 换句话说, 记 $dA = \sin\varphi d\varphi d\theta$, 并用 $\int_S$ 表示在球面上积分, 我们已经证明

$$\lambda\int_S f^2 dA = -\int_S f\triangle_s f dA = \int_S \|\nabla f\|^2 dA \geqslant 0. \tag{8}$$

因此, 如果 λ 是负的, 则 $f = 0$(为什么?). 另外, 如果 $\lambda = 0$, 则 $\|\nabla f\| = 0$, 这时 f 必是常数 (为什么?). □

注记 在第 8.4 节我们将求出所有球面调和函数. 有无穷多个球面调和函数, 且每个都是 $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多项式. 而且, 还证明不仅 $\triangle_s$ 的特征值是非负的, 且必具形式 $\lambda = n(n+1)$, 对某个 $n = 0,1,2,3,\cdots$. (注意到, 对例 2 中的球面调和函数, $\lambda = 12 = 3(3+1)$.) 这些特征值应该与单位圆盘上 Laplace 算子 $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ 的特征值 n^2($n = 0,1,2,\cdots$) 比较, 后者特征函数是 $\sin(n\theta)$ 和 $\cos(n\theta)$.$\triangle_s$ 的特征值 $n(n+1)$ 出现在原子的量子力学中. 的确, 在量子力学中, 算子 $-\hbar^2\triangle_s$(其中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 且 $h \approx 6.6\times 10^{-27}\mathrm{erg}\cdot\mathrm{sec}$ 是 Planck 常数) 称为轨道角动量的平方, 它作用在 Schrödinger 波函数上. $\hbar^2\triangle_s$ 的特征值通常由 $\hbar l(l+1)$, $l = 0,1,2,\cdots$ 表示, 且解释为在一个原子中的电子轨道角动量长度的平方的可能离散度量. 在第 8.5 节将更详细地考虑氢原子中的电子的量子力学. □

空间的 Laplace 算子的特征函数

在第 8.2 节中已经看到 Laplace 算子的特征函数可用来轻松构成热方程和波方程的解. 这里我们来寻求 F 具有形式 $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\varphi,\theta)$[①] 的特征函数 (使得对某个常数 c, $\triangle F+cF=0$). 根据 (2) 和 (7), 有

$$\begin{aligned}\triangle F &= \frac{1}{\rho^2}\big((\rho^2 F_\rho)_\rho+\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi F_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}F_{\theta\theta}\big)\\ &= \frac{1}{\rho^2}\big[f(\varphi,\theta)(\rho^2R'(\rho))'+R(\rho)\big(\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi f_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta}\big)\big]\\ &= \frac{1}{\rho^2}\big(f(\varphi,\theta)(\rho^2R'(\rho))'+R(\rho)\triangle_s f\big).\end{aligned}$$

因此, 特征方程 $\triangle F+cF=0$ 变成

$$\frac{1}{\rho^2}\big((\rho^2R'(\rho))'f(\varphi,\theta)+R(\rho)\triangle_s f(\varphi,\theta)\big)+cR(\rho)f(\varphi,\theta)=0$$

或

$$\frac{(\rho^2R'(\rho))'}{R(\rho)}+c\rho^2=\frac{-\triangle_s f(\varphi,\theta)}{f(\varphi,\theta)}. \tag{9}$$

这个式子的每边必是常数, 记作 λ. 因此, 得到两个方程

$$(\rho^2R'(\rho))'+(c\rho^2-\lambda)R(\rho)=0 \tag{10}$$

和

$$\triangle_s f(\varphi,\theta)+\lambda f(\varphi,\theta)=0. \tag{11}$$

特别, 这表明函数 $F=R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 的**角度部分**$f(\varphi,\theta)$ 必是单位球上的 Laplace 算子 $\triangle_s$ 的 (具某个特征值) 特征函数 (即 $f(\varphi,\theta)$ 必是球面调和的). 归纳起来, 我们有如下的定理.

定理 1 $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是 Laplace 算子 (在空间上) 具特征值 c 的特征函数 (即, $\triangle F+cF=0$) 当且仅当 $f(\varphi,\theta)$ 是具特征值 λ 的球面调和函数(即 $\triangle_s f+\lambda f=0$), 且 $R(\rho)$ 是方程 (10) 的解.

[①] 原文误为 $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\theta,\varphi)$.——译者

注记 特征方程 $\triangle F + cF = 0$ 称为 **Helmholtz 方程**. [德国生理学家和物理学家 Hermann Ludwig ferdinand von Helmholtz (1821—1894) 在电子理论、光学和数学方面作出基础性进展. 是他首先度量出神经脉冲速度的.] □

回忆到 $\frac{1}{\rho}$ 对 $\rho > 0$ 定义了一个调和函数. 因此, 当 $c = 0$ 和 $\lambda = 0$ 时, $\frac{1}{\rho}$ 必是 (10) 的解. 于是, 当 c 是任意时, 自然去尝试形如 $R(\rho) = g(\rho)/\rho$ 的解. 则有 $(\rho^2 R'(\rho))' = (\rho g'(\rho) - g(\rho))' = \rho g''(\rho)$. 因此, (10) 变成 $\rho g''(\rho) + (c\rho - \lambda/\rho)g(\rho) = 0$, 且有

$$R(\rho) = \frac{g(\rho)}{\rho}, \quad \text{如果} \quad g''(\rho) + \left(c - \frac{\lambda}{\rho^2}\right)g(\rho). \tag{12}$$

现在我们考虑两种情形, 即 $\lambda = 0$ 和 $c = 0$. 当 $c = 0$ 时, 方程 $g'' - \lambda\rho^{-2}g = 0$ 的形式提示我们尝试形如 $g(\rho) = \rho^m$ 的解. 则得 $[m(m-1) - \lambda]\rho^{m-2} = 0$. 最终求得 $\triangle_s$ 的特征值 λ 具有形式 $(n+1)n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 因此, 当 $c = 0$ 时, 取 $m = n+1$ 和 $-n$, 且

$$R_n(\rho) = a_n\rho^n + b_n\rho^{-(n+1)} \quad \text{对} \quad c = 0 \quad \text{和} \quad \lambda_n = n(n+1),\ n = 0, 1, \cdots. \tag{13}$$

当 $\lambda = 0$ 和 $c = \pm 1$ 时, 由 (12), 得以下函数

$$\begin{aligned} R_0^-(\rho) &= \tfrac{1}{\rho}(a_0 e^{\rho} + b_0 e^{-\rho}) && \lambda = 0,\ c = -1, \\ R_0^+(\rho) &= \tfrac{1}{\rho}(a_0\cos\rho + b_0\sin\rho) = \tfrac{A}{\rho}\sin(\rho + \delta), && \lambda = 0,\ c = 1, \end{aligned} \tag{14}$$

满足 (10), 其中 a_0, b_0, A 和 δ 是任意常数. 对 $c \neq 0$, 设为 $c = \pm b^2$, $b > 0$, 得 (10) 的两个解 $R_0^+(b\rho)$ 和 $R_0^-(b\rho)$. 的确, 这是一般的事实: 如果 $R(\rho)f(\varphi, \theta)$ 是 $\triangle$ 具特征值 ± 1 的特征函数, 则 $R(b\rho)f(\varphi, \theta)$ 是具特征值 $\pm b^2$ 的特征函数 (参看习题 4). 在一般情形 ($\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, $c = \pm b^2 \neq 0$), (10) 的通解公式是

$$R_n^{\pm}(\rho) \equiv \rho^n \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^n [R_0^{\pm}(\rho)],\ b > 0. \tag{15}$$

我们在第 8.4 节导出该公式 (参看定理 5).

例 4 (空间径向热方程和波方程) 求三维热方程和波方程所有 (对 $\rho > 0$ 有效) 的解, 这些解具有形式 $R(\rho)T(t)$, 且当 t 和 ρ 趋于 $+\infty$ 时是有界的.

解 把 $R(\rho)T(t)$ 分别代入热方程 $u_t = k\triangle u$ 和波方程 $u_{tt} = a^2\triangle u$, 然后分离变量, 得

$$\frac{T'}{kT} = \frac{\triangle R}{R} = -c \quad 和 \quad \frac{T''}{a^2T} = \frac{\triangle R}{R} = -c.$$

因此, $R(\rho)$ 是 $\triangle$ 具特征值 c 的特征函数. 由定理 1, 对 $c = \pm b^2 \neq 0$, $R(\rho)$ 是函数 $R_0^{\pm}(b\rho)$ 之一, 或当 $c = 0$ 时, $R(\rho)$ 是稳态解 $A\rho^{-1} + B$. 根据有界性假设, 得 (对任意常数 A, γ 和 δ)

对热方程:

$$u = \frac{A}{\rho}\sin(b\rho + \delta)e^{-b^2kt}, \quad c = b^2 > 0. \tag{16}$$

对波方程:

$$u = \begin{cases} \frac{A}{\rho}e^{-b(\rho+at)}, & c = -b^2 < 0; \quad (17) \\ \frac{A}{\rho}\sin(b\rho + \delta)\sin(bat + \gamma), & c = b^2 > 0, \quad (18) \end{cases}$$

每个方程当 $c = 0$ 时存在稳态解. 解 (16)[或 (18)] 仅当 $\delta = 0$ 时是 C^∞, 可用来解热 (或波) 问题, 其中温度 (或波的振幅) 假设与 φ 和 θ 无关, 比如在一匀质球内, 其中球面边界条件是绝热的或保持常温 (或在边界上振幅的法向导数为零或振幅是常数) 以及初始温度分布 (或初始振幅和初始速度分布) 只依赖于 ρ(参看下面的例 5 和习题 8~ 习题 10). 对依赖于 φ 或 θ 的初始数据将通过利用 $\lambda = n(n+1)$, $n > 0$ 的球调和 (参看例 6 和第 8.4 节的习题 17~ 习题 20). 注意到在每一时刻 t, 与 Coulomb 或重力位势 ρ^{-1} 对比, 解 (17) 与著名的关于短程核威力的**Yukawa 位势** $\rho^{-1}e^{-b\rho}$($b > 0$) 成比例是有趣的. □

注记 从导出 (12) 的考虑, 可见如果假设解具有形式 $U(\rho, t) = g(\rho, t)/\rho$, 则热方程 $U_t = k\rho^{-2}(\rho^2 U_\rho)_\rho$ 变成 $g_t = kg_{\rho\rho}$, 而波方程 $U_{tt} = a^2\rho^{-2}(\rho^2 U_\rho)_\rho$ 变成 $g_{tt} = a^2 g_{\rho\rho}$. 因此, 如果知道某个热问题或波问题的解与角度无关, 则这种问题化为在第三章和第五章考虑过的一维情形, 如下面的例 5 所说明的. 然而, 如果一问题在 B.C. 或 I.C. 中与角度有关, 则这种技巧就失效, 会需要牵涉到球面调和函数的更一般的方法.

例 5 (球内的温度) 考虑直径为 1 的实体匀质球, 具有热传导系数 k. 对 $t > 0$, 球的表面保持温度 0, 并有常数初始温度分布 $U(\rho, 0) = 100°C$. 求温度 $U(\rho, \varphi, \theta, t)$ 形式级数解.

解 因在边界条件或在初始温度中与角度无关, 故形式解 $U(\rho,t)$ 不含有 φ 和 θ 且形式满足

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad U_t = k\frac{1}{\rho^2}(\rho^2 U_\rho)_\rho, \quad 0<\rho\leqslant\frac{1}{2}, \quad t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad U(\frac{1}{2},t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad U(\rho,0)=100.
\end{aligned}
$$

记 $U(\rho,t)=g(\rho,t)/\rho$, 根据上面的注记, 该问题等价于

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad g_t = k g_{\rho\rho}, \quad 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}, \quad t\geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad g(0,t)=0, \quad g(\frac{1}{2},t)=0;\\
&\text{I.C.}\quad g(\rho,0)=100\rho.
\end{aligned}
$$

这个新问题是熟悉的一维问题. 把 $g(\rho,0)=100\rho$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上展成 Fourier 正弦级数然后插入与时间有关的指数因子, 形式上得到

$$
U(\rho,t)=\frac{g(\rho,t)}{\rho}=\frac{100}{\pi\rho}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}e^{-4n^2\pi^2kt}\sin(2n\pi\rho)\Big).
$$

注意到对大的 t, 第一项是可控的, 且

$$
U(\rho,t)\approx\frac{100}{\pi\rho}e^{-4\pi^2kt}\sin(2\pi\rho),\ \text{当}\ t\to\infty.
$$

特别, 在球心的温度是 $\approx 200e^{-4\pi^2kt}$(为什么?). 回忆到在单位正方体中心的相应温度是 $6400\pi^{-3}e^{-3\pi^2kt}\approx 206.4e^{-3\pi^2kt}$. 因 $-4\pi^2kt<-3\pi^2kt$, 故球心最终将比正方体中心冷却要快得多. 这是预料到的, 因为直径为 1 的球可置入单位方体的内部. 然而, 如果球的半径取作 $(\frac{3}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$, 使得它的体积与单位正方体的体积相同, 则可验证球心最终将比正方体中心冷却要慢 (参看习题 7). □

例 6 (空间 D'Alembert 公式) 由形式计算, 求以下空间波问题解的 D'Alembert 公式的对应公式.

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \quad -\infty<x,\ y,\ z,\ t<\infty;\\
&\text{I.C.}\quad u(x,y,z,0)=f(x,y,z), \quad u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

解 作形式运算, 运用 Fourier 变换方法. 在 D.E. 的两边取三维 Fourier 变换, 得

$$\hat{u}_{tt}(\xi,\eta,\zeta,t) = -a^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\hat{u}(\xi,\eta,\zeta,t),$$

于是

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,\eta,\zeta,t) = {} & \hat{u}(\xi,\eta,\zeta,0)\cos(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}) \\ & +\hat{u}_t(\xi,\eta,\zeta,0)\frac{\sin(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})}{a\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}.\end{aligned}$$

利用 $\hat{u}(\xi,\eta,\zeta,0) = \hat{f}(\xi,\eta,\zeta)$ 和 $\hat{u}_t(\xi,\eta,\zeta,0) = \hat{g}(\xi,\eta,\zeta)$, 以及形式运用空间函数 Fourier 变换的反演定理 (即, 三次运用一维反演定理, 每次对一个空间变量), 有

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t) = {} & (2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{f}(\xi,\eta,\zeta)\cos(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})) \\ & e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}d\xi d\eta d\zeta \\ & +(2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{g}(\xi,\eta,\zeta)\frac{\sin(at\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})}{a\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}) \\ & e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}\tag{20}$$

回忆到一维波问题的 D'Alembert 公式 (参看第 5.2 节) 不涉及初始数据 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 变换, 因此我们希望消去形式解 (20) 中的 Fourier 变换. 注意到 (20) 的第一个积分恰好是第二个积分以 f 替换 g 后关于时间的导数. 因此, 我们将简化第二个积分, 然后对结果取时间的导数得到第一个积分. 我们有

$$g(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi,\eta,\zeta)e^{-i(\xi x+\eta y+\zeta z)}d\xi d\eta d\zeta. \tag{21}$$

现把 (20) 中的正弦项写成指数形式且同时消去分母. 令 $\omega \equiv \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. 根据 (14) 和 (15), $n=0$, $\delta=0$ 和 $b=|at|$ 及定理 1, (20) 中的函数 $\sin(at\omega)/(a\omega)$ 是 $\bar{\triangle} \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$ 具特征值 $(at)^2$ 的球对称特征函数. 对任意固定的点 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 满足 $\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2}=|at|$, 我们有 $\exp[-i(\bar{x}\xi+\bar{y}\eta+\bar{z}\zeta)]$ 是 $\bar{\triangle}$ 具特征值 $(at)^2$ 的另一个特征函数, 它不是球对称的 (为什么?). 然而, 通过在 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$-空间的球面 $\bar{\rho}=|at|$ 上积分 (即, 在球面方向取平均), 得到具特征值 $(at)^2$ 的球对称特征函数 (参看下面 (22) 中的第一个积分). 而且, 由于具相同特征值的任意两个球对称非零的特征函数具有常数比 (由定理 1 和 (14)), 故得 (对某个不依

赖于 (ξ,η,ζ) 但可能依赖于 t 的 $C(t)$)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(at\omega)}{a\omega} &= C(t)\int_{\bar{\rho}=|at|} e^{-i(\bar{x}\xi+\bar{y}\eta+\bar{z}\zeta)}d\bar{A} \\ &= C(t)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\exp\big(-i|at|(\xi\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\theta}+\eta\sin\bar{\varphi}\sin\bar{\theta} \\ &\quad +\zeta\cos\bar{\varphi})\big)(at)^2\sin\bar{\varphi}d\bar{\varphi}d\bar{\theta}. \end{aligned} \tag{22}$$

(22) 两边当 $\omega\to 0^+$ 时形式取极限, 必有 $t=C(t)(at)^2 4\pi$, 或 $C(t)=(4\pi a^2 t)^{-1}$. 把这个 $C(t)$ 代入 (22), 得

$$\frac{\sin(at\omega)}{a\omega}=\frac{t}{4\pi(at)^2}\int_{\bar{\rho}=|at|} e^{-i(\bar{x}\xi+\bar{y}\eta+\bar{z}\zeta)}d\bar{A}. \tag{23}$$

因此, (20) 中第二个积分, 记作 $I(x,y,z,t)$, 变成

$$\begin{aligned} & I(x,y,z,t) \\ &= (2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi,\eta,\zeta)\Big(\frac{t}{4\pi(at)^2} \\ &\quad \int_{\bar{\rho}=|at|} e^{-i(\bar{x}\xi+\bar{y}\eta+\bar{z}\zeta)}d\bar{A}\Big)e^{i(\bar{x}\xi+\bar{y}\eta+\bar{z}\zeta)}d\xi d\eta d\zeta \\ &= t\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{\bar{\rho}=|at|}\Big[(2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad \hat{g}(\xi,\eta,\zeta)e^{i[\xi(x-\bar{x})+\eta(y-\bar{y})+\zeta(z-\bar{z})]}d\xi d\eta d\zeta\Big]d\bar{A} \\ &= t\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{\bar{\rho}=|at|} g(x-\bar{x},y-\bar{y},z-\bar{z})d\bar{A}\equiv tM_g(x,y,z;|at|), \end{aligned} \tag{24}$$

其中我们形式上交换了积分次序以及运用了反演定理 (即 (21)). 由最后的等式定义的函数 $M_g(x,y,z;|at|)$ 是函数 g 在中心为 (x,y,z) 半径是 $|at|$ 的球面上的中值 (平均). 因此, 在该球面上点的这些初始分布在时刻 t 内将到达球心 (x,y,z). 因此, $I(x,y,z,t)$ 是所有与 (x,y,z) 相距 $|at|$ 的点的初始速度源的叠加. 可这样考虑: 由于半径为 $|at|$ 的球面的面积是 $4\pi a^2t^2$, 则 $M_g(x,y,z;|at|)$ 应该有因子 t^2 相乘, 但从例 4 注意到由一点引发的球对称波的振幅以与源点的距离成反比递减. 于是只保留 t 的一个因子. 如我们所提及的, (20) 的第一个积分只是以 f 替换 g 的第二个积分的导数. 因此, 当 $t>0$ 时, 问题 (19) 的形式解由以下空间 **D'Alembert 公式**给出:

$$u(x,y,z,t)=\frac{d}{dt}\big(tM_f(x,y,z;|at|)\big)+tM_g(x,y,z;|at|). \tag{25}$$

如果 f 是 C^2 以及 g 是 C^1 的, 可验证 (参看习题 13)(25) 确实是问题 (19) 的一个 C^2 解. □

注记 解 (25) 有一个很重要的性质, 它是一维 D'Alembert 解

$$\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(r)dr \tag{26}$$

没有的. 注意到 (25) 只依赖于 g 距离 (x,y,z) 正好是 $|at|$ 的球壳上的点的值. 然而, (26) 依赖于 g 在距 x 点小于或等于 $|at|$ 点的值 (即在第 5.2 节中讨论的依赖区间中的点). 在一维情形, 从点 P 发出到达 P' 点的速度分布在到达之后仍有作用, 然而, 在三维情形, 这种作用只在到达的瞬间且没有余效 (余波). 因此, 在三维可发送清晰的信号, 但在一维会出现余波. 实际上在一维情形由于余波造成的混乱不是太严重, 因为一旦信号的瞬时部分传过, 它的延续作用是常量 (即, 对固定的 x, (26) 中的积分最终是常数, 如果 g 在某个小区间之外为零的话), 这意味着用无线电有效的通讯是可能的. 然而, 在二维情形, 也有余波, 且余波最终不是常量. 的确, **二维 D'Alembert 解**的类似公式是 (参看习题 14)

$$\begin{aligned}u(x,y,t)=&\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\int_{\bar r\leqslant|at|}\frac{f(x-\bar x,y-\bar y)}{\sqrt{a^2t^2-\bar r^2}}d\bar xd\bar y\right]\\&+\frac{1}{2\pi a}\int\int_{\bar r\leqslant|at|}\frac{g(x-\bar x,y-\bar y)}{\sqrt{a^2t^2-\bar r^2}}d\bar xd\bar y,\qquad \bar r\equiv\sqrt{\bar x^2+\bar y^2}.\end{aligned} \tag{27}$$

(27) 中的分母依赖于 t 隐含在二维情形余波最终不是常量, 因此在这种情形信号 (比如电学的或声学的) 的清晰传递是不可能的. 信号以明确的像波阵面的扩展外形传播的叙述称为**Huygens 原理**. 因此, Huygens 原理对三维波方程成立, 但在二维不成立 (每个偶数维也不成立, 参看 [Courant 和 Hilbert, p.690]). 还应注意到公式 (23) 在二维情形不成立 (为什么?), 公式 (23) 是导出 (25) 的关键. □

概要 8.3

1. 球坐标的 Laplace 算子: 对 $u(x,y,z)=U(\rho,\varphi,\theta)$, 如同命题 1, 有

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\frac{1}{\rho^2}\big((\rho^2U_\rho)_\rho+\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi U_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}U_{\theta\theta}\big).$$

2. 单位球面上的 Laplace 算子 $\triangle_s$: 对单位球面上的 C^2 函数 $f(\varphi,\theta)$,

$$\triangle_s f(\varphi,\theta)=\triangle f(\rho,\varphi,\theta)\Big|_{\rho=1}=\frac{1}{\sin\varphi}\,[\sin\varphi f_\varphi]_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta},$$

其中 $f(\rho,\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta)$ 是 f 的延拓, 它在径向为常值.

3. 空间 Laplace 算子的特征函数: 根据定理 1, $F(\rho,\varphi,\theta)=R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是 Laplace 算子 $\triangle$(在空间上) 具特征值 c 的特征函数 (即, $\triangle F+cF=0$) 当且仅当 $f(\varphi,\theta)$ 是具特征值 λ 的球面调和的 (即 $\triangle_s f+\lambda f=0$), 且 $R(\rho)$ 是以下方程的解

$$(\rho^2R'(\rho))'+(c\rho^2-\lambda)R(\rho)=0. \tag{S1}$$

如同将证明的 (参看第 8.4 节的定理 1′), 特征值 λ 具有形式 $n(n+1)$, $n=0,1,2,\cdots$, 且对每个这样的 n, 存在 $2n+1$ 个在第 8.4 节中所描述的线性无关的球面调和函数. 而且, 在第 8.4 节的定理 5 中我们证明了如果 $\lambda=n(n+1)$ 和 $c=\pm b^2\neq 0$, 则 (S1) 的通解是 $R_n^\pm(b\rho)$, 这里

$$R_n^\pm(b\rho)\equiv\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^\pm(\rho)],\quad b>0,\quad 和\quad \begin{cases}R_0^-(\rho)=\frac{1}{\rho}(a_0e^\rho+b_0e^{-\rho}),\\ R_0^+(\rho)=\frac{1}{\rho}(a_0\cos\rho+b_0\sin\rho),\end{cases}$$

其中 a_0 和 b_0 是任意常数. 当 $c=0$, 具 $\lambda=n(n+1)$ 的 (S1) 的通解是 $a\rho^n+b\rho^{-(n+1)}$.

4. 应用: 在例 4, 我们求得径向热流和空间波的传播的乘积解, 在球内的径向热流包含在例 5 中. 例 6 导出空间中任意波的传播的 D'Alember 公式 (25). 该公式表明 Huygen 原理在三维中成立.

练习 8.3

1. 用球坐标表示以下函数 $u(x,y,z)$, 并利用命题 1 中 (2), 通过以球坐标计算 Laplace 运算(即 $\triangle u=0$)来验证这些函数是调和的.

(a) $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, (b) $u(x,y,z)=x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $u(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$, (d) $u(x,y,z)=z^3-3zx^2$.

2. 假设 (x,y,z) 限制在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$(或 $\rho=1$) 上. 则用球面上 φ 和 θ 坐标写出习题 1 中的函数. 在每种情形, 验证导致的函数 $f(\varphi,\theta)$ 是球面调和的 (即对某个常数 $\lambda\geqslant 0$, $\triangle_s f+\lambda f=0$). λ 具有 $n(n+1)$, $n=0,1,2,\cdots$ 形式吗?

3. 计算 $\triangle_s(\sin\varphi)$. $\sin\varphi$ 在单位球面上是 C^2 吗? 是 C^1 吗? 是连续吗?

4. (a) 证明: 如果 $f(x,y,z)$ 是 $\triangle$ 具特征值 c 的特征函数 (即, $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}+cf=0$, $f\neq 0$), 则函数 $g(x,y,z)=f(bx,by,bz)$($b\neq 0$) 是 $\triangle$ 具特征值 b^2c 的特征函数.

(b) 利用 (a) 部分和定理 1 推断: 如果 $R(\rho)S(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle$ 具特征值 ± 1 的特征函数, 且 $\triangle_s S+\lambda S=0$, 则 $r(\rho)=R(b\rho)$ 满足 $c=\pm b^2$ 的方程 (10).

(c) 直接证明, 如果 $R(\rho)$ 满足 $c=\pm 1$ 的 (10), 则 $r(\rho)$ 满足 $c=\pm b^2$ 的 (10).

5. (a) 利用例 5 中相同的想法, 证明 $\frac{d^2}{d\theta^2}$ 在单位圆周上非常值的 C^2 特征函数 $f(\theta)$(即 $f''+\lambda f=0$) 必有非负特征值.

(b) 证明 (a) 部分中 $\frac{d^2}{d\theta^2}$ 的特征值必具有 n^2, $n=0,1,2,\cdots$ 形式.

6. 已知在任意无边光滑曲面 T 上 (例如, 球面或圆环面), 在该曲面上的 Laplace 算子是唯一的算子 $\triangle$, 使得对所有在 T 上的 C^2 函数 f 和 g, 满足

$$\int_T f\triangle g dA=-\int_T \nabla f\cdot\nabla g dA,$$

其中 dA 是 T 上的面积元, ∇f 表示 f 在 T 上的梯度 (该公式的证明基于散度定理, 参看练习 8.6 的习题 11). 证明 $\triangle$ 在 T 上非常值的特征函数具有正特征值.

7. 假设在例 5 中球的半径变成 $(\frac{3}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$, 使得体积为 1. 在例 5 的条件下证明, 在这种情形下在单位方体的中心冷却则比在球心冷却更迅速 (对大的 t).

8. 把 $u(x,y,z,t)$ 表示成 $U(\rho,t)$, 在球 $\rho\leqslant 1$ 上求解具初始温度分布 $U(\rho,0)=\rho^{-1}\sin^3(\pi\rho)$ 和 B.C.$U(1,t)=0$ 的热方程 $u_t=k\triangle u$.

9. (a) 记 $U(\rho,t)=g(\rho,t)/\rho$, 把以下绝热单位球的热问题转换成关于未知函数 $g(\rho,t)$ 的一维热问题.

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad U_t=k\frac{1}{\rho^2}(\rho^2U_\rho)_\rho,\quad 0<\rho<1,\quad t>0;\\&\text{B.C.}\quad U_\rho(1,t)=0;\\&\text{I.C.}\quad U(\rho,0)=f(\rho).\end{aligned}$$

(b) 在 (a) 部分求出关于 $g(\rho,t)$ 的新问题, 求满足关于 $g(\rho,t)$ 问题的 D.E. 和 B.C. 的乘积解 $R(\rho)T(t)$ 的径向部分 $R(\rho)$ 的 Sturm-Liouville 问题 (参看第 4.4' 节). 什么方程确定特征值?特征函数是什么?(务必考虑 $\lambda \leqslant 0$.) 假设 $\rho f(\rho)$ 可用特征函数和来逼近, 怎样能获得在 (a) 中原问题的解?

10. 对波方程情况重做习题 9:

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad U_{tt} = a^2 \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 U_\rho)_\rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad -\infty < t < \infty;\\
&\text{B.C.} \quad U_\rho(1,t) = 0,\\
&\text{I.C.} \quad U(\rho,0) = f(\rho), \quad U_t(\rho,0) = 0.
\end{aligned}$$

11. (a) 假设在习题 9(a) 中去掉 B.C. 使得结果成为在整个空间上的径向对称热流问题. 利用半无限杆一维热方程的积分解来解关于 $g(\rho,t)$ 的相应问题.

(b) 通过把问题转化成可运用 D'Alembert 公式的一维波问题来解以下在整个空间上径向对称波问题:

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad U_{tt} = a^2 \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 U_\rho)_\rho, \quad 0 < \rho < \infty;\\
&\text{I.C.} \quad U(\rho,0) = f(\rho), \quad U_t(\rho,0) = h(\rho).
\end{aligned}$$

验证你的答案与直接利用空间 D'Alembert 公式 (25) 获得的一致.

12. (a) 对任意复数 c 证明

$$U(\rho) = \frac{e^{c\rho}}{\rho} \quad (\rho > 0)$$

是 $\triangle$ 具特征值 $-c^2$ 的特征函数 (即 $\triangle U - c^2 U = 0$).

(b) 推断

$$V(\rho,t) = \frac{e^{kc^2 t + c\rho}}{\rho} \quad (\rho > 0)$$

满足热方程 $v_t = k\triangle v$.

(c) 对某实数 α, 令 $c = \alpha(1+i)$, 考虑 (b) 部分中 $V(\rho,t)$ 的实部. 对某个 δ, 以 $t+\delta$ 替换 t, 求 $\rho > \rho_0$ 的热方程 $u_t = k\triangle u$ 的解 $U(\rho,t)$, 使得 $U(\rho_0,t) = \cos(\omega t)$ 以及当 $\rho \to \infty$ 时 $U(\rho,t) \to 0$.

(d) 通过去掉条件 $U(\rho,t) \to 0$, $\rho \to \infty$, 求热方程 $u_t = k\triangle u$ 的解 $U(\rho,t)$, 使得 $U(\rho_0,t) = \cos(\omega t)$, 其中 u 是球 $\rho \leqslant \rho_0$ 上的 C^2 函数, 甚至在 $\rho = 0$ 处也是 C^2 的.

提示 为消除在 $\rho = 0$ 处的奇异性行为, 考虑关于两个可能相反值的 α 的解的差.

13. 当 $f(x,y,z)$ 是 C^3 和 $g(x,y,z)$ 是 C^2 时, 直接验证 (25) 确实满足三维波问题 (19).

提示 利用中心在 (x,y,z) 的球坐标.

14. 由形式计算 (或利用习题 13 的假设), 通过利用在 f 和 g 与 z 无关的情形下三维解 (25) 来获得二维波问题的解 (27). 这种由高维问题的解获得低维问题的解的技巧称为**降维法**.

§8.4 球面调和函数, Laplace 级数及其应用

在本节将求出所有的球面调和函数 (即 $\triangle_s$ 的特征函数), 并证明在球面上任一 C^2 函数能写成球面调和函数的一致收敛级数 (Laplace 级数). 这种在球面上函数的 Laplace 级数类似于圆周上函数的 Fourier 级数. 它用于涉及当解显然依赖于角度时的球坐标的边值问题, 如在以下例子中所展示的.

例 1 证明如果 $U(\rho,\varphi,\theta) = R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是空间 Laplace 方程 $\triangle U = 0$ 的解, 则 $f(\varphi,\theta)$ 必是球面调和的. 利用该事实通过以球坐标写出 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ 的某些显然的解 (如,x, y, z; xy, yz, x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2) 来找出一些球面调和函数. 以这种方式求得的球面调和函数的特征值是什么?

解 如果 $U(\rho,\varphi,\theta) = R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 满足 Laplace 方程 $\triangle U = 0$ 且 $U \neq 0$, 则 U 是 $\triangle$ 具特征值 $c=0$ 的特征函数 (即, $\triangle U + 0\cdot U = 0$). 于是, 由第 8.3 节的定理 1, $f(\varphi,\theta)$ 必是球面调和的. 利用第 8.3 节的变换式 (1), 有

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta \quad \text{和} \quad z = \rho\cos\varphi. \tag{1}$$

因此, 函数 $\sin\varphi\cos\theta$, $\sin\varphi\sin\theta$, $\cos\varphi$ 都是球面调和的. 作为验证, 来计算 $\sin\varphi\cos\theta$ 的 $\triangle_s$. 由第 8.3 节的公式 (7), 得

$$\begin{aligned}\triangle_s[\sin\varphi\cos\theta] &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta) + \frac{1}{\sin^2\varphi}(-\sin\varphi\cos\theta)\\ &= \frac{1}{\sin\theta}(1-2\sin^2\varphi)\cos\theta - \frac{1}{\sin\varphi}\cos\theta = -2(\sin\varphi\cos\theta).\end{aligned}$$

因此, $\sin\varphi\cos\theta$ 确实是 $\triangle_s$ 的特征函数且特征值是 2. 可验证 $\sin\varphi\sin\theta$ 和 $\cos\varphi$ 也具有特征值 2, 但实际上我们可从球对称性推得该结果. 的确, 关于直线 $x=y=z$ 旋转 120° 的一个空间旋转, 把点 (x,y,z) 变成 (y,z,x), 于是函数 x 变成 y, y 变成 z 和 z 变成 x. 因算子 $\triangle$ 和 $\triangle_s$ 是旋转不变的, 故由对称性得到这

些函数的每个函数有相同的特征值, 即 2. 有无穷多具特征值 2 的其他特征函数, 但下面的定理 1′ 意味着这些特征函数都可通过组成线性组合 $c_1\sin\varphi\cos\theta+c_2\sin\varphi\sin\theta+c_3\cos\varphi$ 获得. 对给定的特征值 λ, $\triangle_s f+\lambda f=0$ 的所有解的集合称为 $\triangle_s$ 的**特征空间**. 因此, 上述所有线性组合的集合是 $\triangle_s$ 相应于特征值 2 的特征空间, 且该特征空间是三维的. 还从第 8.3 节的定理 1 知道, 当限制在球面 $\rho=1$ 上, 二次调和函数 $2xy$, $2yz$, $2zx$, x^2-y^2 和 y^2-z^2 都是 $\triangle_s$ 的特征函数. 用 φ 和 θ 表示, 这些调和函数分别是 (利用 (1)):

$$\begin{aligned}&2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta,\quad 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta,\quad 2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta,\\&\sin^2\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\quad 和\quad \sin^2\varphi\sin^2\theta-\cos^2\varphi.\end{aligned}\tag{2}$$

这些球面调和函数都可经旋转从一个变成另一个 (例如, 注意到 $2xy$ 由绕 z-轴旋转 $45°$ 的旋转变成 x^2-y^2, 且经关于直线 $x=y=z$ 的旋转, 如上, x,y,z 循环依次变动). 因此, 它们有相同的特征值. 通过计算这些函数中的任一函数的 $\triangle_s$ 可得到该特征值. 然而, 有更容易的方法求得它. 注意到 $2xy=\rho^2 2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$, 它具有形式 $R(\rho)f(\varphi,\theta)$, 其中 $R(\rho)=\rho^2$, 这是第 8.3 节的 (13)$n=2$ 和 $\lambda=2(2+1)=6$ 的特殊情形. 因此, 由次数为 2 的调和多项式 (没有低次项), (2) 的任意一个球面调和函数的特征值是 6. 我们还将证明五个函数 (2) (经线性组合) 生成 $\triangle_s$ 的特征值为 6 的整个五维特征空间. (注意到 $x^2-z^2=(x^2-y^2)+(y^2-z^2)$, 所以这不限制 $\triangle_s$ 的第六个无关的特征函数.) □

定义 一 n 次多项式 $u(x,y,z)$ 称为是**齐次的**, 如果它的所有项都是 n 次的(例如 x^3-3xy^2+xyz). 此外, 函数 $u(x,y,z)$ 称为是**调和的**, 如果 $u(x,y,z)$ 满足 Laplace 方程 $\triangle u\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ (例如,x^3-3xy^2+xyz 还是调和的).

用例 1 中用过的技巧, 可证明以下定理

定理1 每个 n 次齐次调和多项式 $u(x,y,z)$ 可写成形式 $U(\rho,\varphi,\theta)=\rho^n f(\varphi,\theta)$, 其中 $f(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle_s$ 具特征值 $n(n+1)$ 的一个特征函数(即, 球面调和的).

以下更深入结果的证明将在有关 Laplace 级数的子节中给出.

定理 1′ 对任一 (C^2) 球面调和函数 $f(\varphi,\theta)$, 存在整数 $n \geqslant 0$, 使得 $\rho^n f(\varphi,\theta)$ 以 x, y 和 z 表示时是调和多项式. $f(\varphi,\theta)$ 的特征值是 $n(n+1)$, 且有 $2n+1$ 个线性无关具特征值 $n(n+1)$ 的球面调和函数 (即, 对应于该特征值的 $\triangle_s$ 的特征空间具有维数 $2n+1$).

对小数值的 n, 仅用反复试验法也许会容易求得 $2n+1$ 个独立齐次调和多项式. 仅由考虑 $(x+iy)^n$, $(y+iz)^n$ 和 $(z+ix)^n$ 的实部和虚部总可求得一些这种多项式 (为什么?). 然而, 我们需要发展一个求出所有这些多项式的系统方法. 实际上有许多不同的方法. 最常见的方法是: 用球坐标表示时, 寻求形如 $\rho^n L(\varphi)M(\theta)$ 的调和多项式. 把该形式代入第 8.3 节 $c=0$ 的 (9), 得

$$n(n+1) = \frac{-1}{L(\varphi)M(\theta)}\left(\frac{1}{\sin\varphi}[\sin\varphi L'(\varphi)]'M(\theta) + \frac{1}{\sin^2\varphi}L(\varphi)M''(\theta)\right). \tag{3}$$

由分离变量得到结论: M''/M 是常数. 该常数必具有形式 $-m^2$, 对整数 $m = 0,\pm1,\pm2,\cdots$, 因不然的话 $M(\theta)$ 不可能是以 2π 为周期的周期函数 (为什么这是必须的?). 因此, $M(\theta)$ 具有形式 $c_1\cos(m\theta)+c_2\sin(m\theta)$, 但习惯上用复符号

$$M_m(\theta) = e^{im\theta}, \quad m = 0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{4}$$

对每个 m, 对 $M(\theta)=M_m(\theta)$, 由 (3) 得到以下关于 $L(\varphi)$ 的常微:

$$\sin\varphi[\sin\varphi L'(\varphi)]' + [n(n+1)\sin^2\varphi - m^2]L(\varphi) = 0. \tag{5}$$

当 $m=0$ 时, 它称为 **Legendre微分方程**, 对 $m\neq 0$ 称为**伴随的Legendre方程**. 解这种方程通常的方法是先作变换 $\omega=\cos\varphi$ 并定义 $h(\omega)=h(\cos\varphi)\equiv L(\varphi)$. 利用链法则 $\frac{d}{d\varphi}=\frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d}{d\omega}=-\sin\varphi\frac{d}{d\omega}$, 以及 $\sin^2\varphi=1-\omega^2$, 立刻得

$$(1-\omega^2)\frac{d}{d\omega}\left((1-\omega^2)\frac{dh}{d\omega}\right) + (n(n+1)(1-\omega^2)-m^2)h(\omega) = 0. \tag{6}$$

当 $m=0$(Legendre 微分方程) 时, 该常微可由假设一个解是以幂级数 $\sum a_k\omega^k$ 的形式来解得. 我们将以更自然的方式 (参看例 3) 产生期望的无奇异性的解. 幂级数方法表明 $\omega=\cos\varphi$ 在 ±1 附近 (即, 当趋于球的北极和南极时) 有确切定义的仅有的解是一个关于 ω 的 n 次多项式的常数倍, 该多项式称为 n 次 **Legendre多项式**$P_n(\omega)$. 齐次二阶常微 (6) 的任一第二个线性无关的解在 $\omega=\pm1$ 有奇异性, 因通过检查 Wronski 行列式 (参看习题 8) 容易证明. 前 5 个 Legendre 多项式是

$$
\begin{aligned}
&P_0(\omega)=1,\ p_1(\omega)=\omega,\ P_2(\omega)=\frac{1}{2}(3\omega^2-1),\ P_3(\omega)=\frac{1}{2}(5\omega^3-3\omega),\\
&P_4(\omega)=\frac{1}{8}(35\omega^4-30\omega^2+3),\ \ P_5(\omega)=\frac{1}{8}(63\omega^5-70\omega^3+15\omega).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

可能会需要高阶的 Legendre 多项式, 一般的公式是 (参看例 3)

$$
P_n(\omega)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(2n-2k)!(-1)^k}{k!(n-k)!(n-2k)!}\omega^{n-2k},
\tag{8}
$$

其中如果 n 是偶数,$[\frac{n}{2}]=\frac{n}{2}$, 如果 n 是奇数, $[\frac{n}{2}]=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$.

注记 作为选择, 有一个漂亮的对称公式

$$
\begin{aligned}
P_n(\omega)&=\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{n!}{k!(n-k)!}\Big)^2\Big(\frac{\omega-1}{2}\Big)^{n-k}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\Big(\frac{n!}{k!(n-k)!}\sin^{n-k}\frac{\varphi}{2}\cos^k\frac{\varphi}{2}\Big)^2.
\end{aligned}
$$

□

例 2 求一 x,y 和 z 的三次调和多项式, 使得它在球面 $\rho=1$ 上的限制是与 θ 无关的球面调和函数 $f(\varphi,\theta)$.

解 先求适当的球面调和函数, 然后构造该多项式. 乘积球调和函数具有形式 $L(\varphi)e^{im\theta}$, 其中 $L(\varphi)$ 是伴随的 Legendre 方程 (5) 的解. 由于期望与 θ 无关的球面调和函数, 我们取 $m=0$ 并得出 $L(\varphi)=P_n(\cos\varphi)$. 在球面上, $z=\cos\varphi$. 因此, 由于希望得到次数为 3 的多项式, 取 $n=3$, 则合适的调和多项式是

$$
2\rho^3P_3(\cos\varphi)=\rho^3(5\cos^3\varphi-3\cos\varphi)=5z^3-3z\rho^2=5z^3-3z(x^2+y^2+z^2).
$$

□

例 3 考虑熟悉的调和位势 $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \rho^{-1}$, 并令 $u_c(x,y,z) \equiv u(x,y,z-c)$ 是它沿着 z-轴的平移. 用球坐标 u_c 由 $U_c(\rho,\varphi,\theta) = (\rho^2 - 2c\rho\cos\varphi + c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 给出. 通过把 U_c 展成变量 c 的幂级数, 证明

$$U_c(\rho,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\varphi)\rho^{-(n+1)}c^n, \tag{9}$$

其中 $P_n(\cos\varphi)$ 由 (8) 给出. 证明 $P_n(\cos\varphi)$ 确实满足 Legendre 微分方程 (即 $m=0$ 的方程 (5)).

解 注意到 $x^2+y^2+(z-c)^2 = \rho^2 - 2cz + c^2 = \rho^2 - 2c\rho\cos\varphi + c^2 = \rho^2(1-2\cos\varphi(c/\rho)+(c/\rho)^2)$. 因此, 令 $\xi = c/\rho$ 和 $\omega = \cos\varphi$, 得

$$U_c(\rho,\varphi,\theta) = \rho^{-1}[1-2\xi\cos\varphi+\xi^2]^{-\frac{1}{2}} = \rho^{-1}[1-2\xi(\omega-\frac{1}{2}\xi)]^{-\frac{1}{2}}.$$

利用二项式展开 $[1-2b]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}b^r$(对 $|b| < \frac{1}{2}$ 是收敛的), 取 $b = \xi(\omega-\frac{1}{2}\xi)$, 则得 (对 $|\xi(\omega-\xi/2)| < \frac{1}{2}$, 比如 $|\xi| < \frac{1}{3}$ 或 $|c| < \rho/3$), 对 $|c| < \frac{\rho}{3}$, 有

$$\begin{aligned}
U_c(\rho,\varphi,\theta) &= \frac{1}{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}\left[\xi(\omega-\frac{1}{2}\xi)\right]^r \\
&= \frac{1}{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!}{2^r(r!)^2}\left(\xi^r\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{r!}{s!(r-s)!}\omega^{r-s}(\frac{1}{2}\xi)^s\right) \\
&= \frac{1}{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(2r)!(-1)^s}{2^{r+s}(r!)^2}\frac{r!}{s!(r-s)!}\omega^{r-s}\xi^{r+s} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s(2r)!}{2^{r+s}r!(r-s)!s!}\omega^{r-s}\rho^{-(1+r+s)}c^{r+s}.
\end{aligned}$$

因要以 c^n 为项的级数, 则作指标变换 $n = r+s$, $k = s$. 由于 $k = s \leqslant r = n-s = n-k$, 故有 $2k \leqslant n$, 其中 k 取值于 0 和 $[\frac{n}{2}]$ 之间. 因此, 有

$$U_c(\rho,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}(\cos\varphi)^{n-2k}\right]\rho^{-(n+1)}c^n, \quad |c| < \frac{\rho}{3},$$

此为期望的关系式 (9). 为证明 $P_n(\cos\varphi)$ 是 Legendre 微分方程的解, 只需证明

$P_n(\cos\varphi)\rho^{-(n+1)}$ 是调和的. 然而, 由于 (9) 是函数 $f(c) = U_c(\rho, \varphi, \theta)$ 的 Taylor 级数, 故必有

$$\begin{aligned} &n! P_n(\cos\varphi)\rho^{-(n+1)} = f^{(n)}(0) \\ &= \frac{d^n}{dc^n}(x^2+y^2+(z-c)^2)^{-\frac{1}{2}}|_{c=0} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

此为一调和函数的偏导数, 于是本身是调和的 (为什么?). □

我们知道, 如果 $L(\varphi)$ 是 m 阶伴随的 Legendre 方程 (5) 的解, 则 $e^{im\theta}L(\varphi)$ 是球面调和函数. 至此, 我们已构造了当 $m=0$ 时的球面调和函数, 即 $P_n(\cos\varphi)$. 这些球面调和函数只依赖于 φ(不依赖于 θ), 它们称为**带状球面调和函数**. 对一任意整数 m, (5) 的适当的解 $P_{n,m}(\omega)$ 称为**伴随的 Legendre 函数**, 且由以下给出

$$P_{n,m}(\omega) = (1-\omega^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\omega^m} P_n(\omega)$$

或

$$P_{n,m}(\cos\varphi) = \sin^m \varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi), \quad m \geqslant 0,$$

和

$$P_{n,m}(\omega) = P_{n,-m}(\omega), \quad m < 0. \tag{11}$$

注意到如果 $|m| > n$, $P_{n,m}(\omega) = 0$, 因 $P_n(\omega)$ 是一 n 次多项式. 验证 $P_{n,m}(\omega)$ 满足方程 (6) 的一种方法是对 $|m|$ 用归纳法, 利用事实: 当 $m=0$ 时 $P_n(\omega)$ 满足该方程. 这没有解释 (11) 最先是如何求得的. 在最后的子节中提供了一个推导 (参看定理 6).

定理 2 对任一整数 $n \geqslant 0$, 下面的 $2n+1$ 个函数是 $\triangle_s$ 的具公共特征值 $n(n+1)$ 的特征函数 (即, 球面调和函数):

$$S_{n,m}(\varphi,\theta) \equiv e^{im\theta} P_{n,m}(\cos\varphi) = e^{im\theta} \sin^{|m|}\varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi), \quad m = -n, \cdots, n. \tag{12}$$

通过取实部和虚部, 我们有实值球面调和函数:

$$P_n(\cos\varphi),\ \cos(m\theta)\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi),\ \sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi),\ m=1,\cdots,n. \tag{12'}$$

(12′) 中的每个函数与 ρ^n 相乘后, 当以 x,y 和 z 表示时成为 n 次调和多项式.

在给出证明之前, 在图 1 我们向读者提供了一些球面调和函数的绘画表示. 第一张图是单位球面. 在图 1 中的其他图中, 为了表示一给定的球面调和函数, 比如 $S(\varphi,\theta)$, 我们已将单位球面上的每点 (φ,θ) 推离原点 $\alpha\cdot S(\varphi,\theta)$ 的距离, 其中 α 是正常数 (通常是 0.5 或更小, 使得球面的形变不太严重). 如果 $S(\varphi,\theta)<0$, 则点 (φ,θ) 推向原点. 注意到带状球面调和函数 $P_n(\cos\varphi)$ 由绕 z–轴旋转的曲面表示, 而其他的球面调和则不是, 由于因子 $\sin(m\theta)$, 虽然这些其他的曲面仍然具有一张不连续的关于 z–轴旋转对称的褶曲面. $P_3(\cos\varphi)$ 和 $P_5(\cos\varphi)$ 给了两张视图, 因为这些曲面在 xy–平面上反射不是不变的. 注意到如果 $m+n$ 是偶数, 则 $P_{n,m}(\cos\varphi)\sin(m\theta)$ 的曲面在 xy–平面上反射是不变的, 因为在那种情形 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 关于 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 是偶函数 (为什么?). 当 m 是偶数时, 有过 z–轴的对称性. 如果 n 是偶数 m 是奇数, 则曲面关于原点对称 (为什么?). 这些事实可使我们"看到" 曲面没有显示的部分.

定理 2 的证明 (12) 中的每个函数是函数 $M_m(\theta)$(参看 (4)) 和 (5) 的一个解的乘积, 因此是 $\triangle_s f=-n(n+1)f$ 的一个解 (参看(3)). 易得该线性齐次方程解的实部和虚部也是解. 由于 ρ^n 满足第 8.3 节 $\lambda=n(n+1)$ 和 $c=0$ 的 (10), 故由第 8.3 节的定理 1 得知, 当 (12′) 中的任一函数以 ρ^n 相乘时, 则得到空间上的调和函数. 剩下来证明这些调和函数当以 x,y 和 z 表示时是 n 次多项式. 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\varphi$. 注意到 $\cos(m\theta)\rho^m\sin^m\varphi=r^m\cos(m\theta)=\mathrm{Re}[(x+iy)^m]$, 以及 $\sin(m\theta)\rho^m\sin^m\varphi=\cdots=\mathrm{Im}[(x+iy)^m]$, 它们是多项式. 此外, $\rho^{n-m}P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 具有形如 Az^{n-m} 的主项 (因 $z=\rho\cos\varphi$), 而次项具有形式 $Bz^{n-m-2}\rho^2$, 等等. 认识到在 $P_n^{(m)}(\omega)$ 中 ω 的幂次都是偶数或都是奇数 (为什么?) 是重要的, 于是只有 ρ 的偶次幂出现. 因 $\rho^2=x^2+y^2+z^2$, 所以这些 ρ 的偶次幂都是多项式 (不同于 ρ 本身), 因此 $\rho^{n-m}P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 实际上是个多项式. 于是由 (12′) 的函数以 ρ^n 相乘得到的每个调和函数确实是一个多项式. □

注记 习题 12 说明, 每个实的调和 n 次多项式是由球面调和函数 (12′) 乘

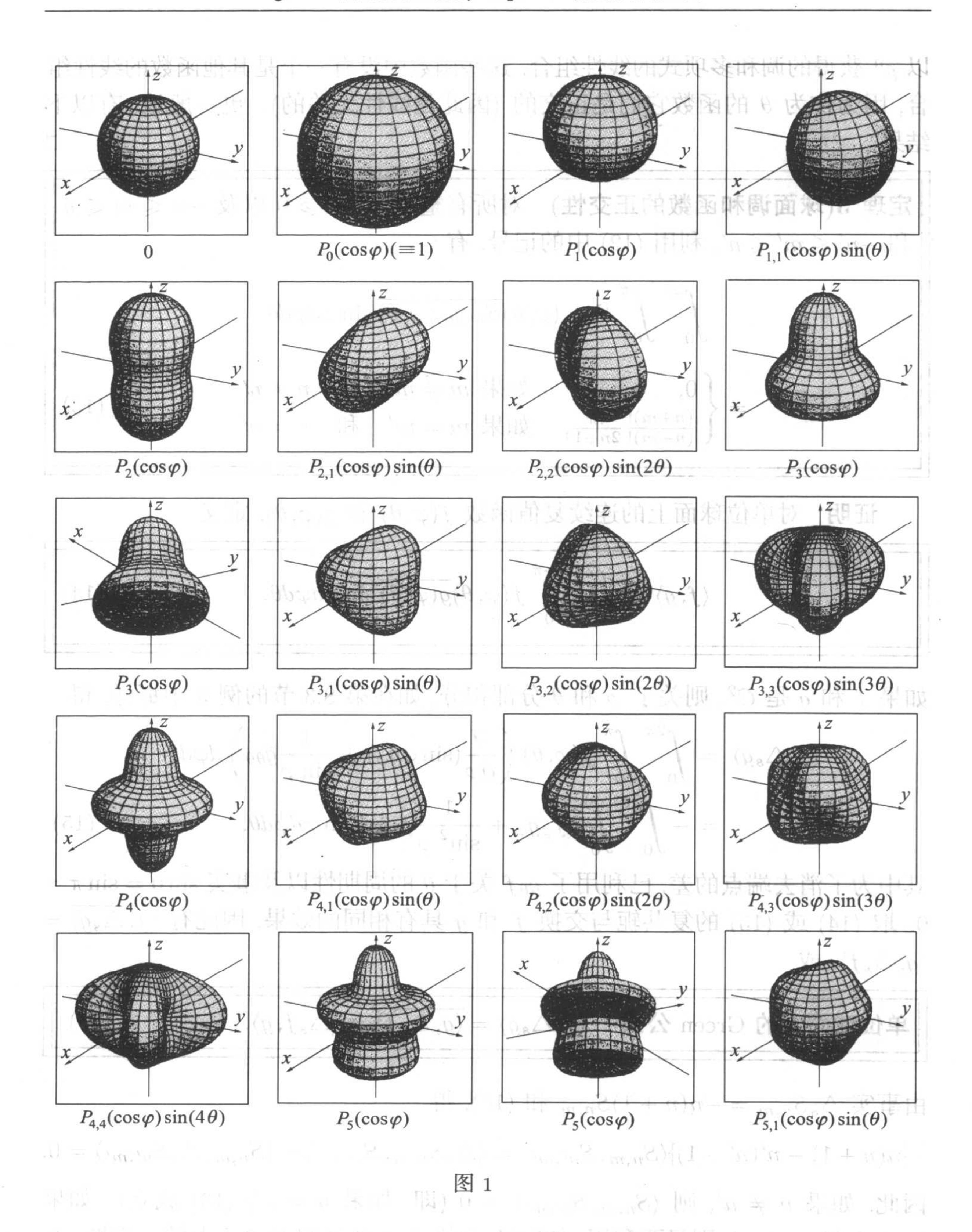

0
$P_0(\cos\varphi)(\equiv 1)$
$P_1(\cos\varphi)$
$P_{1,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_2(\cos\varphi)$
$P_{2,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_{2,2}(\cos\varphi)\sin(2\theta)$
$P_3(\cos\varphi)$
$P_3(\cos\varphi)$
$P_{3,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_{3,2}(\cos\varphi)\sin(2\theta)$
$P_{3,3}(\cos\varphi)\sin(3\theta)$
$P_4(\cos\varphi)$
$P_{4,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$
$P_{4,2}(\cos\varphi)\sin(2\theta)$
$P_{4,3}(\cos\varphi)\sin(3\theta)$
$P_{4,4}(\cos\varphi)\sin(4\theta)$
$P_5(\cos\varphi)$
$P_5(\cos\varphi)$
$P_{5,1}(\cos\varphi)\sin(\theta)$

图 1

以 ρ^n 获得的调和多项式的线性组合. 这些函数中没有一个是其他函数的线性组合, 因为作为 θ 的函数它们是正交的 (因此是线性无关的). 更一般地, 有以下结果. □

定理 3(球面调和函数的正交性) 对所有整数 n, $n' \geqslant 0$ 以及 $-n \leqslant m \leqslant n$ 和 $-n' \leqslant m' \leqslant n'$, 利用 (12) 中的记号, 有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_{n,m}(\varphi,\theta)\overline{S_{n',m'}(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{如果 } m \neq m' \quad \text{或} \quad n \neq n' \\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{4\pi}{2n+1}, & \text{如果 } m = m' \quad \text{和} \quad n = n'. \end{cases} \tag{13}$$

证明 对单位球面上的连续复值函数 $f(\varphi,\theta)$ 和 $g(\varphi,\theta)$, 定义

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\overline{g(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta. \tag{14}$$

如果 f 和 g 是 C^2, 则关于 φ 和 θ 分部积分, 如在第 8.3 节的例 3 中那样, 得

$$\begin{aligned}\langle f, \triangle_s g\rangle &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\bar{g}_\varphi) + \frac{1}{\sin\varphi}\bar{g}_{\theta\theta}\right)d\varphi d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(f_\varphi\bar{g}_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}f_\theta\bar{g}_\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta, \end{aligned} \tag{15}$$

其中为了消去端点的差, 已利用了 $g_\theta f$ 关于 θ 的周期性以及事实 $\sin 0 = \sin\pi = 0$. 取 (14) 或 (15) 的复共轭与交换 f 和 g 具有相同的效果. 因此有 $\overline{\langle f, \triangle_s g\rangle} = \langle g, \triangle_s f\rangle$, 或

单位球面上的 Green 公式: $\langle f, \triangle_s g\rangle = \overline{\langle g, \triangle_s f\rangle} = \langle \triangle_s f, g\rangle.$ (16)

由事实 $\triangle_s S_{n,m} = -n(n+1)S_{n,m}$ 和 (16), 得

$$-[n(n+1) - n'(n'+1)]\langle S_{n,m}, S_{n',m'}\rangle = \langle \triangle_s S_{n,m}, S_{n',m'}\rangle - \langle S_{n,m}, \triangle_s S_{n',m'}\rangle = 0.$$

因此, 如果 $n \neq n'$, 则 $\langle S_{n,m}, S_{n',m'}\rangle = 0$ (即, 如果 $n \neq n'$, (13) 成立). 如果 $n = n'$ 和 $m \neq m'$, 则只要利用 $e^{im\theta}$ 和 $e^{im'\theta}$ 在 θ 的区间 $[0, 2\pi]$ 上的正交性. 在习题 10 中, 我们协助读者证明当 $n = n'$ 和 $m = m'$ 时的结果 (13). □

球面上函数的 Laplace 级数

定义 定义在球面上函数 $f(\varphi,\theta)$ 的 Laplace 级数是

$$\mathrm{LS}\ f(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}c_{n,m}S_{n,m}(\varphi,\theta), \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}c_{n,m}&=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)e^{-im\theta}P_{n,m}(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta,\\&=\|S_{n,m}\|^{-2}\langle f,S_{n,m}\rangle,\end{aligned} \tag{18}$$

$P_{n,m}$ 和 $S_{n,m}$ 分别由 (11) 和 (12′) 定义, 如果积分 (18) 存在的话.

注记 就像圆周上的 Fourier 级数或矩形上的二重 Fourier 级数, 球面上函数的 Laplace 级数是一个特征函数展开, 其中算子是函数的给定区域上的 Laplace 算子. 系数公式形式地由正交关系 (13) 获得. □

定理 4(Laplace 级数的一致收敛性) 设 $f(\varphi,\theta)$ 是单位球面上的 C^2 函数. 则 f 的 Laplace 级数在以下意义下一致收敛到 f

$$\left|f(\varphi,\theta)-\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}c_{n,m}S_{n,m}(\varphi,\theta)\right|\leqslant\frac{M\sqrt{2}}{\sqrt{2N+1}}, \tag{19}$$

其中 M 是连续函数 $|\triangle_s f(\varphi,\theta)|$ 在单位球面上的最大值.

证明 令 σ_N 表示 (19) 中的和, 令 p 是球面上任意一点. 可以证明 (参看习题 13) 尽管 $\sigma_N(p)$ 的值看上去可能依赖于北极的选取 (即球坐标的选取), 实际上不是这样. 因此, 为证明 $\sigma_0(p)$, $\sigma_1(p)$, $\sigma_2(p),\cdots$ 的收敛性, 可选 p 在北极的球坐标. 假设已作了这个选择, 我们只需证明 (19) 在极点 $\varphi=0$ 是有效的. 在点

p, 则有

$$\begin{aligned}\sigma_N(p) &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} c_{n,m}P_{n,m}(1)e^{im\theta} = \sum_{n=0}^{N} c_{n,0}\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)P_n(\cos\varphi)f(\varphi,\theta)\sin\varphi d\varphi d\theta\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}[P_0(\omega)+3P_1(\omega)+\cdots+(2N+1)P_N(\omega)]F(\omega)d\omega,\end{aligned}$$

其中 $F(\omega)=F(\cos\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\theta)d\theta$ 是 f 在纬度 $\varphi=\cos^{-1}\omega$ 上的平均. 在习题 9 中我们证明

$$P_0(\omega)+3P_1(\omega)+\cdots+(2N+1)P_N(\omega)=P_N'(\omega)+P_{N+1}'(\omega).$$

因此,

$$\begin{aligned}\sigma_N(p) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[P_N'(\omega)+P_{N+1}'(\omega)]F(\omega)d\omega\\ &= \frac{1}{2}[P_N(\omega)+P_{N+1}(\omega)]F(\omega)\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F'(\omega)[P_N(\omega)+P_{N+1}(\omega)]d\omega\\ &= F(1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F'(\omega)[P_N(\omega)+P_{N+1}(\omega)]d\omega, \qquad (20)\end{aligned}$$

其中用了事实 $P_n(1)=1$ 和 $P_n(-1)=(-1)^n$(参看习题 9). 因 $F(1)=f(p)$, 故有 (根据 (20) 和 Cauchy-Schwarz 不等式 $|\langle f,g\rangle|\leqslant\|f\|\|g\|$),

$$\begin{aligned}|f(p)-\sigma_N(p)| &= \frac{1}{2}|<F',P_N+P_{N+1}>|\leqslant\frac{1}{2}\|F'\|\sqrt{\langle P_N+P_{N+1},P_N+P_{N+1}\rangle}\\ &= \frac{1}{2}\|F'\|\sqrt{\frac{2}{2N+1}+\frac{2}{2N+3}}\leqslant\frac{\|F'\|}{\sqrt{2N+1}}, \qquad (21)\end{aligned}$$

其中 $\|F'\|^2=\int_{-1}^{1}F'(\omega)^2d\omega$ 以及由习题 10, $\|P_N\|^2=2/(2N+1)$. 接下来以 $M=\max|\triangle_s f(\varphi,\theta)|$ 来估计 $\|F'\|$. 因 $\frac{d\omega}{d\varphi}=-\sin\varphi$, 故由 Leibniz 法则得

$$\begin{aligned}-2\pi\sin^2\varphi F'(\varphi) &= \sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\int_0^{2\pi}f(\varphi,\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi}(\sin\varphi f_\varphi(\varphi,\theta))_\varphi d\varphi d\theta\\ &= \int_0^{\varphi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi f_\varphi)_\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}f_{\theta\theta})\sin\varphi d\theta d\varphi,\end{aligned}$$

其中, 根据 f_θ 的周期性, 我们用了 $\int_0^{2\pi} f_{\theta\theta}d\theta = 0$. 因此,

$$\sin^2\varphi|F'(\omega)| \leqslant M\int_0^\varphi \sin\varphi d\varphi = M(1-\cos\varphi).$$

对 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, 有 $\sin^2\varphi = (1-\cos^2\varphi) \geqslant 1-\cos\varphi$. 于是, $|F'(\omega)| \leqslant M$, $0 \leqslant \omega \leqslant 1$. 类似地, 上面以 $-\int_\varphi^\pi$ 替换 $\int_0^\varphi$, 得 $|F'(\omega)| \leqslant M$, $-1 \leqslant \omega \leqslant 0$. 从而有 $\int_{-1}^1 F'(\omega)^2 d\omega \leqslant 2M^2$, $\|F'\| \leqslant \sqrt{2}M$, 因此由 (21) 得 (19). □

定理 1′ 的证明 假设存在 $\triangle_s$ 具特征值 λ 的实值 C^2 特征函数 f. 如果该特征值不具形式 $n(n+1)$, 则

$$-(\lambda - n(n+1))\cdot\langle f, S_{n,m}\rangle = \langle \triangle_s f, S_{n,m}\rangle - \langle f, \triangle_s S_{n,m}\rangle = 0,$$

所以得 $\langle f, S_{n,m}\rangle = 0$. 因此, LS $f(\varphi,\theta) \equiv 0$, 且由于 f 是 C^2, 由定理 4, 则有 $f(\varphi,\theta) = \text{LS } f(\varphi,\theta) \equiv 0$. 如果 λ 具形式 $n(n+1)$, 则 f 属于特征值为 $n(n+1)$ 的特征空间, 仍然有 $f(\varphi,\theta) = \text{LS } f(\varphi,\theta)$, 此为 $S_{n,m}$, $m=-n,\cdots,n$ 的线性组合. 由于 f 是实值的, 故该线性组合的虚部必相互抵消, 表明 f 是以下实特征函数的线性组合:

$$P_n(\cos\varphi),\quad \cos(m\theta)P_{n,m}(\cos\varphi),\quad \sin(m\theta)P_{n,m}(\cos\varphi),\quad m=1,\cdots,n. \tag{22}$$

于是, $\triangle_s$ 的任一 C^2 特征函数必具有形如 $n(n+1)$ 的特征值, 且关于 $n(n+1)$ 的特征空间中的函数必是 (22) 中的函数的线性组合 (即, 该特征空间的维数是 $2n+1$). 从定理 2 已知 (22) 诸函数是 n 次调和多项式 (在单位球面上的) 限制. □

例子和应用

例 4 (球内的稳态温度) 求解以下球内 Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.}\quad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad \rho<2;\\ &\text{B.C.}\quad u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2,\quad \rho=2. \end{aligned} \tag{23}$$

解 先用 $\rho=2$ 的球坐标写出 $x^2+2y^2+3z^2$:

$$x^2+2y^2+3z^2 = 4\sin^2\varphi\cos^2\theta + 8\sin^2\varphi\sin^2\theta + 12\cos^2\varphi \equiv f(\varphi,\theta). \tag{24}$$

我们将把 $f(\varphi,\theta)$ 表示成球面调和函数的线性组合. 其次, 我们只需在具特征值 $n(n+1)$ 的每项前面插入因子 $(\rho/2)^n$, 然后这个结果将解答原问题 (为什么?). 通

过计算关于 Laplace 系数的积分 (18) 可计算 $f(\varphi,\theta)$ 的 Laplace 级数. 由于 (在 (24) 中) 关于 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的多项式因子的最高次数是 2, 故知 $c_{n,m}=0,\ n\geqslant 3$, 但仍还留有 9 个积分要计算. 然而, 利用半角公式 (例如, $\sin^2\theta=\frac{1}{2}[1-\cos(2\theta)]$) 我们来试图把 $f(\varphi,\theta)$ 写成 Laplace 级数的形式. 首先把 $f(\varphi,\theta)$ 写成关于 θ 的 Fourier 级数, 系数是 φ 的函数:

$$f(\varphi,\theta)=(6\sin^2\varphi+12\cos^2\varphi)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta)=(6\cos^2\varphi+6)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta),$$

其中我们已把第一项写成 $\omega=\cos\varphi$ 的多项式, 因要把该项表示为 Legendre 多项式的和. 由于 $P_2(\omega)=\frac{1}{2}(3\omega^2-1)$ 和 $P_0(\omega)=1$, 故有 $6\omega^2+6=(4P_2(\omega)+2)+6=4P_2(\omega)+8P_0(\omega)$. 还要把因子 $-2\sin^2\varphi$ 表示为伴随的 Legendre 函数的线性组合 $\sum a_nP_{n,2}(\omega)=\sin^2\varphi\sum a_nP_n''(\cos\omega)$. 因此, 需要 $\sum a_nP_n''(\omega)=-2$, 且显然除了 $n=2$ 之外 $a_n=0$, 这时有 $a_2P_2''(\omega)=a_2\cdot 3=-2$ 隐含 $a_2=-\frac{2}{3}$. 于是有以下 $f(\varphi,\theta)$ 的 Laplace 级数:

$$\begin{aligned}f(\varphi,\theta)&=8P_0(\cos\varphi)+\Big[4P_2(\cos\varphi)-\frac{2}{3}P_{2,2}(\cos\varphi)\cos(2\theta)\Big]\\&=8+[(6\cos^2\varphi-2)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta)].\end{aligned}$$

由于在方括号中的项是 $n=2$ 的球面调和函数, 故以 $(\rho/2)^2$ 乘该项, 得到解

$$U(\rho,\varphi,\theta)=8+[(6\cos^2\varphi-2)-2\sin^2\varphi\cos(2\theta)](\frac{\rho}{2})^2,$$

或

$$u(x,y,z)=8+\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x^2-y^2)=8-x^2+z^2. \tag{25}$$

作为验证, 注意到 $u(x,y,z)=8-x^2+z^2$ 显然是调和的, 且当 $x^2+y^2+z^2=4$ 时, 有 $u(x,y,z)=2(x^2+y^2+z^2)-x^2+z^2=x^2+2y^2+3z^2$, 所以 (25) 是问题的解. 实际上, 有空间中有界区域上调和函数的最大值最小值原理 (与第 6.4 节中二维形式的证明完全类似). 作为一个推论, 有界区域上 Dirichlet 问题的解是唯一的 (例如, (25) 是 (23) 的唯一解). □

注记　在例 4 中用的方法可用来求解任一球内的 Dirichlet 问题, 其中在边界球面上的函数是 n 次多项式, 记作 $p(x,y,z)$. 的确, 该解将是次数 $\leqslant n$ 的调和多项式 $h(x,y,z)$. 在球面上所有的点 (x,y,z) 有 $p(x,y,z)=h(x,y,z)$, 但在其他点通常不相等. □

例 5 (振动的气球) 令 $v(\varphi,\theta,t)$ 表示一平衡半径为 ρ_0 的振动的球形气球在点 (ρ_0,φ,θ) 处径向 (正的 ρ) 位移. 假设是均匀的, 可证明关于 (无阻尼的)v 的唯一的二阶方程具有形式 $v_{tt}=a^2\triangle_s v-\omega^2 v$, 其中 a 和 ω 为某常数. 求以下的形式解

$$\begin{array}{ll} \text{D.E.} & v_{tt}=a^2\triangle_s v-\omega^2 v, \quad 0\leqslant\varphi,\ \frac{\theta}{2}\leqslant\pi, \quad -\infty<t<\infty; \\ \text{I.C.} & v(\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta), \quad v_t(\varphi,\theta)=g(\varphi,\theta). \end{array} \tag{26}$$

解 由分离变量 $v=T(t)F(\varphi,\theta)$, 得

$$\frac{1}{a^2}(\frac{T''}{T}+\omega^2)=\frac{\triangle_s F}{F}=-\lambda.$$

因此, $F(\varphi,\theta)$ 必是具特征值 λ 的某个球面调和函数, 特征值必定具形式 $\lambda_n=n(n+1)$, 以及 $T(t)=c_1\cos(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t)+c_2\sin(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t)$. 于是, 形式上有

$$v(\varphi,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(a_{n,m}\cos(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t)+b_{n,m}\sin(\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}t))S_{n,m}(\varphi,\theta),$$

其中

$$a_{n,m}=\|S_{n,m}\|^{-2}\langle f,S_{n,m}\rangle \quad \text{和} \quad b_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2\lambda_n}}\|S_{n,m}\|^{-2}\langle g,S_{n,m}\rangle,$$

以及

$$\lambda_n=n(n+1), \quad S_{n,m}(\varphi,\theta)=e^{im\theta}P_{n,m}(\cos\varphi), \quad \|S_{n,m}\|^{-2}=\frac{(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!4\pi}.$$

如果初始位移和初始速度分布 f 和 g 是 C^2 的, 则 (根据定理 4) 在任一确定的实验误差之内可用它们的 Laplace 级数的部分和来逼近, 由此得到 D.E. 的 C^∞ 解, 该解在实验误差之内满足 I.C.. 我们把解的唯一性以及解对初始数据的连续依赖性的证明留给有兴趣的读者. □

例 6 (球上的热问题) 描述 Laplace 算子的所有特征函数, 它们在球 $\rho<\rho_0$ 的内部是 C^2 的, 且在边界球面 $\rho=\rho_0$ 上为零. 利用这些特征函数来形式求解

以下热问题

$$
\begin{aligned}
&\text{D.E.}\quad u_t = k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\quad x^2+y^2+z^2 \leqslant \rho_0^2,\quad t \geqslant 0;\\
&\text{B.C.}\quad U(\rho_0,\varphi,\theta,t)=0,\quad 0\leqslant \varphi,\ \tfrac{\theta}{2}\leqslant \pi;\\
&\text{I.C.}\quad U(\rho,\varphi,\theta,0)=f(\rho,\varphi,\theta),\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho_0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

解　由第 8.3 节的定理 1 得知, 如果 $R(\rho)f(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle$ 的特征函数, 则 $f(\varphi,\theta)$ 是具特征值 $n(n+1)$ 的球面调和函数, 且 $R(\rho)$ 满足**径向方程**

$$
(\rho^2R'(\rho))' + (c\rho^2 - n(n+1))R(\rho) = 0. \tag{28}
$$

对 $c=0$, 函数 $R(\rho)$ 必是 ρ^n 的倍数, 因另一个线性无关的解在 $\rho=0$ 处有奇异性. 然而, ρ^n 在 $\rho=\rho_0$ 处不为零, 因此必须取 $c\neq 0$. 当 $c=-b^2$ 时, 有 (参看下一子节中的定理 5) 通解 $R_n^-(b\rho)$, 其中 $R_n^-(\rho)=\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^-(\rho)]$, $R_0^-(\rho)=(ae^{\rho}+be^{-\rho})/\rho$ (参看第 8.3 节的 (14)). $R_n^-(b\rho)$ 在原点无奇异性的唯一形式是 $A\cdot\sinh(b\rho)/\rho$, 但它当 $\rho=\rho_0$ 时不等于 0, 除非 $A=0$. 当 $c=b^2$ 时, 有 (参看定理 5) 通解 $R_n^+(b\rho)$, 其中 $R_n^+(\rho)=\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^+(\rho)]$, $R_0^+(\rho)=A\cdot\sin(\rho+\delta)/\rho$. 因此如果 $R_0^+(\rho)$ 在 $\rho=0$ (即 $\delta=0$) 处无奇异性, 则 $R_0^+(\rho)$ 是以下的常数倍

$$
j_0(\rho)\equiv\frac{\sin\rho}{\rho}=1-\frac{\rho^2}{3!}+\frac{\rho^4}{5!}-\cdots, \tag{29}
$$

此为收敛半径为无穷的幂级数. 当算子 $\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}$ 逐项用到形如 $c_0+c_2\rho^2+c_4\rho^4+\cdots$ 的级数时 (只涉及到 ρ 的偶数幂, 就像 (29) 中的级数), 第一项消失, 其他项中的指数减少 2, 得到另一个这种形式的级数. 对级数 (29) 反复应用该事实, 得 (28) 具 $c=+b^2$ 的某些非奇异的解是以下的常数倍

$$
j_n(b\rho),\quad \text{其中}\quad j_n(\rho)\equiv(-1)^n\rho^n\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^n[j_0(\rho)],\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{30}
$$

而且 ρ^n 的因子确保 $j_n(\rho)$ 前 $n-1$ 的导数在 $\rho=0$ 处为零. 如果算子 $\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n$ 作用于形如 $c_{-1}\rho^{-1}+c_0\rho^0+c_1\rho^1+\cdots$ 的级数上, $c_{-1}\neq 0$ (如级数 $\cos\rho/\rho$ 或 $e^{\pm\rho}/\rho$), 则结果总是有奇异性 (为什么?). 因此, $j_n(\rho)$ 的常数倍是 (28) 唯一的无奇异性的解. 由于 B.C., 需对 b 选取, 记作 $b_{n,q}(q=1,2,3,\cdots)$, 使得 $j_n(b_{n,q}\rho_0)=0$. 令 $\beta_{n,q}$ 表示满足 $j_n(\beta_{n,q})=0$ 的第 q 个正实数 (即 $j_n(\beta)$ 的图像穿过正 β-轴的第 q 个位置, 或 j_n 的第 q 个正零点). 则

$$b_{n,q}=\frac{\beta_{n,q}}{\rho_0},\quad 因\quad j_n(b_{n,q}\rho_0)=j_n(\beta_{n,q})=0,\quad q=1,2,3,\cdots. \tag{31}$$

对 $n=0$, 有 $\beta_{0,q}=q\pi$. 当 $n\geqslant 1$ 时, 存在无穷多的 $b_{n,q}$(参看下面的 (32) 和第 4.4 节的例 8). 然而, 对 $n\geqslant 1$, 要确定 $\beta_{n,q}$ 更困难. 例如,

$$j_1(\rho)=-\frac{d}{d\rho}(\frac{\sin\rho}{\rho})=\frac{1}{\rho^2}(\sin\rho-\rho\cos\rho),$$

$\beta_{1,q}$ 是方程 $\rho=\tan\rho$ 的正解, 它可在任意精度下得到数值解, 比如用 Newton-Raphson 方法. 然而, 对 n 以及不太大的 q, 有数表提供了 $b_{n,q}$ 的一些值, 并对任意的 n 和大的 q 有获得 $b_{n,q}$ 近似值的公式. 函数 $j_n(\rho)$ 称为**球 Bessel 函数**, 且它们与**Bessel 函数** $J_\nu(\rho)$ 通过以下相联系

$$j_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{32}$$

在图 2 中, 我们有对 $n=0,1$ 和 2 的 $j_n(\rho)$ 的图像.

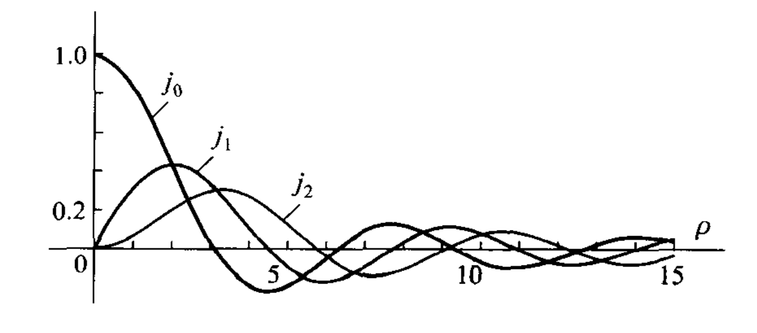


图 2

△ 在球面 $\rho=\rho_0$ 上等于零的特征函数是下列函数族成员的常数倍 (其中 $n=0,1,2,\cdots$ 和 $m=-n,-n+1,\cdots,n$):

$$E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta)\equiv j_n(b_{n,q}\rho)S_{n,m}(\varphi,\theta)=j_n(b_{n,q}\rho)e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi). \quad (33)$$

因 $E_{n,q,m}$ 的特征值是 $b_{n,q}^2$, 故满足 B.C. 的 D.E. 的乘积解可通过以依赖于时间的因子 $\exp(-b_{n,q}^2kt)$ 乘 $E_{n,q,m}$ 获得:

$$U_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta,t)=\exp(-b_{n,q}^2kt)E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta). \quad (34)$$

为得到 (27) 的形式解, 取 $U_{n,q,m}$ 无限叠加:

$$U(\rho,\varphi,\theta,t)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-b_{n,q}^2kt)\sum_{m=-n}^{n}c_{n,q,m}E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta). \quad (35)$$

置 $t=0$, 并令结果与 I.C. 中的 $f(\rho,\varphi,\theta)$① 相等, 得到关系式

$$f(\rho,\varphi,\theta)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=-m}^{n}c_{n,q,m}E_{n,q,m}(\rho,\varphi,\theta). \quad (36)$$

如果 (36) 中的项除了有限项之外都是零, 则 (35) 是问题 (27) 的精确解. 作为应用来说我们想知道怎样的 (或如果) 一个充分好的函数 $f(\rho,\varphi,\theta)$, 在 $\rho=\rho_0$ 上为零, 在某个确定的误差之内可由这种有限和来逼近. 如果是这样, 则最大值原理可用来证明由这种逼近所获得的解逼近精确的解 (如果精确解存在的话), 可以证明球上热方程解的这种最大值原理. 在习题 15 中, 相对于球上的 $\langle f,g\rangle$(即, $f\bar{g}$ 在球上的积分) 我们证明了 $E_{n,q,m}$ 的正交性. 由通常形式运用正交性得到的系数 $c_{n,q,m}$ 的表示式是

$$c_{n,q,m}=\|E_{n,q,m}\|^{-2}\langle f,E_{n,q,m}\rangle, \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned}\|E_{n,q,m}\|^2&=\langle E_{n,q,m},E_{n,q,m}\rangle=\langle S_{n,m},S_{n,m}\rangle\int_0^{\infty}(j_n(b_{n,q}\rho))^2\rho^2d\rho\\&=\frac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\frac{1}{2}\rho_0^3(j_n'(\beta_{n,q}))^2. \end{aligned}\quad (38)$$

①原文误作 $f(\varphi,\theta)$.——译者

其中利用了 (13) 来得到 $\|S_{n,m}\|^2$(关于该积分的计算, 参看第 8.5 节的习题 4). 关于特征函数展开一致收敛的推论性结果隐含: 如果 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 在球 $\rho \leqslant \rho_0$ 上是 C^2 的, 且在球面 $\rho=\rho_0$ 上为零, 则级数 (36) 一致收敛到 $f(\rho,\varphi,\theta)$. 就如我们已经看到的, 关于在一个确定的误差之内逼近 f 的项数的一般估计通常是很保守的. 而且, 一个积分比较检验典型地至少需要对系数 $c_{n,q,m}$ 的行为的一个粗略的认识, 这种行为可能不易确定. 因此, 实际上只是在某个方便的项数处截取级数, 并根据函数 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 来检验截取的级数, 希望没有更多的系数需要计算. □

由 Cauchy-Riemann 算子生成的特征函数

下面我们来导出空间上 Laplace 算子所有乘积特征函数 $R(\rho)S(\varphi,\theta)$ 的公式. 特别, 推导了关于非奇异伴随的 Legendre 函数的公式 (11) 以及第 8.3 节关于函数 $R_n^{\pm}$ 的公式 (15). 这种生成所有期望的解的非平常的算子定义如下:

定义 Cauchy-Riemann 算子 $\partial_x + i\partial_y$ 是一阶微分算子, 它把每个 C^1 复值函数 $u(x,y,z)+iv(x,y,z)$ 赋值为函数

$$(\partial_x + i\partial_y)(u+iv) = (u_x - v_y) + i(u_y + v_x) \quad (\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}). \tag{39}$$

注记 在函数 $f=u+iv$ 只依赖于 (x,y) 的情形下, 由 (39) 可见条件 $(\partial_x + i\partial_y)f=0$ 与 Cauchy-Riemann 方程组相同, Cauchy-Riemann 方程组确保 f 是 $x+iy$ 的复解析函数. Cauchy-Riemann 算子在 $(\partial_x + i\partial y)\overline{(\partial_x + i\partial y)} = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 的意义下, 可视为是二维 Laplace 算子的平方根. 存在对任意维数 Laplace 算子的这种平方根, 要利用矩阵代数来构造. 物理学家 Paul Dirac (1902—1984, 他与 Schrödinger 分享了 1933 年度的 Nobel 物理学奖), 发现了关于电子更精确的波方程不是 Schrödinger 方程, 而是 Dirac 方程, Dirac 方程涉及波算子 $\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_y^2-\partial_z^2$ 平方根, 即 **Dirac 算子** $\gamma_0\partial_t + \gamma_1\partial_x + \gamma_2\partial_y + \gamma_3\partial_z$, 它的系数是某个 4×4 矩阵, 可在许多关于量子场的书籍中找到 (例如, [Bjorken 和 Drell]). □

命题 1 (极坐标的 Cauchy-Riemann 算子)　令 $g(x,y)$ 是挖去一点的平面 $\mathbf{R}^2-(0,0)$ 上的 C^2 函数, 并令在极坐标下 $g(x,y)=G(r,\theta)$. 则

$$(\partial_x+i\partial_y)[g]=e^{i\theta}(\partial_r+\frac{i}{r}\partial_\theta)[G]=e^{i\theta}(G_r+\frac{i}{r}G_\theta). \tag{40}$$

而且, 如果 $G_\theta=0$(即 G 只依赖于 r), 则

$$(\partial_x+i\partial_y)^m[g]=e^{im\theta}r^m(\frac{1}{r}\frac{d}{dr})^m[G],\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{41}$$

证明　在 (40) 的右边以等价的 $g_xx_r+g_yy_r=g_x\cos\theta+g_y\sin\theta$ 代替 G_r 以及以 $g_xx_\theta+g_yy_\theta=-g_xr\sin\theta+g_yr\cos\theta$ 代替 G_θ. 则对结果的代数简化得到 (g_x+ig_y), (40) 得证. 由 (40) 得知: 当 $m=1$ 时 (41) 成立. 由归纳法, 只要证明: 如果 (41) 对 $m=k$ 成立, 则 (41) 对 $m=k+1$ 成立. 然而,

$$\begin{aligned}(\partial_x+i\partial_y)^{k+1}[G]&=e^{i\theta}(\partial_r+\frac{i}{r}\partial_\theta)\left[e^{ik\theta}r^k\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]\right]\\&=e^{i(k+1)\theta}\left[kr^{k-1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]+r^k\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]\right)+\right.\\&\qquad\left.ki^2r^{k-1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G]\right]\\&=e^{i(k+1)\theta}r^{k+1}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k[G],\end{aligned}$$

这证明了 $m=k+1$ 的结果, 正如所期望的.　□

命题 2　如果 $F(\rho)$ 是只依赖于 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的 C^∞ 函数, 则

$$(\partial_x+i\partial_y)^m[F(\rho)]=e^{im\theta}(\rho\sin\varphi)^m(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^m[F(\rho)],\quad m=0,1,2,\cdots \tag{42}$$

证明 固定 z, 考虑函数 $g(r) = F(\sqrt{r^2+z^2})$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. 对 $\rho = \sqrt{r^2+z^2}$, 有 $\frac{1}{r}\partial_r g = \frac{1}{r}F'(\rho)\rho_r = \frac{1}{r}F'(\rho)\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}2r = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}F$, 重复这种计算 m 次, 有 $(\frac{1}{r}\partial_r)^m[g] = (\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^m[F]$. 因此, 对每个固定的 z, 对函数 $g(r)$ 应用 (41), 得到 (42). □

定理 5 对 $n=0$ 和 $c=\pm 1$, 令 $R_0^{\pm}(\rho)$ 是以下方程的非零解:

$$\rho^2 R''(\rho) + 2\rho R'(\rho) + (c\rho^2 - n(n+1))R(\rho) = 0. \tag{43}$$

(参看第 8.3 节中的 (14)).则, 对$n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$(\partial_x + i\partial_y)^n[R_0^{\pm}(\rho)] = e^{in\theta}\sin^n(\varphi)\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^{\pm}(\rho)], \tag{44}$$

(44) 是 $\triangle$ 具特征值 ± 1 的特征函数. 而且, 对 $c = \pm 1$,

$$R_n^{\pm}(\rho) \equiv \rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho})^n[R_0^{\pm}(\rho)], \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{45}$$

满足 (43), 且 $R_n^{\pm}(b\rho)$ 满足 $c = \pm b^2$ 的 (43).

证明 方程从 (42) 立刻得到. 由第 8.3 节的定理 1 得知 $\triangle[R_0^{\pm}(\rho)] \pm R_0^{\pm}(\rho) = 0$. 因关于 x, y 和 z 的求导次序没有关系 (即, 算子 ∂_x, ∂_y 和 ∂_z 是可交换的), 故有

$$\triangle\big((\partial_x + i\partial_y)^n[R_0^{\pm}(\rho)]\big) = (\partial_x + i\partial_y)^n\triangle[R_0^{\pm}(\rho)] = \pm(\partial_x + i\partial_y)^n[R_0^{\pm}(\rho)],$$

这说明 (44) 是 $\triangle$ 具特征值 ± 1 的特征函数 ((44) 不恒为零的事实可由考虑例 6 中的幂级数得到). 由第 8.3 节的定理 1, 得知 $e^{in\theta}\sin^n\varphi$ 是球面调和函数 (它具有特征值 $n(n+1)$), 因它与以下的成比例

$$S_{n,n}(\varphi, \theta) = e^{in\theta}\sin^n\varphi P_n^{(n)}(\cos\varphi).$$

而且, 由第 8.3 节的定理 1, $R_n^{\pm}(\rho)$ 满足 $c = \pm 1$ 的 (43), $R_n^{\pm}(b\rho)$ 满足 $c = \pm b^2$ 的 (43)(参看练习 8.3 的习题 4). □

定理 6 令

$$u_c(x,y,z) \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2}} \equiv U_c(\rho,\varphi,\theta)$$

是标准调和位势在 z 方向平移 c 个单位 (参看例 3). 则对 $m=0,1,2,\cdots$, 有

$$(\partial_x+i\partial_y)^m u_c = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}c^{n-m}. \tag{46}$$

此外, $\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 满足伴随的 **Legendre** 方程 (5), 且对 $n \geqslant m$, 有

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{(n-m)!}(\partial_x+i\partial_y)^m\partial_z^{n-m}\left(\frac{1}{\rho}\right) &= e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}\\ &= S_{n,m}(\varphi,\theta)\rho^{-n-1}.\end{aligned} \tag{47}$$

证明 令 T_c 是平移算子, 它把每个函数 $f(x,y,z)$ 赋值为新函数 $f(x,y,z-c)$ (即, $T_c[f](x,y,z)=f(x,y,z-c)$). 该算子与诸算子 ∂_x, ∂_y 和 ∂_z 在 $\partial_x(T_c[f]) = T_c[\partial_x f]$ (对 ∂_y 和 ∂_z 类似) 意义下是可交换的 (即是先平移然后求导还是先求导再平移所得的结果相同). 因此,

$$(\partial_x+i\partial_y)^m[u_c] = (\partial_x+i\partial_y)^m[T_c[u]] = T_c[(\partial_x+i\partial_y)^m[u]]. \tag{48}$$

由 (42), 有 (对 $m>0$)

$$\begin{aligned}(\partial_x+i\partial_y)^m\left[\frac{1}{\rho}\right] &= e^{im\theta}\sin^m\varphi\rho^m\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^m\left[\frac{1}{\rho}\right] = \cdots\\ &= (-1)^m 1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m-1)\rho^{-m-1}e^{im\theta}\sin^m\varphi.\end{aligned} \tag{49}$$

为估算 (46), 把 T_c 作用到 (49). 我们有 $T_c[\rho] = \sqrt{\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2}$ 和 $T_c[\sin\varphi] = T_c[\frac{r}{\rho}] = \frac{r}{T_c[\rho]} = \frac{\rho\sin\varphi}{T_c[\rho]}$, 因 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 T_c 下是不变的. 于是由 (48) 和 (49), 以及对 $m=0$ 情形的由公式 (9) 得出的, 有

$$\begin{aligned}&(\partial_x+i\partial_y)^m[u_c]\\ &= (-1)^m 1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m-1)e^{im\theta}\sin^m\varphi\left[\frac{\rho^m}{(\rho^2-2c\rho\cos\varphi+c^2)^{m+\frac{1}{2}}}\right].\end{aligned} \tag{50}$$

方括号内的表示式本质上可通过如下反复对 $\omega=\cos\varphi$ 求导从 $(\rho^2-2c\rho\omega+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 获得:

$$\frac{d^m}{d\omega^m}[\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-1)\rho^m c^m(\rho^2-2\rho c\omega+c^2)^{-m-\frac{1}{2}}. \quad (51)$$

因此, 由 (50),(51) 和 (9), 得

$$\begin{aligned}(\partial_x+i\partial_y)^m[u_c] &= (-1)^m c^{-m}\frac{d^m}{d\omega^m}([\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}\sin^m\varphi e^{im\theta}\\ &= (-1)^m c^{-m}\frac{d^m}{d\omega^m}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\omega)\rho^{-n-1}c^n\Big)\sin^m\varphi e^{im\theta}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\big((-1)^m e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}\big)c^{n-m}. \end{aligned}\quad (52)$$

不求助于函数级数逐项求导的一致收敛定理可以证明该求和下求导是正当的. 的确, 对 $\rho>0$, $f(c)=\frac{d^m}{d\omega^m}\big([\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}\big)$ 关于 c 有正当的幂级数展开, 因求导的次序没有关系, $f(c)$ 的 Taylor 系数幸好可先通过对 $[\rho^2-2\rho c\omega+c^2]^{-\frac{1}{2}}$ 关于 c 求导, 然后对 ω 求导 (求 m 次) 来计算. 结果 (47) 立刻从以下事实得到: (52) 中乘 c^{n-m} 的表示式必是

$$\frac{1}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}}{dc^{n-m}}\big((\partial_x+i\partial_y)^m[u_c]\big)\Big|_{c=0}=\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}(\partial_x+i\partial_y)^m\partial_z^{n-m}[u].$$

由于 (47) 的左边是调和的, 故知右边的函数 $S_{n,m}(\varphi,\theta)$ 是球面调和函数, 于是 $\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)$ 满足伴随的 Legendre 方程 (5). □

概要 8.4

1. 球面调和函数: 根据定理 1, 每个 n 次齐次调和多项式 $u(x,y,z)$ 可写成形式 $U(\rho,\varphi,\theta)=\rho^n f(\varphi,\theta)$, 其中 $f(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle_s$ 具特征值 $n(n+1)$ 的特征函数 (即, 球面调和函数). 反之, 由定理 1′, 每个 (C^2) 球面调和函数 $f(\varphi,\theta)$, 存在整数 $n\geqslant 0$, 使得 $\rho^n f(\varphi,\theta)$ 以 x,y 和 z 表示时是调和多项式. $f(\varphi,\theta)$ 的特征值是 $n(n+1)$, 且有 $2n+1$ 个线性无关的具特征值 $n(n+1)$ 的球面调和函数 (即 $\triangle_s$ 对应该特征值的特征空间具维数 $2n+1$). 这些线性无关的球面调和函数由以下实值函数给出

$$P_n(\cos\varphi),\quad P_{n,m}(\cos\varphi)\cos(m\theta)\quad 和\quad P_{n,m}(\cos\varphi)\sin(m\theta),\quad m=1,\cdots,n,$$

其中 $P_n(\cos\varphi)$ 和 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 由下面第 2 条款给出. 作为另一种表示法, 如果允许复系数, 则特征值为 $n(n+1)$ 的球面调和函数是以下的线性组合

$$S_{n,m}(\varphi,\theta)\equiv e^{im\theta}P_{n,m}(\cos\theta)=e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi),\quad m=-n,\cdots,n.$$

2. Legendre 方程: 当利用分离变量来求方程 $\triangle_s f=-n(n+1)f$ 的乘积解 $f(\varphi,\theta)=L(\varphi)M(\theta)$ 时, 导致的常微是 $M''(\theta)+m^2M(\theta)=0$ 和

$$\sin\varphi[\sin\varphi L'(\varphi)]'+[n(n+1)\sin^2\varphi-m^2]L(\varphi)=0, \tag{S1}$$

当 $m=0$ 它称为 Legendre 方程, 对非零整数 m 称为伴随的 Legendre 方程. 记 $\omega=\cos\varphi$, n 阶 Legendre 多项式是 S1 的解, 由以下给出

$$P_n(\omega)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(2n-2k)!(-1)^k}{k!(n-k)!(n-2k)!}\omega^{n-2k}.$$

前五个 Legendre 多项式是

$$P_0(\omega)=1,\quad P_1(\omega)=\omega,\quad P_2(\omega)=\frac{1}{2}(3\omega^2-1),\quad P_3(w)=\frac{1}{2}(5\omega^3-3\omega),$$
$$P_4(\omega)=\frac{1}{8}(35\omega^4-30\omega^2+3),\quad P_5(\omega)=\frac{1}{6}(63\omega^5-70\omega^3+15\omega).$$

对任意整数 m, (S1) 在球面上是 C^1 的唯一解是以下的常数倍

$$P_{n,m}(\cos\varphi)=P_{n,m}(\omega)\equiv(1-\omega^2)^{m/2}\frac{d^m}{d\omega^m}(P_n(\omega))=\sin^m\varphi P^{(m)}(\cos\varphi),\quad m>0,$$

和

$$P_{n,m}(\omega)\equiv P_{n,-m}(\omega),\quad m<0.$$

3. 正交性: 对 S 上的连续复值函数 $f(\varphi,\theta)$ 和 $g(\varphi,\theta)$, 定义

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)\overline{g(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta.$$

如果 f 和 g 是 C^2 的, 则关于 φ 和 θ 分部积分, 得

$$\text{单位球面上的 Green 公式:}\quad \langle f,\triangle_s g\rangle=\overline{\langle g,\triangle_s f\rangle}=\langle\triangle_s f,g\rangle,$$

在证明以下关于球面调和函数的正交性关系中用到该公式:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_{n,m}(\varphi,\theta)\overline{S_{n',m'}(\varphi,\theta)}\sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$=\begin{cases}0, & \text{如果 } m\neq m' \text{ 或 } n\neq n',\\ \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{4\pi}{2n+1}, & \text{如果 } m=m' \text{ 和 } n=n'.\end{cases}$$

4. 球面上函数的 Laplace 级数: 定义在球面上函数的 Laplace 级数是

$$\text{LS } f(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} c_{n,m}S_{n,m}(\varphi,\theta),$$

其中

$$\begin{aligned}c_{n,m} &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi,\theta)e^{-im\theta}P_{n,m}(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta\\ &= \|S_{n,m}\|^{-1}\langle f,S_{n,m}\rangle,\end{aligned}$$

$P_{n,m}$ 和 $S_{n,m}$ 由上述的第一和第二条款定义, 如果这些积分存在的话. 如果 f 是 C^2 的, 则 Laplace 级数 LS f 一致收敛到 f 由定理 4 得到保证.

5. Cauchy-Riemann 算子: Cauchy-Riemann 算子 $\partial_x+i\partial_y$ 是微分算子, 它把每个 C^1 复值函数 $u(x,y,z)+iv(x,y,z)$ 赋值为函数

$$(\partial_x+i\partial_y)(u+iv)=(u_x-v_y)+i(u_y+v_x).$$

该算子经由以下公式生成所有球面调和函数 (其中 $0\leqslant m<n$)

$$\frac{(-1)^n}{(n-m)!}(\partial_x+i\partial_y)^m\partial_z^{n-m}\left(\frac{1}{\rho}\right)=e^{im\theta}\sin^m\varphi P_n^{(m)}(\cos\varphi)\rho^{-n-1}=S_{n,m}(\varphi,\theta)\rho^{-n-1},$$

该公式表明函数 $\sin^m\varphi P^{(m)}(\cos\varphi)$ 必满足伴随的 Legendre 方程 (参看定理 6). 而且该算子还用于从函数 $R_0^{\pm}(\rho)$ 获得函数 $R_n^{\pm}(\rho)$(参看定理 5).

练习 8.4

1. 选 (2) 中诸函数 $f(\varphi,\theta)$ 的一个函数并直接计算它是 $\triangle_s$ 具特征值 6 的特征函数.
2. 表述空间的一个旋转或旋转列, 使得
   (a) 把 x^2-y^2 变成 $2xy$, (b) 把 $2xy$ 变成 $2zx$,
   (c) 把 x^2-y^2 变成 y^2-x^2, (d) 把 $2xy$ 变成 y^2-z^2.

3. 对 $n=0,1,2,3$, 验证

(a) Legendre 多项式 $P_n(\omega)$(参看 (7)) 满足 $m=0$ 的 Legendre 微分方程 (6), 且

(b) 函数 $P_n(\cos\varphi)$ 满足 (5).

4. (a) 求关于 x,y 和 z 的 4 次调和多项式, 使得当它限制在球面 $\rho=1$ 上时, 产生的球面调和函数与 θ 无关 (参看例 2).

(b) 如果一球面调和函数与 φ 无关, 则它必为常数吗? 请解释.

5. 对 $n=2$ 以及 $m=1$ 和 2, 验证 (11) 中的 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 满足伴随的 Legendre 方程 (5).

6. (a) 把源于二次多项式的球面调和函数 (2) 表示为以下球面调和函数的线性组合

$$S_{2,m}(\varphi,\theta)=e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_2^{(|m|)}(\cos\varphi)\quad(-2\leqslant m\leqslant 2).$$

(b) 把 $\rho^2S_{2,m}(\varphi,\theta)$ $(-2\leqslant m\leqslant 2)$ 的实部和虚部写成 x,y 和 z 的调和二次多项式.

7. 找出 7 个次数为 3 的调和多项式 $p(x,y,z)$, 它们中没有一个是其他的线性组合. 能找出 8 个吗? 为什么不能?

8. 证明伴随的 Legendre 方程 (5) 在 $[0,\pi]$ 上是 C^2 的任一解必是解 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 的常数倍.

提示 考虑两个解的 Wronski 行列式 $W(\varphi)\equiv y_1(\varphi)y_2'(\varphi)-y_1'(\varphi)y_2(\varphi)$, 并利用事实 (参看第 1.1 节的习题 20): $W(\varphi)=C\exp(-\int\cos\varphi/\sin\varphi d\varphi)=C/\sin\varphi$. 因此, 至少有两个线性无关的解在极线 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$ 上不是 C^1 的 (为什么?).

9. 一函数 $G(\omega,c)$ 称为是函数列 $f_0(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega),\cdots$ 的生成函数, 如果 $G(\omega,c)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\omega)c^n$, $|c|<\epsilon$, 其中 ϵ 是某个正常数.

(a) 利用例 3 证明 $L(\omega,c)\equiv(1-2c\omega+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 是 Legendre 多项式函数列 $P_0(\omega)$, $P_1(\omega)$, $P_2(\omega),\cdots$ 的生成函数.

(b) 通过注意到 $L(1,c)=(1-c)^{-1}=1+c+c^2+\cdots(|c|<1)$, 推导 $P_n(1)=1$. 类似地推导 $P_n(-1)=(-1)^n$.

(c) 利用公式 $L(\omega,c)=(1-2c\omega+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 证明 $2c^2L_c+cL=(1-c^2)L_\omega$. 通过把两边写成幂级数然后令 c 的同次幂相等, 推断对 $n\geqslant 1$, 有 $(2n+1)P_n(\omega)=P_{n+1}'(\omega)-P_{n-1}'(\omega)$. 利用该结果得到事实 (在定理 4 的证明中用到): $P_0(\omega)+3P_1(\omega)+\cdots+(2n+1)P_n(\omega)=P_{n+1}'(\omega)+P_n'(\omega)$.

(d) 通过回顾定理 6 的证明, 对固定的正整数 m, 求伴随的 Legendre 函数列 $P_{0,m}(\omega)$, $P_{1,m}(\omega)$, $P_{2,m}(\omega),\cdots$ 的一个生成函数.

10. (a) 利用定理 3 中的结果 (13), 当 $m=m'=0$ 和 $n\neq n'$ 时, 证明 $\int_{-1}^{1}P_n(\omega)P_{n'}(\omega)d\omega=0$ (即, Legendre 多项式在 $[-1,1]$ 上是正交的).

(b) 利用 (a) 部分的结果以及习题 9(a) 推导

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\omega}{1-2\omega c+c^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} P_n(\omega)^2 d\omega c^{2n}. \qquad (*)$$

(c) 通过计算 (b) 部分中的积分并把结果展成关于 c 的幂级数, 比较 (*) 中的系数, 导出 $\int_{-1}^{1} P_n(\omega)^2 d\omega = \frac{2}{2n+1}$. 为什么该结果向我们提供了 $m = m' = 0$ 和 $n = n'$ 情形的正交性关系 (13)?

(d) 证明

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_{n,m}(\omega)^2 d\omega &= \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(\omega)\big((1-\omega^2)^m P_n^{(m)}(\omega)\big)d\omega \\ &= \cdots(\text{经 } m \text{ 次分部积分})\cdots = \int_{-1}^{1} P_n(\omega)Q_n(\omega)d\omega,\end{aligned}$$

其中 $Q_n(\omega) = (-1)^m \frac{d^m}{d\omega^m}\big((1-\omega^2)^m P_n^{(m)}(\omega)\big)$ 是最高项为 $\frac{(n+m)!}{(n-m)!}a_n\omega^n$ 的 n 次多项式, a_n 是 $P_n(\omega)$ 中 ω^n 的系数.

(e) 解释为什么任意 k 次多项式可写成次数 $\leqslant k$ 的 Legendre 多项式的线性组合. 利用该事实和 (d) 部分推断

$$Q_n(\omega) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}P_n(\omega) + c_{n-1}P_{n-1}(\omega) + \cdots + c_1P_1(\omega) + c_0P_0(\omega),$$

$c_0, \cdots, c_{n-1}$ 是常数.

(f) 利用 (a),(c),(d) 和 (e) 部分证明: 对 $0 \leqslant m \leqslant n$, $\int_{-1}^{1} P_{n,m}(\omega)^2 d\omega = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}$ 以及关系 (13) 成立.

11. (a) 求在球 $\rho < 1$ 上 Laplace 方程 $\triangle u = 0$ 的一个解 $u(x,y,z)$, 使得在球面 $\rho = 1$ 上有 $u(x,y,z) = x + y^2 + z^3$.

(b) 求在该球外 $\triangle u = 0$ 的仍然满足 (a) 部分边界条件的一个解, 且当 $\rho \to \infty$ 时解趋于零.

12. 令 $f(\varphi,\theta)$ 是 $\triangle_s$ 具特征值 $n(n+1)$ 的特征函数.

(a) 令

$$f_m(\varphi,\theta) \equiv e^{im\theta}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\omega)e^{-im\omega}d\omega.$$

证明如果 $f(\varphi,\theta)$ 足够光滑使得可在积分号下求导, 则 $f_m(\varphi,\theta)$ 也满足 $\triangle_s f_m = -n(n+1)f_m$.

(b) 定义 $|\nabla f_m|^2 \equiv \nabla f_m \cdot \overline{\nabla f_m}$, 证明

$$|\nabla f_m|^2 \geqslant \frac{1}{\sin^2\varphi}\Big|\frac{\partial}{\partial\theta}f_m\Big|^2 = \frac{m^2}{\sin^2\varphi}|f_m|^2 \geqslant m^2|f_m|^2.$$

(c) 利用 (a),(b) 和 $\int_S \triangle_s f_m \overline{f_m} dA = -\int_S |\nabla f_m|^2 dA$, 证明: 如果 $|m| > n$, 则 $f_m = 0$.
(d) 由 (c) 和习题 8 推断 f 必是标准球面调和函数

$$S_{n,m}(\varphi,\theta) \equiv e^{im\theta} \sin^{|m|} \varphi P_n^{(|m|)}(\cos\varphi), \quad m = -n, \cdots, n$$

的线性组合.
(e) 由 (d) 推断任意关于 (x,y,z) 的 n 次调和多项式必是由 $(12')$ 通过乘以 ρ^n 得到的调和多项式的线性组合.

13. 令 H_n 表示所有限制在球面 $\rho = 1$ 上关于 x, y 和 z 的 n 次齐次调和多项式 (连同零函数) 的集合. 设 F 是该球面上的连续函数. 在以下部分我们证明: 存在 (唯一的)H_n 中的 h, 使得对任意 H_n 中其他的 k, $\|F-h\|^2 \equiv \langle F-h, F-h\rangle \equiv \int_S (F-h)\overline{(F-h)} dA$ 小于 $\|F-k\|$. 注意到 h 具有这样的特征: 它与球坐标系的选取无关. 将证明 $h = h_n \equiv \sum_{m=-n}^{n} c_{n,m} S_{n,m}$, 其中 $c_{n,m} \equiv \|S_{n,m}\|^{-2} \langle F, S_{n,m}\rangle$. 因此, 虽然在该和中的项会依赖于球坐标的选取, 但整个和与球坐标的选取无关.
(a) 令 k 属于 H_n. 由习题 12(e) 得知, 对某些常数 $a_{-n}, \cdots, a_n$, $k = \sum_{m=-n}^{n} a_m S_{n,m}$ (为什么?). 证明 $\langle h_n - k, F - h_n\rangle = 0$.
(b) 证明

$$\|F-k\|^2 = \langle (F-h_n)+(h_n-k), (F-h_n)+(h_n-k)\rangle = \|F-h_n\|^2 + \|h_n-k\|^2,$$

其中最后的等式是 (a) 部分的结果.
(c) 推断: 除非 $k = h_n$ (即, $h = h_n$), 有 $\|F-k\|^2 > \|F-h_n\|^2$.
(d) 证明 (c) 隐含定理 4 的证明中的 σ_N 如所宣称的, 确实不依赖于球坐标系北极的选取.

提示 $\sigma_N = \sum_{n=0}^{N} h_n$.

14. 令 σ_N 是定理 4 中的 (19) 中的二重和. 利用 (19) 证明当 $N \to \infty$ 时 $\|f - \sigma_N\|^2 \to 0$, 利用该结果证明 Parseval 等式

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} |c_{n,m}|^2.$$

提示 证明 $\|f-\sigma_N\|^2 = \|f\|^2 - \langle f, \sigma_N\rangle - \langle \sigma_N, f\rangle + \|\sigma_N\|^2 = \|f\|^2 - \|\sigma_N\|^2$.

15. (a) 令 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 和 $g(\rho,\varphi,\theta)$ 是球 $\rho \leqslant \rho_0$ 上的 C^2 函数, f 和 g 在边界上为零. 令 $\langle f, g\rangle$ 表示 fg(或 $f\bar{g}$, 如果 f 和 g 允许是复数) 在球上关于体元素 $\rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$ 的积分. 证明 Green 公式 $\langle \triangle f, g\rangle = \langle f, \triangle g\rangle$.

提示 如果写成 (参看第 8.3 节的命题 1)$\triangle u = \rho^{-2}(\rho^2 U_\rho)_\rho + \rho^{-2}\triangle_s U$, 并利用单位球面上的 Green 公式 $\langle \triangle_s F, G\rangle = \langle F, \triangle_s G\rangle$(参看 (16)) 这个计算是很容易的.

(b) 令 $E_{n,q,m}$ 是由 (33) 定义的特征函数. 由 (a) 部分推断

$$\langle E_{n,q,m}, E_{n',q',m'}\rangle = 0 \quad \text{如果} \quad n \neq n',\ q \neq q' \quad \text{或} \quad m \neq m'.$$

提示 我们知道如果 $n \neq n'$ 或 $m \neq m'$, 该结果成立 (为什么?). 因此, 假设 $n = n'$, $m = m'$ 和 $q \neq q'$, 并利用 $\beta_{n,q} \neq \beta_{n,q'}$(参看 (31)). 于是, 我们避免了可能性: 对 $n \neq n'$ 和 $q \neq q'$, $\beta_{n,q} = \beta_{n',q'}$.

(c) 由 (b) 推断

$$\int_0^{\rho_0} j_n(\frac{\beta_{n,q}\rho}{\rho_0}) j_n(\frac{\beta_{n,q'}\rho}{\rho_0})\rho^2 d\rho = 0, \quad \text{如果} \quad q \neq q'.$$

该结果可以怎样直接证明? 直接证明会更容易吗?

16. (a) 计算球 Bessel 函数 $j_1(\rho)$ 和 $j_2(\rho)$, 并证明它们满足径向方程 (28).
(b) 证明对小的 ρ, $j_1(\rho) \approx \frac{1}{3}\rho$ 和 $j_2(\rho) \approx \frac{1}{15}\rho^2$.

17. 解 (其中如在 (31) 中, $\beta_{n,q}$ 表示 j_n 第 q 个正零点)

D.E. $u_t = k\triangle u, \quad \rho \leqslant 1, \quad t \geqslant 0;$

B.C. $U(1, \varphi, \theta, t) = 0;$

I.C. $U(\rho, \varphi, \theta, 0) = j_0(2\pi\rho) + j_1(\beta_{1,3}\rho)\cos\varphi + j_2(\beta_{2,1}\rho)\sin^2\varphi\sin(2\theta).$

18. 假设例 6 的 (27) 中的 B.C. 由 $U_\rho(\rho_0, \varphi, \theta, t) = 0$(即球是绝热的). 令 $\gamma_{n,q}$ 表示导数 $j_n'(\rho)$ 等于零的第 q 个正数. 利用这些数 $\gamma_{n,q}$ 表示该新问题的形式解.

19. 把例 6 的 (27) 中的 D.E. 换成波方程 $u_{tt} = a^2\triangle u$ 并附加 I.C. $U_t(\rho, \varphi, \theta, 0) = 0$. 该新问题的形式解是什么?

20. (a) 论证关于在一薄形圆盘的内外两面都是绝热的匀质金属单位圆盘中的温度 $u = U(\varphi, \theta, t)$ 的热方程具有形式 $u_t = k\triangle_s u$.
(b) 当初始温度是 $U(\varphi, \theta, 0) = f(\varphi, \theta)$ 时形式求解该方程.
(c) 当 $f(\varphi, \theta) = 2\cos\varphi\sin^2\varphi\cos^2\theta$ 时求精确解.
(d) 证明对 $v_t = k\triangle_s v$ 任一解 v, 有

$$\frac{d}{dt}\int_S v^2 dA = -2k\int_S |\nabla v|^2 dA,$$

并推断 (c) 中得到的解是唯一的.
(e) 叙述和证明 $u_t = k\triangle_s u$ 解的最大值原理.

21. (a) 证明 C^2 函数 $\sin^3\varphi$ 的 Laplace 级数有无穷多项, 而 $\sin^3\varphi\cos(3\theta)$ 的 Laplace 级数只有一项.
(b) 利用定理 4 估计 $\sin^3\varphi$ 的 Laplace 级数的项数, 使得在误差 0.01 之内逼近 $\sin^3\varphi$.(勤

奋的读者可能希望计算该 Laplace 级数的系数以观察其收敛性是否确实是这样的结果.)

(c) 为什么对函数 $\sin\varphi$ 不能运用定理 4?

22. 证明每个 N 次齐次多项式 $p(x,y,z)$(不必是调和的) 可写成以下形式

$$p(x,y,z)=h_n(x,y,z)+\rho^2h_{n-2}(x,y,z)+\rho^4h_{n-4}(x,y,z)+\cdots,$$

其中 h_k 是 k 次调和多项式. 这种表示式唯一吗? 为什么?

提示 考虑 $p(x,y,z)$ 在单位球面上的 Laplace 级数并应用定理 2.

§8.5 特殊函数及其应用

在各种坐标系中经分离变量出现的那些常微的解具有如此重要性, 以至于对这些解给予命名, 并且需要非常仔细研究. 这样的解归入特殊函数的范畴. 第 8.4 节的 Legendre 函数 $P_{n,m}(\cos\varphi)$ 和球 Bessel 函数 $j_n(\rho)$ 就是特殊函数的例子. 本节我们将研究某些特殊函数 (例如 Bessel 函数), 它们在对柱体和圆盘的应用中是不可或缺的. 我们还考虑 Laguerre 多项式和 Hermite 函数, 它们出现在求解关于氢原子的量子力学和调和振荡子的 Schrödinger 方程中.

径向特殊函数

我们已经看到 (参看第 8.2 节的例 1) 特征函数方程 $\triangle u+cu=0$ 的解 u 立刻导出热方程 $u_t=k\triangle u$ 的解 $e^{-ckt}u$ 和波方程 $u_{tt}=a^2\triangle u$ 的解 $e^{\pm i\sqrt{c}at}u$. 而且, 更一般形式的方程

$$\triangle u+(f(\|x\|)+c)u=0, \tag{1}$$

(其中 f 是给定的点 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中原点的距离 $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ 的函数) 出现在某些热 (或波) 问题中, 其中温度 (或位移) 依赖于源项. 但这样的方程经常出现在量子力学中, 在本节的后面将考虑它们. 假设 (1) 在 2 维情形的乘积解具有形式 $R(r)H(\theta)$[用极坐标 (r,θ)], 和在 3 维情形的乘积解 $R(\rho)S(\varphi,\theta)$[用球坐标 (ρ,φ,θ)], 则分别得分离方程:

$$\begin{aligned}&H''(\theta)+m^2H(\theta)=0,\\&r^2R''(r)+rR'(r)+(cr^2-m^2+r^2f(r))R(r)=0,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\triangle_sS(\varphi,\theta)+n(n+1)S(\varphi,\theta)=0,\\&\rho^2R''(\rho)+2\rho R'(\rho)+(c\rho^2-n(n+1)+\rho^2f(\rho))R(\rho)=0.\end{aligned}\tag{3}$$

称关于 $R(r)$ 和 $R(\rho)$ 的方程为**径向方程**. 在 $f(\rho)\equiv 0$ 的情形, 在第 8.4 节的定理 5 中已经看到, 对任意非零的 $c=\pm b^2$, (3) 的通解由 $R_n^{\pm}(b\rho)$ 给出, 其中

$$R_n^{\pm}(\rho)\equiv\rho^n(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho})^n[R_0^{\pm}(\rho)] \quad 和 \quad \begin{cases} R_0^{-1}(\rho)=(a_0e^{b\rho}+b_0e^{-b\rho})/\rho, \\ R_0^{+}(\rho)=(a_0\cos\rho+b_0\sin\rho)/\rho. \end{cases} \tag{4}$$

当 $c=0$ 和 $f(r)\equiv 0$ 时, (2) 中的径向方程当 $m=0$ 时通解是 $K\ln r+C$, 以及对 $m=\pm1,\pm2,\cdots$, 通解是 $c_1r^m+c_2r^{-m}$, 而 (3) 的通解是 $c_1\rho^{-n-1}+c_2\rho^n$, $n=0,1,2,\cdots$. 注意到 (3) 的解 (4) 可表示为初等函数 (如, x^k, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$) 的简单组合. 然而, 对 $f(r)\equiv 0$ 和 $c\neq 0$, 这种情形我们下面考虑, (2) 的解就不是这样.

Bessel 函数

在 (2) 中当 $c=1$ 和 $f(r)\equiv 0$ 时, 我们得到 m 阶 **Bessel方程**:

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(r^2-m^2)R(r)=0. \tag{5}$$

[Friedrich Wilhelm Bessel(1784—1846) 是德国天文学家, 他最先确定恒星 (不同于太阳) 到地球的距离. 他是第一位常规地使用 Bessel 函数.] 对每个 $m=0,1,2,\cdots$, 可证明 (5) 的一个解, 称为 **m阶第一类 Bessel 函数**, 可写成幂级数

$$J_m(r)=(\frac{r}{2})^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}r^2)^k}{k!(m+k)!}, \tag{6}$$

它对所有的 r 收敛 (即使 r 是复数), 但已知 $J_m(r)$ 不能用初等函数代数表示. 这就是为什么我们先用球坐标而不是用极坐标或柱坐标来考虑特征方程 $\triangle u+cu=0$ 的一个理由. 如由图可看出 (参看下面的图 1 和第 8.4 节的图 2), 函数 $J_m(r)$ 与第 8.4 节的 (30) 定义的 (初等) 球 Bessel 函数 $j_n(\rho)$ 类似, 它们满足具 $c=1$ 和 $f(\rho)\equiv 0$ 的 "球 Bessel 方程"(3). 就像 $j_n(\rho)$ 可用来解实体球中的热问题和波问题, $J_m(r)$ 可用来解圆盘或圆柱中的这种问题. 的确, Bessel 函数也称作**柱函数**.

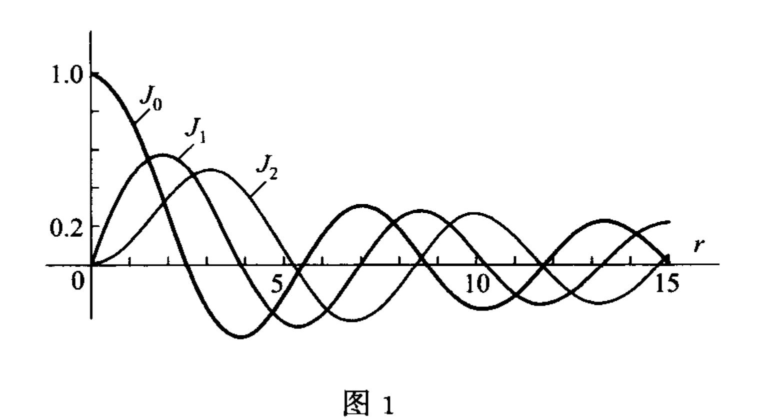


图 1

例 1 (振动圆形膜) 通过形式求解以下问题来确定一振动的半径为 $r_0 > 0$ 的圆状膜面位移的振幅

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad U_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad x^2 + y^2 \leqslant r_0^2, \quad -\infty < t < \infty;\\ &\text{B.C.}\quad U(r_0, \theta, t) = 0;\\ &\text{I.C.}\quad U(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad U_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta).\end{aligned} \tag{7}$$

解 D.E. 和 B.C. 的乘积解 $T(t)R(r)H(\theta)$ 具有如下形式

$$[A\cos(bat) + B\sin(bat)]R_m(br)[C\cos(m\theta) + D\sin(m\theta)], \tag{8}$$

其中 $R_m(r)$ 满足 $c = b^2$ 的 (2), 且 $R_m(r_0) = 0$. 对 (2) 的任意两个非奇异解 $y_1(r)$ 和 $y_2(r)$, Wronski 行列式 $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ 是 $C\exp(-\int \frac{1}{r}dr) = \frac{C}{r}$, 这表明 (2) 的两个线性无关的解中最多只有一个在 $r = 0$ 处是 C^1 的. 因此, $R_m(r)$ 必是 $J_m(br)$ 的常数倍. 由 (6), 对小的 r, 有 $J_m(r) \approx [2^m m!]^{-1} r^m$, 由此, 在原点附近 $J_m(r)\cos(m\theta)$ 和 $J_m(r)\sin(m\theta)$ 接近于 $\mathrm{Re}[(x + iy)^m]$ 和 $\mathrm{Im}[(x + iy)^m]$, 且解 (8) 可证明是处处 C^∞ 的. 令 $j_{m,q}$ 是满足 $J_m(r) = 0$ 的 r 的第 q 个正值. (这由上述图 1 中的图像揭示出来, 且可证明 J_m 有无穷多正零点 (参看第 4.4 节的例 8)). 则使得 (8) 满足 (7) 的 B.C. 的 b 具有形式 $J_{m,q}/r_0$. 为求形式解, 考虑

$$U(r, \theta, t) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[a_{m,q}\cos\left(\frac{aj_{m,q}t}{r_0}\right) + b_{m,q}\sin\left(\frac{aj_{m,q}t}{r_0}\right)\right] J_m\left(\frac{j_{m,q}r}{r_0}\right)e^{im\theta}, \tag{9}$$

其中, 对负整数 m, $J_m(r) \equiv (-1)^m J_{-m}(r)$. 为满足初始条件, 必须

$$f(r, \theta) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,q} J_m\left(\frac{j_{m,q}r}{r_0}\right)e^{im\theta} \tag{10}$$

和

$$g(r,\theta)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_{m,q}(\frac{aj_{m,q}}{r_0})J_m(\frac{j_{m,q}r}{r_0})e^{im\theta}. \tag{11}$$

在这些级数中的第 (m,q) 项是 Laplace 算子 (其中 $\partial_x=\frac{\partial}{\partial_x}$)

$$\triangle=\partial_x^2+\partial_y^2=\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$$

具特征值 $(j_{m,q}/r_0)^2$ 的特征函数 (为什么?). 显然, 对不同的 m 值, 这些项在圆盘 $r\leqslant r_0$ 上是正交的. 而且, 对具相同的 m, 但 q 不同的两项将有不同的特征值, 因此由 Green 公式 (参看习题 3(a)) 它们是正交的. 因而, 形式应用正交性, 得

$$a_{m,q}=\frac{1}{\Omega_{m,q}}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}f(r,\theta)J_m\left(\frac{j_{m,q}\,r}{r_0}\right)e^{-im\theta}rdrd\theta \tag{12}$$

和

$$b_{m,q}=\frac{r_0}{aj_{m,q}\Omega_{m,q}}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}g(r,\theta)J_m\left(\frac{j_{m,q}\,r}{r_0}\right)e^{-im\theta}rdrd\theta, \tag{13}$$

其中

$$\Omega_{m,q}\equiv 2\pi\int_0^{r_0}J_m\left(\frac{j_{m,q}\,r}{r_0}\right)^2rdr=\pi r_0^2\big(J_m'(j_{m,q})\big)^2, \tag{14}$$

(对最后的等式, 参看习题 3(b)). 作为第 8.6 节中的定理 3 (特征函数展开的一致收敛性) 的一个推论, 只要 f 和 g 在圆盘 $r\leqslant r_0$ 上是 C^2 的, 且在边界圆周 $r=r_0$ 上为 0, 则级数 (10) 和 (11) 将是一致收敛的. 因此, 在这种情形为了得到在任意给定的确定的实验误差之内满足 I.C. 的 D.E. 和 B.C. 的精确解, 可在对充分大的 q 和 m 处截取形式级数解 (9). □

注记 1 在 (7) 中的函数 f 只依赖于 r 的情形, 我们有如果 $m\neq 0$, 则 (10) 中的 $a_{m,q}=0$(为什么?), 且级数 (10) 是(0 阶)**Fourier-Bessel级数**

$$\text{FBS } f(r)\equiv\sum_{q=0}^{\infty}a_{0,q}J_0(\frac{j_{0,q}r}{r_0}),\quad \text{其中}\quad a_{0,q}=\frac{1}{\Omega_{0,q}}\int_0^{r_0}f(r)J_0(\frac{j_{0,q}r}{r_0})rdr, \tag{15}$$

$\Omega_{0,q}$ 由 (14) 给出. 如果 $f(r)$ 是定义在圆盘 $r\leqslant r_0$ 上的 C^2 函数, 则作为第 8.6 节定理 3 的一个特殊情形, FBS $f(r)$ 一致收敛到 $f(r)$. □

注记 2 在形式解 (9) 中的实部和虚部项是膜的**基本模式**. 在下面的图 2 中展示了在一固定时间的一些基本模式. 为方便起见, 我们已经选取 $r_0 = 1$. 随着时间的变化, 想象一下每个曲面在自身和它的反向之间的振荡. 由 (9) 可见, 对给定的 m 和 q, 一个模式的振荡的频率是 $aj_{m,q}/(2\pi r_0)$. 因此, 频率由 Bessel 函数的零点决定. 许多这些零点已经数值计算到若干位数, 在附录 6 中有一些零点的列表. 利用该表我们得到

$$j_{0,1} < j_{1,1} < j_{2,1} < j_{0,2} < j_{1,2} < j_{2,2} < j_{0,3} < j_{1,3} < j_{2,3} < j_{0,4} < j_{1,4} < j_{2,4}.$$

因此, 可得出图 2 中频率的排序. 对图 2 中显示的模式, 在第一栏中的所有的频率都低于右边栏的所有的频率, 但如果再添加一行的话就不成立了. 的确, $j_{3,1} > j_{0,2}$. 而且, 所展示的模式不具有十二个最低的可能的频率. □

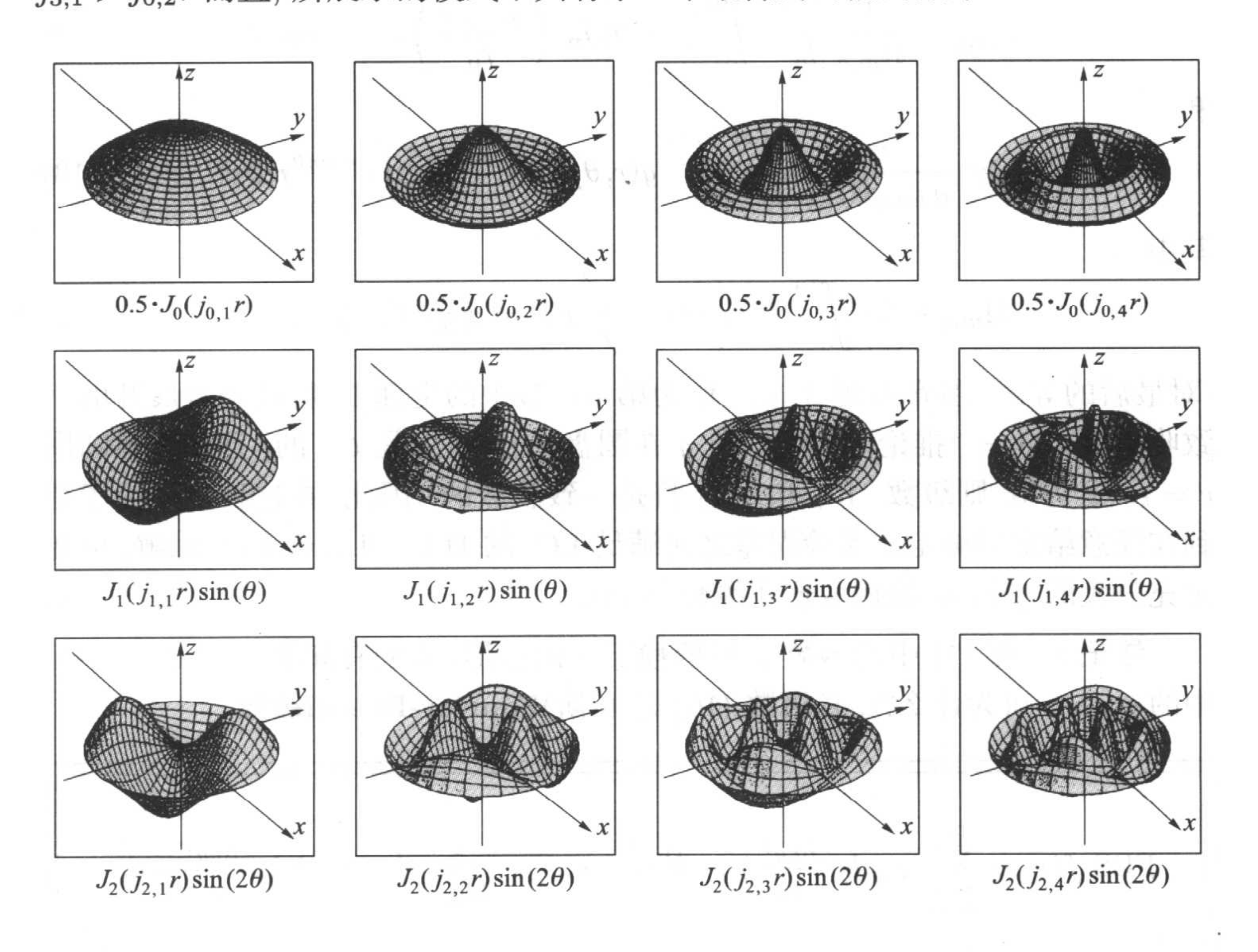


图 2

注记 3 Bessel 方程 (5) 的与 $J_m(r)$ 线性无关的第二个解是**第二类 Bessel 函数**, 记作 $Y_m(r)$ (Hankel 在 1869 年引入该函数). 如在例 1 中注意到的, 这些

函数在 $r=0$ 处必有奇异性. 的确, 对小的 r,

$$Y_0(r)\approx\frac{2}{\pi}\ln r \quad 和 \quad Y_m(r)\approx-\frac{(m-1)!}{\pi}(\frac{2}{r})^m,\quad m>0.$$

在振动环形膜面问题或在一圆环上的热问题中用到这样的解. 回忆一下在一圆环中稳态温度 (参看第 6.3 节) 的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题需要用到径向方程 (2) 在适用于 Laplace 方程的 $c=0$ 的情形的奇异解 $\ln r$ 和 r^{-m}. 关于 $Y_m(r)$ 的精确公式以及对大的 r, $J_m(r)$ 和 $Y_m(r)$ 的渐进行为在附录 6 中有概述.

如下一个例子所说明的, 方程 (2) 在 $c=-b^2<0$ 的情形有很多的应用. 在这种情形, 解可由 $c=b^2$ 的 (2) 的解 $R(br)$ 以 ib 替换 b 得到. 这种解称作**修正的 Bessel 函数**. 例如, 以 ir 替换 $J_m(r)$ 中的 r, 并为了确保是实的, 以 $(-i)^m$ 相乘, 得以下满足以 $-(r^2+m^2)$ 替换 (r^2-m^2) 的 (5) 的修正的 Bessel 函数

$$I_m(r)\equiv(-i)^m J_m(ir)=(\frac{r}{2})^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{4}r^2)^k}{k!(m+k)!}. \tag{16}$$

下面的图 3 展示了 I_0, I_1 和 I_2 的图像.

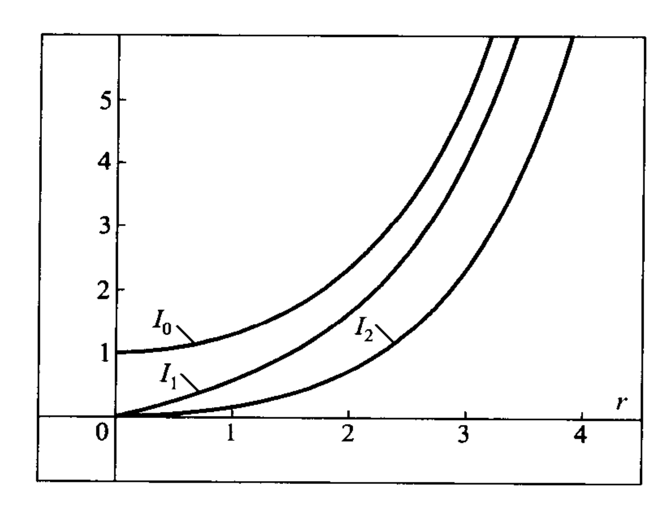


图 3

例 2 (圆柱中稳态温度分布) 考虑确定上下两面是绝热的, 侧面是给定温度的匀质实圆柱内的稳态温度分布问题:

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\quad x^2+y^2\leqslant r_0^2,\quad 0\leqslant z\leqslant z_0;\\ \text{B.C.} & \begin{cases}U(r_0,\theta,z)=f(\theta,\frac{z}{z_0}),\\ U_z(r,\theta,0)=0,\quad U_z(r,\theta,z_0)=0.\end{cases}\end{array} \tag{17}$$

与圆盘上 Dirichlet 问题相比较, 讨论当 $z_0 \to 0^+$ 时解的行为.

解 为求乘积解 $U(r,\theta,z)=R(r)H(\theta)Z(z)$, 由分离变量, 得

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(-p^2r^2-m^2)R(r)=0, \quad H''+m^2H=0 \quad \text{和} \quad Z''+p^2Z=0. \tag{18}$$

注意到由 B.C., 必有 $p=p_n=\frac{n\pi}{z_0}(\ n=0,1,2,\cdots)$ 和 $Z(z)=a_n\cos\frac{n\pi z}{z_0}$. 因 $H(\theta)$ 必是 θ 的周期函数, 故得 $H(\theta)=c_me^{im\theta}$, $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 在 $n=0$ 的情形, 得到关于 $R(r)$ 的非奇异的解 r^m. 在 $n\geqslant 1$ 的情形, 注意到由于 $J_m(br)$ 是 $r^2R''(r)+rR'(r)+(b^2r^2-m^2)R(r)=0$ 的解 (参看习题 1), 故如果取 $b=ip_n$, 我们将获得 (18) 中 $R(r)$ 的解. 因此取 $R_{m,n}(r)=(-i)^mJ_m(ip_nr)=I_m(p_nr)$(参看 (16)). 为求形式解, 考虑

$$U(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}c_{m,0}r^{|m|}e^{im\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{m,n}I_m\left(\frac{n\pi r}{z_0}\right)e^{im\theta}\cos\frac{n\pi z}{z_0}. \tag{19}$$

$U(r_0,\theta,z)=f(\theta,\frac{z}{z_0})$ 满足 B.C., 如果

$$f(\theta,\frac{z}{z_0})\ =U(r_0,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}c_{m,0}\ r_0^{|m|}e^{im\theta}+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{m,n}I_m\left(\frac{n\pi r_0}{z_0}\right)e^{im\theta}\cos\frac{n\pi z}{z_0}. \tag{20}$$

这是 $f(\theta,\frac{z}{z_0})$ 在 "矩形" $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant z_0$ 上的二重 Fourier 级数, 如果

$$c_{m,0}=\frac{1}{\pi z_0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{z_0}f(\theta,\frac{z}{z_0})e^{im\theta}dzd\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 f(\theta,\zeta)e^{im\theta}d\zeta d\theta \quad (\zeta=\frac{z}{z_0})$$

以及对 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 和 $n=1,2,\cdots$,

$$c_{m,n}=\frac{1}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 f(\theta,\zeta)\cos(n\pi\zeta)e^{im\theta}d\zeta d\theta.$$

作为第 8.2 节定理 1 的一个推论, 如果 $f(\theta,z)$ 是 C^3 的, 且满足 $f_z(\theta,0)=0$ 和 $f_z(\theta,1)=0$, 则级数 (20) 将一致收敛到 $f(\theta,z)$. 通过在充分大的 m 和 n 处截取形式级数 (19), 得到在实验误差之内的问题 (17) 的解. 当 $z_0\to 0^+$, 我们应该获得具边界函数 $F(\theta)\equiv\int_0^1 f(\theta,\zeta)d\zeta$ 的圆盘上 Dirichlet 问题的解 (即, (19) 中的二重和应趋于 0). 事实上, 已知对大的 r, 有 $I_m(r)\approx e^r/\sqrt{2\pi r}$(不管 m 是多少;

参看 [Whittaker 和 Watson, p.373]). 因此,

$$\frac{I_m(\frac{n\pi r}{z_0})}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})} \approx \exp(-\frac{n\pi(r_0-r)}{z_0})\sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

于是, 至少对 $0<\epsilon<r<r_0-\epsilon$, 第二项和具有阶数 $\exp(\frac{-\pi\epsilon}{z_0})$, 当 $z_0\to 0^+$ 时, 它快速趋于零. 对 $0\leqslant r\leqslant\epsilon$, 有

$$\frac{I_m(\frac{n\pi r}{z_0})}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})} \leqslant \frac{I_m(\frac{n\pi\epsilon}{z_0})}{I_m(\frac{n\pi r_0}{z_0})} \approx \exp(-\frac{n\pi(r_0-\epsilon)}{z_0})\sqrt{\frac{r_0}{r}},$$

当 $z_0\to 0^+$ 时它也快速趋于零. □

对涉及到中心角为 α 的扇形内的热流问题, 必须求 $m=\frac{n\pi}{\alpha}(n=1,2,3,\cdots)$ 情形的 Bessel 方程 (5) 的解. 注意到 m 未必是整数, 除非 $\frac{\pi}{\alpha}$ 是整数. 因此, 在这种问题中考虑当阶 m 不是整数时 Bessel 方程的解是必要的. 在定义式 (6) 中, 出现数量 $(m+k)!$, 它只当 m 是整数时有意义. 因此, 当 m 不是整数时, (6) 中 $(m+k)!$ 以 $\Gamma(m+k+1)$ 来替换, 其中 Γ 是 **gamma函数**, 定义如下:

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx, \quad 对所有的实数 \quad s>0. \tag{21}$$

反复利用分部积分 (参看习题 6), 容易证明, 对正整数 n, 有 $\Gamma(n+1)=n!$. 因此, gama 函数可用来把阶乘函数延拓到所有的正实数. 特别,

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}y^{-1}2ydy=\sqrt{\pi}.$$

而且, 由分部积分得到 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, 由此我们得

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n=1,2,3,\cdots. \tag{22}$$

例 3 证明球 Bessel 函数 j_n(参看第 8.4 节的 (29) 和 (30)) 与 $J_{n+\frac{1}{2}}$ 以下面公式相联系

$$j_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{23}$$

解　先证明 $R(\rho)$ 是三维径向方程 (3) 的解当且仅当 $\sqrt{r}R(r)$ 满足 $m=(n+\frac{1}{2})$ 的 Bessel 方程 (5):

$$\begin{aligned}
&r^2(\sqrt{r}R(r))''+r(\sqrt{r}R(r))'+(r^2-(n+\frac{1}{2})^2)\sqrt{r}R(r)\\
&=\sqrt{r}\big(r^2R''+rR'-\frac{1}{4}R+rR'+\frac{1}{2}R+(r^2-(n+\frac{1}{2})^2)R\big)\\
&=\sqrt{r}\big(r^2R''+2rR'+(r^2-n(n+1))R\big).
\end{aligned}$$

因此, $\sqrt{r}j_n(r)$ 是 $(n+\frac{1}{2})$ 阶 Bessel 方程的解. Bessel 方程不可能有在 $r=0$ 处是 C^1 的两个线性无关的解, 因 Wronski 行列式是 Cr^{-1}. 因此, 比 $\sqrt{r}j_n(r)/J_{n+\frac{1}{2}}(r)$ 是常数. 对小的 r, 我们有 (利用 (22) 和 (6))

$$J_{n+\frac{1}{2}}(r)\approx\frac{(\frac{r}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)}=\frac{\sqrt{\frac{2r}{\pi}}r^n}{1\cdot3\cdot\dots\cdot(2n+1)}\approx\sqrt{\frac{2r}{\pi}}j_n(r),$$

其中我们从以下的定义得到 $j_n(r)$ 的首项

$$\begin{aligned}
j_n(r)&\equiv(-1)^nr^n\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}r^{2m}\\
&=(-1)^nr^n\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big)^{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m2m}{(2m+1)!}r^{2m-2}\\
&=(-1)^nr^n\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big)^{n-2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m2m(2m-2)}{(2m+1)!}r^{2m-4}\\
&=\dots=\frac{r^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n+1)}+\cdots.
\end{aligned}$$

□

Schrödinger 方程和量子力学

很微小的物体, 如原子中的电子, 它的许多行为不能用 Newton 的经典力学来充分刻画. 根据 Newton 经典力学, 受到给定作用力作用的物体沿着由它的初始位置和初始速度所决定的轨道运行. 的确, 关于人们能如何准确地同时度量一个物体的位置和速度, 自然界已经安置了一个基本的限制 —— 这种限制没有一种度量仪器可以克服的, 不管它是如何地先进. 更精确地, 在任一方向 (设为 **i** 方向), 对于质量是 M 的粒子 P, P 的坐标 x 的度量误差 δx 和 P 的速度在 **i**

分量上的度量误差 δv_1 必须满足以下 (**Heisenberg**)**不确定关系**

$$\delta x \delta v_1 \geqslant \frac{\hbar}{2M}, \text{其中} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{和} \quad h \approx 6.626 \times 10^{-27} \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}. \tag{24}$$

对一个几克重的物体, 误差的乘积是相当小的. 然而, 对质量 $\approx 9.108 \times 10^{-28}$g 的电子, 不管技术如何先进, 误差的乘积 $\delta x \delta v_1$ 必比 $0.5\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ 大. 的确, 粒子具有确定的位置和速度的观点是有争议的. 对这类问题已经作过深入思考过的一些人得出结论: 粒子没有位置或速度, 它们与观察的行为无关. 因为不能可靠地利用位置和速度来描述微小粒子的状态, 故必须采用对粒子状态的不同的描述. 量子力学提供了对微小等级现象的令人惊讶的精确描述, 在这些微小等级现象中 Newton 力学证明是失效的. 根据量子力学 (以它的最简形式), 在固定时间一粒子的**量子状态**是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的复值函数 $\psi(x,y,z)$, 它称为 (Schrödinger)**波函数**. 状态 ψ 称为是**可正规化的**, 如果 ψ 在 $\mathbf{R}^3$ 上的模的平方的积分, 即

$$\|\psi\|^2 \equiv \int_{\mathbf{R}^3} |\psi(x,y,z)|^2 dxdydz$$

是有限的和非零的 (零函数不是一个允许状态). 两个状态视为等价的, 如果其中一个是另一个的常数倍, $\|\psi\|^2 = 1$ 的 ψ 称为是**正规化的**, 故为了达到 $\|\psi\|^2 = 1$, 总可用一个常数乘可正规化波函数. 对于一正规化状态 ψ, 粒子在空间任一给定的区域 A 的概率是 $\int_A |\psi|^2 dxdydz$, 是 $[0,1]$ 内的一个数 (例如, 如果 $A = \mathbf{R}^3$, 该积分等于 1, 表明该粒子确切地在 $\mathbf{R}^3$ 的某个地方). 因此, 波函数包含了关于粒子位置的某些信息, 但只是在概率的意义下. 的确, 称 $|\psi(x,y,z)|^2$ 给出粒子的可能位置云状团的概率密度. 状态 $\psi(x,y,z)$ 还提供了关于粒子速度的一些信息. 事实上, 粒子的可能速度 (v_1, v_2, v_3) 云状团的概率密度是平方模 $|\hat{\psi}(Mv_1/\hbar, Mv_2/\hbar, Mv_3/\hbar)|^2$, 其中 $\hat{\psi}$ 是 ψ 的 Fourier 变换. 不确定关系 (24) 是该事实的一个推论 (参看习题 10[①]).

考虑一质量为 M 的粒子, 受到具有形式 $-\nabla V(x,y,z)$ 的作用力 $F(x,y,z)$, $V(x,y,z)$ 为某个函数, 称为 F 的位势. 具有确定能量 E(从经典上来说, 是动能

[①] 原文误为习题 13.——译者

加势能) 的量子状态满足偏微:

$$\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\psi - V(x,y,z)\psi + E\psi = 0, \tag{25}$$

此称为 **Schrödinger方程**(与时间无关). 注意到方程 (25) 表明 ψ 是算子 $\frac{\hbar^2}{2M}\triangle - V$ 的特征函数, 能量 E 是相应的特征值. 由于与位势有关, 可能发生该算子的特征值不是任意的, 而是组成一个在某个特殊范围内的离散值的数列. 换言之, 粒子的可能能量, 它们囿于位势, 会限于一确定的离散数集. 谱分析表明原子发出和吸收确定波长 (或能量) 的光, 这是以下事实的推论: 根据量子力学, 原子中的电子的量子状态的可能能量是离散的. 但这不同于经典力学, 经典力学错误预测了能量的一个连续范围. 一个特别重要的情形是位势 V 只依赖于到原点的距离 ρ, 记为 $V = V(\rho)$. 在这种情形, Schrödinger 方程可写成以下形式

$$\triangle\psi + (f(\rho) + c)\psi = 0, \quad 其中 \quad f(\rho) = -\frac{2M}{\hbar^2}V(\rho) \quad 和 \quad c = \frac{2M}{\hbar^2}E. \tag{26}$$

V 的两个很重要的形式是 $V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2$(**调和振荡子位势**; 参看习题 9) 和 $V(\rho) = -e^2\rho^{-1}$, 作为作用在氢原子中电子上的静电作用力的 **Coulomb位势**(由于带电荷 e 的中子), 我们在下面的例子考虑这种情形.

例 4 (氢原子中的电子状态) 利用 Schrödinger 方程证明: 由电子质量 $m_e = 9.108 \times 10^{-28}$g 和中子质量 $M_p \approx 1836m_e$ 组成的氢原子中正规化电子的状态 ψ 的可能负能量 E 具有形式 $E = E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}$, $n = 1, 2, \cdots$, 其中 $\mu = \frac{m_e M_p}{M_p + m_e} \approx m_e$ 是 "约化质量", e 是电子的电荷. 确定具有这些能量的状态 ψ, 并证明, 不理会旋转, 具有能量 E_n 的有 n^2 个线性无关的状态.

解 因习惯上把原点取在中子的中心, 而不是电子和中子系统的质量中心, 故用 μ 代替 m_e 作为 Schrödinger 方程的质量, 但这样不会造成很大差别, 因为 $M_p \gg m_e$. 电子和中子之间的静电位势能是 $V(\rho) = -\frac{e^2}{\rho}$. 因此由 (25), 得

$$\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\psi + \frac{e^2}{\rho}\psi + E\psi = 0. \tag{27}$$

假设 (27) 的一乘积解 $\psi = R(\rho)S(\varphi, \theta)$, 则由变量分离 (参看 (26) 和 (3)) 导出的径向方程是

$$\rho^2 R''(\rho) + 2\rho R'(\rho) + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2}\rho^2 - l(l+1) + \rho^2\left(-\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)\left(-\frac{e^2}{\rho}\right)\right]R(\rho) = 0$$

或

$$\rho^2 R''(\rho)+2\rho R'(\rho)-(b^2\rho^2+l(l+1)-k\rho)R(\rho)=0,\quad b\equiv\frac{\sqrt{-2\mu}}{\hbar},\quad k\equiv\frac{2\mu e^2}{\hbar^2},\tag{28}$$

且 $S(\varphi,\theta)=S_{l,m}(\varphi,\theta)=e^{im\theta}\sin^{|m|}\varphi P_l^{(|m|)}(\cos\varphi)$, $l=0,1,2,\cdots$, $-l\leqslant m\leqslant l$. 不用 n 而用符号 l 是量子力学中的惯例, 因为 n 是留作用来表示标注能级 E_n 的. 对大的 ρ, 项 $b^2\rho^2$ 支配项 $l(l+1)$ 和 $k\rho$. 因此对大的 ρ, 我们希望 (28) 的通解与 $(c_1e^{b\rho}+c_2e^{-b\rho})/\rho$ 类似, 它是当项 $l(l+1)$ 和 $k\rho$ 没有时的通解. 为使 ψ 以这种逼近正规化, 必有 $c_1=0$, 且期望 $R(\rho)$ 以 $e^{-b\rho}$ 衰减 (当 $\rho\to\infty$ 时). 对小的 ρ, (28) 中的项 $b\rho^2$ 和 $k\rho$ 是可以忽略的, 在这种情形通解将表现得如 $d_1\rho^{-l-1}+d_2\rho^l$. 因此, 鉴于对大的 ρ 和小的 ρ (28) 的解的猜想的行为, 自然寻求 (28) 形如 $R(\rho)=L(\rho)\rho^l e^{-b\rho}$ 的解. 把该形式代入 (28), 得到以下关于 $L(\rho)$ 的常微

$$\rho L''+2(l+1-b\rho)L'+(k-2b(1+l))L=0.\tag{29}$$

可以证明 [Schiff.1968](29) 的不是 ρ 的多项式的任一解必以 $e^{2b\rho}$ 增长, 这时 $R(\rho)=\rho^l L(\rho)e^{-b\rho}\approx\rho^l e^{b\rho}$ 将不产生一个正规化函数 ψ. 令 $P_\nu(\rho)$ 是次数为 ν 首项为 ρ^ν 的多项式. 如果把 $P(\rho)$ 代入 (29), 则 (29) 的左边有最高次幂项 $(-2b\nu+k-2b(l+1))\rho^\nu$. 因此, 令 $n=\nu+l+1$(一个正整数), 我们不能得到次数为 ν 的多项式 $P_\nu(\rho)$, 除非 $(k-2bn)\rho^\nu=0$, 或

$$b=b_n\equiv\frac{k}{2n}\quad\text{或}\quad\frac{\sqrt{-2\mu E}}{\hbar}=\frac{2\mu e^2}{2n\hbar^2}\quad\text{或}\quad E=E_n=\frac{-\mu e^4}{2n^2\hbar^2}.\tag{30}$$

于是, 我们得到电子负能量的必要形式. 然而, 如果 E 是具 (30) 的形式, 则可逐次确定 $P_\nu(\rho)$ 的低次项的系数, 使得满足 (29). 因此, 对每个 n 和 l, 记作 $P_{n,l}(\rho)$(关于 $P_{n,l}(\rho)$ 显式公式参看下面的 (33)). 回忆一下 (见第 8.4 节的定理 2), 对每个 l, m 存在 $2l+1$ 个可能的值, 对应球面调和函数 $S_{l,m}(\varphi,\theta)$. 于是, 我们有一族具固定能量 $E_n(n=0,1,2,\cdots)$ 的正规化波函数:

$$\psi_{n,l,m}(\rho,\varphi,\theta)=P_{n,l}(\rho)\rho^l e^{-b_n\rho}S_{l,m}(\varphi,\theta)\quad(l=0,1,\cdots,n-1;m=-l,\cdots,l).\tag{31}$$

对任给的 n, 这些波函数的个数是 $1+3+5+\cdots+(2(n-1)+1)=n^2$. 用一些努力, 可以证明没有其他具能量 E_n 的线性无关的正规化波函数 (如何证明?) □

注记 1 在 (31) 中, 数 n 称为状态的**全量子数**, 而 l 是**轨道角动量**, m 是**磁量子数**. 对每个波函数都有两个独立的 "旋转" 状态. 因此, 在第 n 个能级

壳层实际上有 $2n^2$ 个独立状态. 数列 $2,8,18,\cdots,2n^2,\cdots$ 在元素周期表中出现. 的确, 在最外层 (最高) 能级壳层有相同电子数的元素具有类似的化学性质. 实际上, 在原子核中有 Z 个中子的原子必含有位势 $-Ze^2/\rho$, 因此 E_n 获得 Z^2 的因子, 并且一般而言, 在所有我们的计算中, e^2 必由 Ze^2 来代替. 更详细的分析 [Schiff, 1968] 表明原子中电子间的相互作用, 包括电子的旋转, 以及其他的作用, 实际上把 $2n^2$ 个状态分裂成 E_n 附近的许多能量簇. □

注记 2 对任意整数 $p,q\geqslant 0$, **广义的 Laguerre 多项式** $L_q^p(x)$ **是 Laguerre 常微**

$$xL''+(p+1-x)L'+qL=0$$

的 q 次多项式解, 它由以下给出

$$L_q^p(x)=\sum_{s=0}^{q}\frac{(-1)^s}{s!}\frac{(p+q)!}{(p+s)!(q-s)!}x^s. \tag{32}$$

置 $x=\frac{k\rho}{n}$ 和 $F(x)=P_{n,l}(\rho)$, 得 (由在 (29) 后面给出的 $P_{n,l}(\rho)$ 的定义)

$$xF''+((2l+1)+1-x)F'+(n-l-1)F=0,$$

此为 $p=2l+1$ 和 $q=n-l-1$ 的 Laguerre 常微. 于是, 根据该常微至多存在一个独立的多项式解的事实 (为什么?), 我们有

$$\begin{aligned}P_{n,l}(\rho)&=c_{n,l}L_{n-l-1}^{2l+1}(\frac{n\rho}{k})\\&=c_{n,l}\sum_{s=0}^{n-l-1}\frac{(-1)^s}{s!}\frac{(n+l)!}{(2l+1+s)!(n-l-1-s)!}(\frac{n\rho}{k})^s,\end{aligned} \tag{33}$$

$c_{n,l}$ 为某个常数. □

概要 8.5

1. 径向特殊函数: 当分离变量法用于方程 $\triangle u+(f(\|x\|)+c)u=0$ 时, 二维情形用极坐标, 三维用球坐标, 我们分别得到以下方程:

$$H''(\theta)+m^2H(\theta)=0,\quad r^2R''(r)+rR'(r)+(cr^2-m^2+r^2f(r))R(r)=0, \tag{S1}$$

$$
\begin{aligned}
&\triangle_s S(\varphi,\theta)+n(n+1)S(\varphi,\theta)=0,\\
&\rho^2 R''(\rho)+2\rho R'(\rho)+(c\rho^2-n(n+1)+\rho^2 f(\rho))R(\rho)=0.
\end{aligned}
\tag{S2}
$$

关于 $R(r)$ 和 $R(\rho)$ 方程称为径向方程. 当 $f(\rho)\equiv 0$ 和 $c=\pm b^2\neq 0$ 时, 方程 (S2) 的通解由 $R_n^{\pm}(b\rho)$ 给出, 其中, 如在第 8.3 节中证明的,

$$
R_n^{\pm}(\rho)\equiv\rho^n\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big)^n[R_0^{\pm}(\rho)] \quad 和 \quad \begin{cases} R_0^-(\rho)=(a_0e^{b\rho}+b_0e^{-b\rho})/\rho,\\ R_0^+(\rho)=(a_0\cos\rho+b_0\sin\rho)/\rho. \end{cases}
\tag{S3}
$$

然而, (S1) 的解 (对 $f(r)\equiv 0$) 不能用初等函数表示, 下面我们来刻画它们.

2. Bessel 函数: 当 $f(r)\equiv 0$ 和 $c=1$ 时, (S1) 是 m 阶 Bessel 方程:

$$
r^2R''(r)+rR'(r)+(r^2-m^2)R(r)=0.
\tag{S4}
$$

当 m 是非负整数时, Bessel 方程对所有 r 是 C^1 的任意解必是由以下定义的 Bessel 函数 $J_m(r)$ 的常数倍,

$$
J_m(r)=\Big(\frac{r}{2}\Big)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}r^2)^k}{k!(m+k)!}.
\tag{S5}
$$

当 m 是任意正实数时, $J_m(r)$ 由公式 (S5) 定义, 只要 $(m+k)!$ 以 $\Gamma(m+k+1)$ 来替换, 其中 Γ 是由下面定义的 gamma 函数

$$
\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx, \quad 对所有实数 \quad s>0.
$$

(S3) 中的解 $R_n^+(\rho)$ 称为球 Bessel 函数, 且与半整数阶 Bessel 函数相联系. 例如, $J_m(r)$ 的球对应函数是

$$
j_m(\rho)\equiv(-1)^n\Big(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\Big)^n\Big[\frac{\sin\rho}{\rho}\Big]=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho).
$$

Bessel 方程存在其他在 $r=0$ 有奇异性的解. 这些第二类 Bessel 函数的定义和性质在附录 6 中给出.

3. Bessel 函数在解偏微中的应用: 我们利用 Bessel 函数来解振动环形膜的波问题 (第 8.5 节例 1), 且发现修正的 Bessel 函数 $I_m(r)$ 出现在实柱体上下两面都是绝热的稳态温度问题的解中 (第 8.5 节例 2). 一般而言, Bessel 函数出现在涉及到柱区域或关于一坐标轴对称的区域上的问题.

4. Schrödinger 方程和量子力学: Heisenberg 不确定关系表明在粒子位置度量上的误差和在任一给定方向的速度度量上的误差的乘积不小于 $\frac{1}{2}\hbar/M$, 其中 M 是粒子的质量. 根据量子力学, 在一固定时间, 粒子的量子状态是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的复值函数 $\psi(x,y,z)$, 称为 (Schrödinger) 波函数. 如果 $\|\psi\|^2 \equiv \int_{\mathbf{R}^3}|\psi(x,y,z)|^2dxdydz = 1$, 状态称为是正规化的, 对这种状态, 粒子将在 $\mathbf{R}^3$ 中的区域 A 中发现的概率是 $\int_A|\psi(x,y,z)|^2dxdydz$. 具能量 E 且受到位势为 $V(x,y,z)$ 的作用力的粒子可由状态 ψ 来刻画,ψ 是以下 Schrödinger 方程 (与时间无关) 的一个解

$$\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\psi - V(x,y,z)\psi + E\psi = 0. \tag{S6}$$

在例 4 中, 用 Schrödinger 方程来确定氢原子中电子囿于中子的 Coulomb 位势 $-\epsilon^2\rho^{-1}$ 的可能的能级和正规化状态. 对调和振荡位势 $\frac{1}{2}k\rho^2$ 对应的问题在习题 9 中提出.

练习 8.5

1. 证明: 如果 $F(r)$ 满足 Bessel 方程 $r^2F''(r)+rF'(r)+(r^2-m^2)F(r)=0$ $(b\neq 0)$, 则 $R(r)=F(br)$ 满足 $r^2R''(r)+rR'(r)+(b^2r^2-m^2)R(r)=0$. 用练习 8.3 的习题 4(b) 中的想法能做到这样吗?

2. (a) 形式应用分部积分来建立圆盘 $r\leqslant r_0$ 上 C^2 函数 f 和 g 的 Green 公式:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}(g(r,\theta)\triangle f - f(r,\theta)\triangle g)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}(g(r_0,\theta)f_r(r_0,\theta) \\ -f(r,\theta)g_r(r_0,\theta))r_0d\theta.$$

(b) 对定义在实体球 $\rho\leqslant\rho_0$ 上的函数 $f(\rho,\varphi,\theta)$ 和 $g(\rho,\varphi,\theta)$ 叙述和证明 Green 公式.

提示 特殊情形包含在第 8.4 节的习题 15 中 (也可参看第 8.3 节的例 3).

3. (a) 利用圆盘上的 Green 公式 (参看习题 2(a)) 证明对任意 $m=0,1,2,\cdots$,

$$(\beta^2-b^2)\int_0^{r_0}J_m(br)J_m(\beta r)rdr = r_0\big(bJ_m'(br_0)J_m(\beta r_0)-\beta J_m(br_0)J_m'(\beta r_0)\big). \quad (*)$$

(b) 假设 $J_m(\beta r_0)=0$. 为得出 $\int_0^{r_0}J_m(\beta r)^2rdr=\frac{1}{2}r_0^2J_m'(\beta r_0)^2$, $(*)$ 两边关于 b 求导然后令 $b=\beta$.

(c) 假设 (a) 中的公式对 b 和 β 是复数时仍然是有效的, 证明对任意不是实数的 z, $J_m(z)$ 不会为零.

提示 如果 $J_m(z)=0$, 则经检查定义 J_m 的幂级数, 证明 $J_m(\bar{z})=0$. 在 (a) 部分取 $r_0=1$, $b=z$ 和 $\beta=\bar{z}$ $(r_0=1)$, 并注意到 z 是纯虚数的情形不同处理.

4. (a) 利用球上的 Green 公式 (参看习题 2(b)) 证明对 $n=0,1,2,\cdots$,

$$(\beta^2-b^2)\int_0^{\rho_0} j_n(b\rho)j_n(\beta\rho)\rho^2 d\rho=\rho_0^2\big(bj_n'(b\rho_0)j_n(\beta\rho_0)-\beta j_n(b\rho_0)j_n'(\beta\rho_0)\big),\quad (**)$$

其中 $j_n(\rho)\equiv(-1)^n\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^n\left[\frac{\sin\rho}{\rho}\right]$.

(b) 假设 $j_n(\beta\rho_0)=0$. 为得到 $\int_0^{\rho_0} j_n(\beta\rho)^2\rho^2 d\rho=\frac{1}{2}\rho_0^3 j_n'(\beta\rho_0)^2$(参看习题 3(b)), 对 (**) 两边关于 b 求导, 然后令 $b=\beta$.

5. (a) 求以下问题的形式解

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=k(u_{xx}+u_{yy}),\quad x^2+y^2<r_0^2,\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad U(r_0,\theta,t)=0,\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi;\\&\text{I.C.}\quad U(r,\theta,0)=f(r,\theta).\end{aligned}$$

(b) 对 B.C. 由 $U_r(r_0,\theta)=0$ (即, 圆盘的边缘是绝热的) 替换的情形求形式解.

6. 证明 $\Gamma(n+1)=n!$, $n=1,2,3,\cdots$.

7. 求 $\triangle$ 在楔形 $(0\leqslant r\leqslant r_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$ 上的特征函数, 这些特征函数在边界 $\theta=0$, $\theta=\alpha$, $r=r_0$ 上为零. 什么类型的热问题和波问题能用这些特征函数来求解? 请给出一些例子.

8. 假设例 2 中的 B.C. 由 $U(r_0,\theta,z)=0$ $(0\leqslant z\leqslant z_0)$, $U(r,\theta,0)=0$, $U(r,\theta,z_0)=f(r,\theta)$ $(0\leqslant r\leqslant r_0)$ 替换. 求该情形的形式解.

9. 本题我们确定受到具位势 $V(\rho)=\frac{1}{2}k\rho^2=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$(即, 调和振荡位势) 的弹性力 $F=-\nabla V=-k\rho_\rho$ 作用, 质量为 m 的粒子的可能能量 E 和相应的可正规化波函数 (量子状态).

(a) 证明 Schrödinger 方程 $-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi+\frac{1}{2}k\rho^2\psi=E\psi$ 的乘积解具有形式 $X(x)Y(y)Z(z)$, 其中

$$-\frac{\hbar^2}{2m}X''+\frac{1}{2}kx^2X=e_1X,\quad -\frac{\hbar^2}{2m}Y''+\frac{1}{2}ky^2Y=e_2Y$$

和

$$-\frac{\hbar^2}{2m}Z''+\frac{1}{2}kz^2Y=e_3Z,$$

e_1, e_2 和 e_3 是常数, 满足 $e_1+e_2+e_3=E$.

(b) 证明: 如果记 $X(x)=f(\alpha x)$, 则通过取 $\alpha=\left[\frac{km}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{4}}$ 和 $\lambda_1=\hbar^{-1}\sqrt{\frac{m}{k}}e_1$, 关于 X 的方程转换成常微 $-\frac{1}{2}F''(\alpha x)+\frac{1}{2}(\alpha x)^2F(\alpha x)=\lambda_1F(\alpha x)$. 由练习 7.2 的习题 16 推导: 当 $\lambda_1=n+\frac{1}{2}$ 时, $n\geqslant 0$ 为某个整数, 我们有速减解 $X_n(x)=H_n(\alpha x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}$, 其中 H_n 是第 n 阶 Hermite 多项式.

(c) 从 (b) 中推断: 当 E 具 $(N+\frac{3}{2})\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$ 形式时 ($N\geqslant 0$ 是整数), 我们有以下满足 (a) 部分的 Schrödinger 方程的可正规化波函数

$$\psi_{n,m,p}(x,y,z)=H_n(\alpha x)H_m(\alpha y)H_p(\alpha z)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\rho^2},\quad 只要\quad n+m+p=N.$$

(d) 用一些努力可以证明 Schrödinger 方程有可正规化解的唯一能量 E 是具 (c) 中的形式, 且对第 N 级能量的任一可正规化波函数是 (c) 中独立的波函数的线性组合. 证明存在 $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ 个具有 (c) 中形式的波函数.

(e) 粒子会有零能量吗? 最小能量是什么?

10. 假设质量为 M 的粒子的量子状态由一正规化的速减的波函数 $\psi(x,y,z)$ 给出. 度量粒子可能位置的 x 坐标的均值是 $\bar{x} \equiv \int_{\mathbf{R}^3} x|\psi(x,y,z)|^2 dxdydz = \langle x\psi, \psi\rangle$ (即, 概率密度为 $|\psi(x,y,z)|^2$ 的粒子概率云状团重心的 x 坐标). x 度量的标准差 (即, 典型误差) 是

$$\delta x = \sqrt{\langle (x-\bar{x})^2\psi, \psi\rangle} = \|(x-\bar{x})\psi\|.$$

可能速度 (v_1, v_2, v_3) 云状团的概率密度是 (根据量子力学)

$$\omega(v_1,v_2,v_3) = \left(\frac{\hbar}{M}\right)^{\frac{3}{2}}\hat{\psi}\left(\frac{Mv_1}{\hbar}, \frac{Mv_2}{\hbar}, \frac{Mv_3}{\hbar}\right),$$

其中 $\hat{\psi}$ 是 ψ 的 Fourier 变换. 同样, 粒子速度的 **i** 分量的度量均值是 $\bar{v}_1 = \langle v_1\omega, \omega\rangle$, 标准差是

$$\delta v_1 = \sqrt{\langle (v_1-\bar{v}_1)^2\omega, \omega\rangle} = \|(v_1-\bar{v}_1)\omega\|.$$

(a) 利用 $(\partial_x\psi)^\wedge(\xi) = i\xi\hat{\psi}(\xi)$ 和 Parseval 等式 (参看第 7.3 节) 证明

$$\|(v_1-\bar{v}_1)\omega\| = \frac{\hbar}{M}\| -i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\|, \quad \text{其中} \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}.$$

(b) 利用 Cauchy-Schwarz 不等式 $|\langle f,g\rangle| \leqslant \|f\|\|g\|$ 证明

$$\begin{aligned}\|(x-\bar{x})\psi\|\| -i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\| &\geqslant |\langle (x-\bar{x})\psi, -i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\rangle| \\ &\geqslant \mathrm{Im}\left[\langle (x-\bar{x})\psi, -i\partial_x\psi - \frac{M}{\hbar}\bar{v}_1\psi\rangle\right].\end{aligned}$$

(c) 证明 (b) 中最后一个表示式是 $\mathrm{Im}[\langle x\psi, -i\partial_x\psi\rangle]$.

(d) 证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}[\langle x\psi, -i\partial_x\psi\rangle] &= -\frac{1}{2}i\left[\langle x\psi, -i\partial_x\psi\rangle - \langle -i\partial_x\psi, x\psi\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2}\langle \partial_x(x\psi) - x\partial_x\psi, \psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi,\psi\rangle.\end{aligned}$$

(e) 由上述推断不确定关系 $\delta x\delta v_1 \geqslant \frac{1}{2}\hbar/M$ 成立.

(f) 假设 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ 和 $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0$. 证明: 如果 $\delta x = \delta y = \delta z$ 和 $\delta x\delta v_1 = \delta y\delta v_2 = \delta z\delta v_3 = \frac{1}{2}\hbar/M$ (即, 不确定是最小值的), 则 ψ 必是在一调和振荡位势 (参看习题 9) 中的粒子的基态 (最小能量状态). 对这种状态弹性常数 k 对 δx 是如何相联系的?

§8.6 求解流形上的偏微

在本节我们定义在 $\mathbf{R}^n$ 中称为有边或无边的光滑 k–流形的相当一般的 k 维子集上的函数的 Laplace 算子. 定义方法与 $\mathbf{R}^3$ 中单位球面上 (作为二维流形的例子), 通过在法线方向把 f 延拓成常数, 然后对经过延拓的函数取通常的 Laplace 运算来定义 Laplace 算子 $\triangle_s$ 的方法相同. 然后研究 "紧"k–流形上 Laplace 算子的特征函数和特征值的一般性质. 叙述了在流形上充分可微的函数的特征函数展开的一致收敛定理, 并给出了证明的参考文献. 求解流形上的热方程, 波方程和 Poisson-Laplace 方程要用到这些特征函数展开. 我们还通过 Laplace 算子的特征函数和特征值直接构造 Green 函数来表明如何用积分表示解. 我们强调前面关于热方程, 波方程和 Laplace 方程的许多内容是本节一般观点的特殊情形, 本节充实我们已经学过的内容. 流形的概念已经成为现代理论物理中描述宇宙的基础部分, 从广义相对论空间 - 时间连续统一体到作用在基本粒子的波函数上的连续对称群. 也因为这个理由, 我们相信让读者接触流形是有益的. 对流形以及相关概念更深入的介绍我们推荐 [Abraham, Marsden 和 Ratiu].

$\mathbf{R}^n$ 中 k–流形的定义以及它的 Laplace 算子

令 f_1, f_2 和 f_3 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 中某开集 B 上的 C^∞ 函数. 对 B 中每个点 $P(x,y,z)$, 存在仍在 $\mathbf{R}^3$ 中的赋值的点 $F(P)=(f_1(P),f_2(P),f_3(P))$. 如果当 P 取遍 B 时点 $F(P)$ 的集合是一个开集 C, 则称 F 是从 B 到 C 上的**光滑映照**. 如果还存在 C 到 B 上的光滑映照 G, 使得对 B 中所有的 P, 有 $G(F(P))=P$, 则称 F 是 B 到 C 的微分同胚 (即, 对开集 B 和 C, 微分同胚是 B 到 C 上的光滑映照, 它存在从 C 到 B 的光滑逆映照). 类似地, 对 $n=1,2,3,4,\cdots$, 可定义从 $\mathbf{R}^n$ 中的开集到 $\mathbf{R}^n$ 中另一个开子集的微分同胚概念. 令 k 和 n 是满足 $1\leqslant k\leqslant n$ 的整数. **$\mathbf{R}^n$标准 k 维子空间** (记作 $\mathbf{R}_n^k$), 是 $\mathbf{R}^n$ 中形如 $(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$ 的点的集合, 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是任意实数, 在它们后面跟着 $n-k$ 个零 (例如, $\mathbf{R}_3^2$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的 xy–平面, $\mathbf{R}_3^1$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的 x–轴). **$\mathbf{R}^n$中标准的闭 k–维半空间**是 $\mathbf{R}_n^k$ 中具有非负的第一个坐标 (即, $x_1\geqslant 0$) 的所有点的子集 $\mathbf{H}_n^k$ (例如, $\mathbf{H}_3^2$ 是

$\mathbf{R}^3$ 中的半平面 $x \geqslant 0,\ z = 0$).

> **定义**　$\mathbf{R}^n$ **中的**(光滑)k–**流形**是 $\mathbf{R}^n$ 中具有以下性质的子集 M. 对 M 中的每点 P, 存在 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 B 和一个从 B 到包含 P 的一个开集 C 的微分同胚 F, 对 B 中某个 P', $P = F(P')$, 使得 (参看图 1)F 把 B 与 $\mathbf{H}_n^k$ 的交集映到整个 C 与 M 的交集. 如果 P' 在 $\mathbf{H}_n^k$ 的边缘上, 则 M 上对应的点 P 称为 M 的**边界点**. M 的所有边界点的集合称为 M 的**边界**, 记作 ∂M.

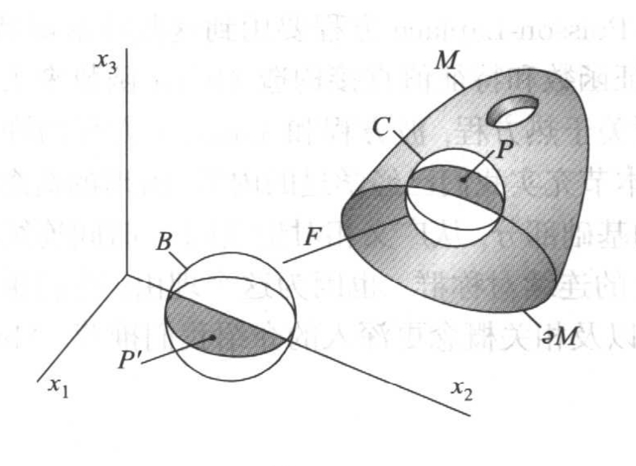


图 1

例 1　明确地验证由 $\rho = 1,\ z \geqslant 0,\ x > 0$ 定义的四分之一球面 Q 是 $\mathbf{R}^3$ 的 2–流形, 它的边界是由 $\rho = 1,\ z > 0,\ x > 0$ 定义的半赤道 E.

解　设映射 F 把开长方体 B, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2} < z < 2$ 中的每点 (x, y, z) 映成点

$$F(x, y, z) = (z\cos x\cos y, z\cos x\sin y, z\sin x).$$

这是从 B 到由 $\frac{1}{2} < \rho < 2$ 定义, 落在半空间 $x > 0$ 的球壳的一部分(设为 C) 的微分同胚. 的确, F 的逆 G 由以下定义 (参看习题 1), 对 C 中任一点 (x, y, z),

$$G(x, y, z) = (\sin^{-1}(\frac{z}{\rho}), \sin^{-1}(\frac{y}{r}), \rho),\quad \text{其中}\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\quad \text{和}\quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

F 把交集 $B \cap \mathbf{H}_3^2$ 映到四分之一球面 Q 上. 而且 $B \cap \mathbf{H}_3^2$ 的边缘 $x = 0$ 映到 E 上, 则此为 ∂Q. □

注记 在 $F(B)$ 包含了所有的 Q 的意义下, 上述例子是简单的. 为了确保预期的流形的每点包含在某个 $F(B_i)$ 中, 通常需要用到多个定义在开集 B_1, $B_2,\cdots$ 上的微分同胚 $F_1, F_2, \cdots$. 例如, 为了证明半球面 $\rho=1$, $z \geqslant 0$ 是具赤道圆作为边界的 2–流形, 我们需要不止一个微分同胚, 因为整个赤道圆周在单个微分同胚下不可能是 $\mathbf{H}_3^2$ 的边缘直线的一部分的图像 (为什么?). 我们同样需要两个微分同胚来表明球面 $\rho=1$ 是无边的 2–流形. □

幸运的是, 有了一些经验之后, 当看到一个流形时通常容易辨认出来, 而且只有很少的情况需要费事地去证明一给定的 $\mathbf{R}^n$ 中的子集是流形. 粗略地说来 $\mathbf{R}^n$ 中的一 k–流形是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 "光滑" 的 k 维子集, 在它的任一点, 比如 P 处的一个充分小的开 n 维球, 或相似于一 (可能是弯曲的)k 维圆盘 (如果 P 不是边界 ∂M 的部分), 或相似于一具有 $k-1$ 维包含 P 的 "平坦" 部分的 k 维半圆盘 (如果 P 是 ∂M 的部分). 下面的图 2 中列出了一些 $\mathbf{R}^3$ 中的 2–流形. 自然要把这些曲面想象为光滑的, 没有这些由于计算机生成的角点. 这些曲面中只有第一个有边界, 它由两个圆周组成.

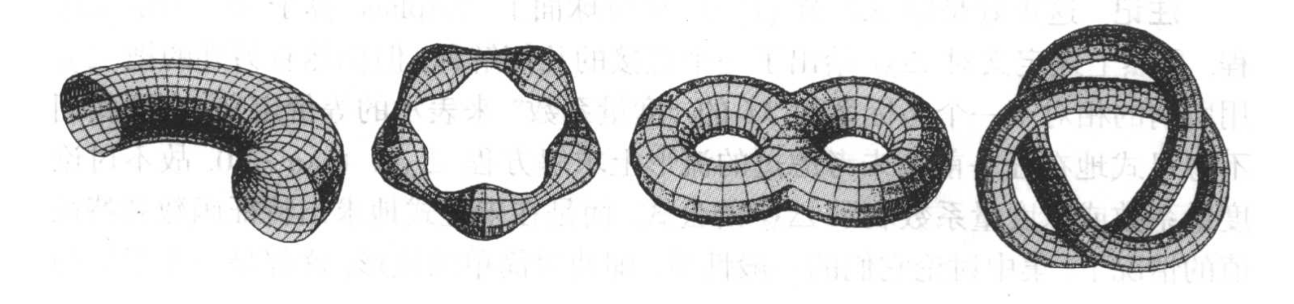


图 2

有一些相当简单的物体不是 (光滑)k–流形. 例如, 空间中交于一条直线的两个平面不构成一流形, 因为这个物体在相交直线上的任一点的一个邻域内局部上不相似于单个圆盘或半圆盘. 方体的曲面不是光滑流形, 因为对 $\mathbf{H}_3^2$ 中的圆盘施行微分同胚不会产生角点. 同样的理由, 圆锥体不是一个光滑流形, 闭长方体也不是. 至于一自然物体或系统有没有数学角点问题是相当无意义或至少是不相干的 (例如, 考虑在 "角点" 附近的原子). 大多数出现在 "现实" 应用中的区域在实验误差之内可由光滑 k–流形逼近, 此断言似乎是合理的. 考虑到在描述即使是相当简单的机械、电器或经济系统中会出现大数量的变量, 故只限于关注 $k \leqslant 3$ 或甚至 $k \leqslant 1000$ 的情形是不够的.

令 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中具边界 ∂M(可能是空的) 的 k–流形 M 上的函数. 可以证明 (参看 [Lang, p.96]) f 可延拓到 $\mathbf{R}^n$ 中包含 M 的某个开集 A 上的函数 $\bar{f}$, 使得 $\bar{f}$ 在每条落在 A 内, 与 M 垂直相交一点的线段上为常数. 我们称 f 在 M 上是 C^2 的, 如果 $\bar{f}$ 在 A 是 C^2 的. 则由于 $\bar{f}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 A 上是 C^2 的, 故对 $\bar{f}$ 应用 $\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子

$$\triangle_n \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

是有意义的.

$\triangle_M$ 的定义 我们由 $\triangle_M f(P) \equiv \triangle_n \bar{f}(P)$, 对所有 M 中的点 P 来定义在 M 上的 C^2 函数 f 的 **Laplace算子**$\triangle_M$, 其中 $\bar{f}$ 是上述定义的 (f) 延拓, 它在M 的法线方向等于常数. 等价地,$\triangle_M f(P)$ 是 $\bar{f}$ 沿着 k 条与 M 相切并垂直交于 P 的直线的二阶导数的和.

注记 这正好是第 8.3 节 (7) 中(单位球面上) Laplace 算子 $\triangle_s$ 的定义过程. 虽然上述定义对 $\triangle_M$ 给出了一个直接的几何解释, 但仍然有另外的把 $\triangle_M$ 用所谓的相对于一个坐标系的 M 的 "度量系数" 来表示的等价定义. 由于我们不想显式地在任一前面未考虑过的流形上求解方程 $\triangle_M u + \lambda u = 0$, 故不讨论度量系数或以度量系数表示 $\triangle_M$ 的公式. 而是在未显式地求出特征函数和特征值的情况下, 集中讨论它们的一般性质. 即使对简单的流形, 这都是一个艰巨的任务. □

$\triangle_M$ 在 k–流形 M 上的特征函数和特征值

在解 $\mathbf{R}^n$ 中 k–流形 M 上偏微 (比如热方程 $u_t = \triangle_M u$) 的边值问题中, 求出 $\triangle_M$ 满足边界条件的特征函数是所期望的. 当然, 在流形无边的情形 (例如, 球面曲面) 没有边界, 因而没有边界条件. 为了可以应用叠加原理, 边界条件必须是齐次和线性的. 我们局限在下面描述的标准类型. 令 f 是 k–流形上的 C^2 函数 (即, f 延拓成上述的 C^2 函数 $\bar{f}$). f**在 ∂M 上点 P 的外法向导数**是 $\bar{f}$ 沿着唯一的单位向量 $\mathbf{n}_p$ (在 P 点出发的) 的方向导数,

$$\partial_\nu f(p) \equiv \nabla \bar{f} \cdot \mathbf{n}_p. \qquad (1)$$

该向量与 ∂M 垂直, 与 M 相切, 指向离开"由所有 M 中除了 ∂M 的点组成的 (M 的)"**内点**M^0 方向, 我们引入一个相当一般的齐次边界条件如下. 令 N 是 (可能是空的)∂M 与 $\mathbf{R}^n$ 的某个开子集的交集, 令 D 是 ∂M 中不是 N 中的点的集合 (即, $D = \partial M - N$). 令 u 是在 M 上为常值, 在 $M^0 \cup N$ 是 C^1 的函数. 则提出以下边界条件是有意义的

$$\text{B.C.} \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上}, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}. \end{cases} \tag{2}$$

在 N 是空集的特殊情形, (2) 是 Dirichlet 条件, 当 D 是空集时, (2) 是 Neumann 条件. 我们称 $\mathbf{R}^n$ 中的 k–流形是**紧致的**, 如果它是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭子集且包含在一个充分大的 n–维球内 (参看附录 4). 自此假设所有的流形是紧致的, 且在下述意义下是**连通的**: M 中的任意两点可由一条落在 M 中的连续曲线相连接. 下面的基本结果原本在 [Chavel,1984] 中叙述, 但完全的证明 (以对大学生能理解的形式) 似乎不是出现在一个地方, 而是散布在文献中的结果的一个推论. 作为可读入门的文献, 我们推荐 Jozef Dodziuk 的文章 *Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation*, Amer. Math. Monthly. Vol. 88(1981), 686–695.

定理 1 (Dirichlet/Neumann 特征值问题) 令 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧致 k–流形, 具边界 $\partial M = D \cup N$(可能是空集). 对每个实数 λ, 问题

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle_M u + \lambda u = 0, \quad \text{于 } M \text{ 上}; \\ &\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上}, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

最多有有限多个线性无关的解 (即, 对给定的特征值 λ 的特征空间是有限维的). 这些解在下述意义下是 M 上 C^∞ 的, 它们可延拓到 ($\mathbf{R}^n$ 的) 一个包含 M 的开子集上的 C^∞ 函数. 使问题有非零解的 λ 值构成数列 $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, 其中每个特征值重复的次数与它的特征空间的维数相等.

注记　对大的 q, 特征值 λ_q 的性质由 Weyl 公式给出

$$\lambda_q \sim 4\pi^2\left(\frac{q}{\omega_k \mathrm{Vol}(M)}\right)^{\frac{2}{k}}, \quad \text{当} \quad q\to\infty \quad \text{时}, \tag{4}$$

其中 ω_k 是 $\mathbf{R}^k$ 中 "实体" 单位球的 k 维 "体积"(即, $\omega_3 = 4\pi/3$, $\omega_2=\pi$, $\omega_1=2$, 一般 $\omega_k = \pi^{k/2}/\Gamma(1+\frac{1}{2}k)$, 其中 Γ 是 gamma 函数 (参看第 8.5 节的 (21) 和 (22)), $\mathrm{Vol}(M)$ 是 k–流形 M 的 k 维体积 (例如, 当 $k=2$ 时是曲面面积). 符号 $\sim$ 的精确含义是 (4) 式左边和右边之比当 $q\to\infty$ 时趋于 1. [Hermann Weyl (1885—1955) 是德国数学物理学家, 他对相对论, 量子力学和纯数学做出了意义深远的贡献.] Weyl 公式的证明见 [Chavel, 第六章和第七章]. □

例 2　就 M 是由区间 $[0,L]$ 组成的 1–流形直接证明 Weyl 公式的有效性. 考虑所有可能的 B.C.(2).

解　如果 M 是区间 $[0,L]$, B.C. 由 $u(0)=0$ 和 $u(L)=0$ 给出, 则我们有 $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$ 具特征值 $\lambda_q = (\frac{(q+1)\pi}{L})^2$ 的特征函数 $\sin\left(\frac{(q+1)\pi x}{L}\right)$, 其中 $q=0,1,2,\cdots$. 注意到因为 $k=1$ 和 $\mathrm{Vol}(M)=L$, 所以

$$4\pi^2\left(\frac{q}{\omega_k \mathrm{Vol}(M)}\right)^{\frac{2}{k}} = 4\pi^2\left(\frac{q}{2L}\right)^2 = \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2 \sim \left(\frac{(q+1)\pi}{L}\right)^2 = \lambda_q.$$

类似地, 对 B.C. $u'(0)=0$, $u'(L)=0$, 我们有 $\lambda_0=0$ 和 $\lambda_q = (\frac{q\pi}{L})^2$. 而对 $u'(0)=0$, $u(L)=0$, 有 $\lambda_q = \left((q+\frac{1}{2})\pi/L\right)^2$. 于是, Weyl 公式 (4) 在所有这些情形是有效的. □

我们可用下面方式定义 $\mathbf{R}^n$ 中紧致 k–流形上连续函数的积分. 当 $k=n$ 时, M 的内点是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集且边界是一光滑 $(n-1)$–流形. 积分用通常的方式定义, 但引入矩形剖分构成 Riemann 和逼近, 然后令网状的范数趋于零. $k<n$ 时, 我们用下面的做法. 对每个 $\epsilon>0$, 令 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 M_ϵ 是由 $\mathbf{R}^n$ 中所有这样的点组成, 它们能与 M 用一长度 $\leqslant\epsilon$ 且与 M 垂直相接触的线段相连. 对足够小的 ϵ, M_ϵ 的每点由唯一的最短线段 (长度不超过 ϵ) 与 M 相连. 令 f 是 M 上的连续函数, 并通过在这些最短线段上令 f_ϵ 是常值把 f 延拓到定义在 M_ϵ 上的连续函数 f_ϵ. 令 I_ϵ 是 f_ϵ 在 M_ϵ 上的积分, M_ϵ 是 "好的" n 维闭有界集. 现 I_ϵ 依赖于 ϵ, 且 $\lim_{\epsilon\to0^+} I_\epsilon = 0$, 因为 I_ϵ 几乎是与正规的 $(n-k)$ 维半径为 ϵ 的圆盘

的体积 $\omega_{n-k}(\epsilon) \equiv \epsilon^{n-k}\pi^{(n-k)/2}/\Gamma(1+\frac{1}{2}k)$ 成比例. 定义

$$\int_M f(P)dM(P) \equiv \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{I_\epsilon}{\omega_{n-k}(\epsilon)}. \tag{5}$$

虽然 (5) 在左边定义了整个表示式, 然而我们可把符号 "$dM(P)$" 视为 M 的 "体积元素"(例如, 对单位球面, $dM(\varphi,\theta) = \sin\varphi d\varphi d\theta$).

定义 对定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致 k–流形 M 上的两个连续复值函数 f 和 g, 定义内积

$$\langle f, g\rangle = \int_M f(P)\overline{g(P)}dM(P). \tag{6}$$

定理 2 (紧致 k–流形上的 Green 公式) 令 f 和 g 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧致 k–流形上的实值 C^2 函数. 则

$$\langle \triangle_M f, g\rangle - \langle f, \triangle_M g\rangle = \int_{\partial M} g(Q)\partial_\nu f(Q) - f(Q)\partial_\nu g(Q)d\partial M(Q), \tag{7}$$

其中右边当 ∂M 是空集时定义为零.

注记 我们略去证明, 这个证明典型地用到许多技术性的方法来完成的 (参看 [Abraham, Marsden 和 Ratiu; 第七章]), 但 (在最后的分析中) 它转化到微积分的基本定理, 就如一维的情形. 作为一个相对简单的证明, 可先建立 $\mathbf{R}^n$ 中 n–流形的 Gauss 散度定理, 这可用本质上跟高等微积分书籍中同样的方法达到. 其次, 对 $k < n$, 可把这个结果应用到上述的 M_ϵ 上得到 M 上的 Gauss 散度定理. 则 M 上的 Green 公式易由 M 上的 Gauss 散度定理得到 (参看习题 10). □

注意到如果 f 和 g 满足 B.C.(2), 则 (7) 的右边为零, 由此得, 具不同特征值, 比如 λ_i 和 λ_j 的特征值问题的两个实值解 u_i 和 u_j 必是正交的 (即, $\langle u_i, u_j\rangle = 0$). 甚至在一个维数是 d 的特征空间之内, 我们可找出 d 个两两正交且具单位长度的函数. 由此, 存在问题 (3) 的实值 C^∞ 函数列 $u_0, u_1, u_2, \cdots$, 使得

$$\triangle_M u_0 = -\lambda_0 u_0, \quad \triangle_M u_1 = -\lambda_1 u_1, \quad \triangle_M u_2 = -\lambda_2 u_2, \cdots \tag{8}$$

其中

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots.$$

虽然我们已经取这些 u_q 为实值的, 但在有些情况中考虑复值特征函数是方便的 (例如, 第 8.4 节的球调和 $S_{n,m}(\varphi, \theta)$). 为了处理这种情形, 所有我们考虑的都能做平凡的修改.

定义 令 f 是 M 上的函数, 使得对 (8) 中所有函数 $u_q(\ q = 0, 1, 2, \cdots)$ 积分$\langle f, u_q \rangle$ 存在. 则f **的特征函数展开**($P \in M$) 是表示式

$$\mathrm{E}\ f(P) \equiv \sum_{q=0}^{\infty} c_q u_q(P), \quad \text{其中} \quad c_q = \|u_q\|^{-2} \langle f, u_q \rangle = \langle f, u_q \rangle, \tag{9}$$

注记 本质上, 所有 Fourier 级数 (不理会角点问题), 以及球面上的 Laplace 级数和圆盘上完全 Fourier-Bessel 级数都是 (9) 的特殊情形. 虽然下面的结果很少用这里给出的形式叙述, 但它通过简单修改在 [Palais] 中已知的结果得到. □

定理 3 (特征函数展开的一致收敛性) 令 M 是一紧致 k–流形, 令 f 是满足 B.C.(2) 的 C^m 函数, 其中 $m > k/2$. 令 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ 是由 (8) 给出的特征函数列. 则 $\mathrm{E}\ f$ 在下述意义下在 M 上一致收敛到 f

$$\lim_{N \to \infty} \left(\max_{P \in M} |S_N(P) - f(P)| \right) = 0, \tag{10}$$

其中 $S_N(P)$ 是 $\mathrm{E}\ f(P)$ 的 N 项部分和.

流形上标准的初边值问题

在定理 4 和定理 5 中, 当初始条件中的函数是 (8) 中的特征函数 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ 的有限线性组合时, 这样的函数 (由定义) 满足 B.C., 我们给出紧致 k–流形 M 上标准热问题和波问题的解. 换言之, 我们假设初始数据在实验误差之内由这样的和来近似, 根据定理 3 这是合理的. 本质上, 作为特殊的情形, 定理 4 和定理 5 包括了前面所有关于热问题和波问题在有界区域 (例如, 有限区间, 圆

盘, 球面, 球和长方体区域, 不理会 “角点技术性问题”) 上的结果, 在这些问题中 D.E. 和 B.C.(Dirichlet 或 Neumann) 是齐次的, 且假设 I.C. 中的函数是乘积解的空间部分的有限线性组合. 证明由简单地把所给的解代入 D.E., B.C. 和 I.C. 来验证这些方程满足. (记住对所有的 $q=0,1,2,\cdots$, $\triangle_M u_q = -\lambda_q u_q$. 实际上, 求解过程的困难部分是求出显式表示式或 u_q 和 λ_q 的逼近, 以及用 u_q 令人满意地来表示初始函数. 定理 4 和定理 5 表明解是用 u_q 和 λ_q 来表示的简单表示式.

定理 4(齐次热问题) 对一紧致 k-流形 M,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_t=\kappa\triangle_M u,\quad \text{于 M 上},\quad t\geqslant 0;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & \text{于 } D \text{ 上}\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u(P,0)=f(P)=\sum_{q=0}^{Q}c_q u_q(P)\end{aligned}\tag{11}$$

的解是

$$u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}c_q e^{-\lambda_q\kappa t}u_q(P).\tag{12}$$

定理 5(齐次波问题) 对一紧致 k-流形 M,

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad u_{tt}=a^2\triangle_M u,\quad \text{于 } M \text{ 上},\quad -\infty<t<\infty;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & \text{于 } D \text{ 上},\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}\\&\text{I.C.}\quad u(P,0)=f(P)=\sum_{q=0}^{Q}a_q u_q(P),\quad u_t(P,0)=g(P)=\sum_{q=0}^{Q}b_q u_q(P)\end{aligned}\tag{13}$$

的解是

$$u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\Big(a_q\cos(\sqrt{\lambda_q}at)+\frac{b_q}{a\sqrt{\lambda_q}}\sin(\sqrt{\lambda_q}at)\Big)u_q(P),\tag{14}$$

其中括号中的第二项当 $\lambda_q=0$ 时理解为 $b_q t$.

下面两个定理表明特征函数展开也产生非齐次热方程和非齐次波方程的解,这些方程分别出现在有热源或强迫振动的情形. 证明照样是把所给的解直接代入 D.E.,B.C. 和 I.C. 去验证它们是满足的. 在每种情形, 通过假设解具有形式 $u(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\beta_q(t)u_q(P)$, 把它代入 $D.E.$ 得到关于 $\beta_q(t)(q=0,1,2,\cdots,Q)$ 的常微, 然后求解这些常微, 满足由 I.C. 隐含的初始条件. 作为另一种解法, 可以利用 Duhamel 原理, 根据该原理可通过对相应的一组初值问题 (参看第 3.4 节和第 5.3 节) 的解组成连续叠加 (即, 积分) 来构造解.

定理 6 (带源的热问题) 对一紧致 k–流形 M,

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & u_t(P,t)=\kappa\triangle_M u(P,t)+\varphi(P,t), \quad \text{于 } M \text{ 上}, \quad t\geqslant 0;\\ \text{B.C.} & \begin{cases} u=0, & \text{于 } D \text{ 上},\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上};\end{cases}\\ \text{I.C.} & u(P,0)=0\end{array} \tag{15}$$

带热源 $$\varphi(P,t)=\sum_{q=0}^{Q}\alpha_q(t)u_q(P)$$

的解是 $$u(P,t)=\sum\nolimits_{q=0}^{Q}\left[\left(e^{-\lambda_q\kappa t}\int_0^t e^{\lambda_q\kappa s}\alpha_q(s)ds\right)u_q(P)\right]. \tag{16}$$

定理 7 (带源的波问题) 对一紧致 k–流形 M,

$$\begin{array}{ll}\text{D.E.} & u_{tt}(P,t)=a^2\triangle_M u(P,t)+\varphi(P,t), \quad \text{于 } M \text{ 上}, \quad -\infty<t<\infty;\\ \text{B.C.} & \begin{cases} u=0, & \text{于 } D \text{ 上}\\ \partial_\nu u=0, & \text{于 } N \text{ 上}\end{cases}\\ \text{I.C.} & u(P,0)=0 \quad u_t(P,0)=0\end{array} \tag{17}$$

带源 $$\varphi(P,t)=\sum\nolimits_{q=0}^{Q}\alpha_q(t)u_q(P)$$

的解是 $$u(P,t)=\sum\nolimits_{q=0}^{Q}\left[\left(\int_0^t\frac{\sin[a\sqrt{\lambda_q}(t-s)]}{a\sqrt{\lambda_q}}\alpha_q(s)ds\right)u_q(P)\right]. \tag{18}$$

(当 $\lambda_q=0$ 时我们用到定理 5 中的约定.)

Green 函数

上述定理中的解形式上可重写成由 I.C. 中所给的函数或 D.E. 中非齐次项与问题一确定的核或 Green 函数的卷积, 它可经由特征函数来构造. 在下面的例子中我们来说明这种构造.

例 3 (齐次热问题的核) 形式上求热问题 (11) 解的积分公式.

解 在问题 (11) 的解 (12) 中, 用积分写出 $c_q = \langle f, u_q\rangle$(参看 (8) 和 (9)), 然后在以下的计算中交换求和与积分的次序

$$\begin{aligned} u(P,t) &= \sum_{q=0}^{Q} c_q e^{-\lambda_q \kappa t} u_q(P) = \sum_{q=0}^{Q} \int_M f(P')u_q(P')dM(P')e^{-\lambda_q \kappa t}u_q(P) \\ &= \int_M f(P')\Big(\sum_{q=0}^{Q} e^{-\lambda_q \kappa t}u_q(P)u_q(P')\Big)dM(P'). \end{aligned} \tag{19}$$

给定的 f 形式隐含对 $q > Q$, f 与 u_q 正交. 因此 (19) 中的 Q 可用任一更大的有限数替换. 简单地用 ∞ 来替换是令人感兴趣的, 但这不保证这个和也将是收敛的. 的确, 该级数当 $t=0$ 和 $P=P'$ 时是不收敛的. 可以证明 (参看 [Chavel, 第六章和第七章]), 对 $t>0$, 该级数确实收敛到集合 $\mathbf{R}^+ \times M \times M$ 上三元组 (t,P,P'), $t>0$ 的 C^∞ 函数. 记该和为:

$$H(t,P,P') = \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q \kappa t}u_q(P)u_q(P'), \quad \text{对} \quad \mathbf{R}^+ \times M \times M \text{ 中的 } (t,P,P') \tag{20}$$

而且, 可以证明当初始温度 f 在 M 上是连续的且不必是特征函数的有限线性组合时, 我们有以下 $t>0$ 的 D.E. 和 B.C. 的解 (参看 [Chavel, 第六章和第七章]):

$$u(P,t) = \int_M H(t,P,P')f(P')dM(P'), \quad t>0, \tag{21}$$

和

$$\lim_{t\to 0^+} u(P,t) = f(P). \tag{22}$$

注记 函数 $H(t,P,P')$ 称为**热核**或**M 上热方程的基本解**(对给定的 B.C.). $H(t,P,P')$ 的解释是它表示由在 $t=0$ 时集中在 P' 处的初始热源产生的在时刻 t 在 P 处的温度. 在下个例子后面的注记中, 我们将证明 $H(t,P,P')$ 还出现在非齐次热方程的问题 (15) 的解的积分公式中 (参看 (30)). □

例 4 (带源的热问题的 Green 函数) 用积分公式表示问题 (15) 的解 (16).

解 解 (16) 可写成以下形式

$$\begin{aligned} u(P,t) &= \sum_{q=0}^{Q} e^{-\lambda_q\kappa t}\int_0^t \alpha_q(s)e^{\lambda_q\kappa s}dsu_q(P) \\ &= \int_M\int_0^t \Big(\sum_{q=0}^{Q} e^{-\lambda_q\kappa(t-s)}u_q(P)u_q(P')\Big)\varphi dsdM(P'). \end{aligned} \tag{23}$$

取 $Q=\infty$, 形式定义

$$G(t,P;t',P') = \epsilon(t-t')\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q\kappa(t-t')}u_q(P)u_q(P'), \tag{24}$$

其中

$$\epsilon(s) = \begin{cases} 1, & s \geqslant 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases} \tag{25}$$

问题 (15) 的解 (23) 可写成

$$\boxed{u(P,t) = \int_M\int_0^{\infty} G(t,P;t'P')\varphi(P',t')dt'dM(P'). \quad \square} \tag{26}$$

注记 $\mathbf{R}^+\times M\times\mathbf{R}^+$ 上的函数 G 称为问题 (15) 的**Green 函数**. 如果把热算子 $\partial_t-\kappa\triangle_M$ 作用到 (26) 的两边, 并形式地在积分号下求导, 得到以下涉及 (15) 中的源项 $\varphi(P,t)$ 的方程:

$$\varphi(P,t) = u_t-\kappa\triangle_M u = \int_M\int_0^{\infty}(\partial_t-\kappa\triangle_M)G(t,P;t',P')\varphi(P',t')dM(P'). \tag{27}$$

括号内的表示式不会是一个通常的函数, 而是一个 "广义函数" 或称作在 (t,P) 处的 **Dirac delta** "分布" (参看第 7.4 节的 (33)), 它可不严格地定义为具有以

下性质的广义函数 $\delta(t,P;t',P')$:

$$\varphi(P,t)=\int_M\int_0^\infty \delta(t,P;t',P')\varphi(P',t')dt'dM(P'). \tag{28}$$

于是

$$(\partial_t-\kappa\triangle_M)[G(t,P;t',P')]=\delta(t,P;t',P'). \tag{29}$$

尽管我们不对可解释关系式 (29) 精确含义的分布理论进行深究, 然而可以说最终 (29) 表明由 (26) 的右边所定义的积分算子 $I(\varphi)$ 是微分算子 $\partial_t-\kappa\triangle_M$ 在满足 (15) 的 B.C. 和 I.C. 的充分光滑函数的集合上的逆. 直观上可把 $G(t,P;t',P')$ 看作由在 (P',t') 处的集中点源产生的在 (P,t) 处的温度. 回忆一下在例 3 后面的注记中关于 $H(t,P,P')$ 的解释, 我们应有 $H(t,P,P')=G(t,P;0,P')$, 验证上述的定义, 结果是这样. 更一般地, 有

$$G(t,P;t',P')=H(t-t',P,P'), \tag{30}$$

这表明由在时刻 t' 在 P' 处的源产生的在时刻 t 在 P 处的温度与"初始温度"相同, 如果时间是以 t' 作为起点度量的话. 因此, (30) 可认为是 Duhamel 原理的再形成.

对数值小的 t 和在内点 $M^0\equiv M-\partial M$ 中的 P 和 P', 我们期望 $H(t,P,P')$ 将逼近 $\mathbf{R}^k$ 的热核. 换句话说, 对小的 t, 有

$$H(t,P,P')\sim(4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}}\exp\left(-\frac{d(P,P')^2}{4\kappa t}\right),\quad P,P' \text{ 在 } M^0 \text{ 内}, \tag{31}$$

其中 M^0 中的 P 和 P' 之间的距离 $d(P,P')$ 是小量. 局部上看, M^0 看起来像 $\mathbf{R}^k$. 因此 (31) 应该成立, 因为在 P 处, 由邻近 P' 处的源所起的作用, 在一个短小时间 t 之后逼近在 $\mathbf{R}^k$ 中的效用. 如果在关系式 (20) 中令 $P=P'$ 并对 $H(t,P,P')$ 关于 P 在 M 上积分, 则利用正交性 (参看 (8)), 得

$$\begin{aligned}\int_M H(t,P,P')dM(P)&=\sum_{q=0}^\infty e^{-\lambda_q\kappa t}\int_M u_q(P)^2dM(P)\\&=\sum_{q=0}^\infty e^{-\lambda_q\kappa t}\langle u_q,u_q\rangle=\sum_{q=0}^\infty e^{-\lambda_q\kappa t}.\end{aligned} \tag{32}$$

另一方面, (31) 在 M 上积分 (取 $P=P'$), 得

$$\int_M H(t,P,P')dM(P)\sim(4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}}\mathrm{Vol}(M). \tag{33}$$

比较 (32) 和 (33), 我们得到

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q \kappa t} \sim (4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}} \mathrm{Vol}(M). \tag{34}$$

换言之, M 的体积可由 $\triangle_M$ 的特征值确定. 实际上由 Weyl 公式 (4) 我们已经知道这个结果. 的确, 不难证明 (4) 和 (34) 是等价的, 即可从一个直接推出另一个 (利用 [Feller, p.466] 中的 Karamata Tauberi 定理. 根据 M 的曲率或一般的形状, 存在 (34) 的精细的修正. 的确, 对无边紧致 2–流形 (即 ∂M 是空集) 的情形, 例如像可能是变形的球面, 有一些 (比如 h) 个洞 (例如, 带一个洞的圆环), 我们有更精确的估计 (参看 [Chavel,p.155])

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q \kappa t} \sim \frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi\kappa t} + \frac{1-h}{3}$$

或

$$h = 1 + 3 \lim_{t\to 0^+} \Big[\frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi t} - \sum_{q=0}^{\infty} e^{-\lambda_q t}\Big]. \tag{35}$$

于是, 洞的个数可由特征值确定. 由于特征值可看作振动基本模式的频率平方的负值, 我们可以说一个振动的曲面的曲面面积和洞的个数可以 “听” 出来 (参看第 8.2 节的习题 2), 假设我们能听到任意高的频率的话. □

例 5 (波问题的 Green 函数) 求波问题 (17) 的 Green 函数, 并利用它求出初值问题 (13) 的解的积分公式.

解 如同例 4 中的热问题, 我们把解 (18) 写成

$$u(P,t) = \int_M \int_0^t \Big(\sum_{q=0}^{Q} \frac{\sin[a\sqrt{\lambda_q}(t-t')]}{a\sqrt{\lambda_q}} u_q(P) u_q(P')\Big) \varphi(P',t') dM(P'). \tag{36}$$

因此, 由形式取 $Q=\infty$, 我们得 Green 函数 (关于 ϵ 的定义参看 (25))

$$G(t,P;t',P') = \epsilon(t-t') \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin[a\sqrt{\lambda_q}(t-t')]}{a\sqrt{\lambda_q}} u_q(P) u_q(P'), \tag{37}$$

它 (在分布的意义下) 满足关系式

$$(\partial_{tt}-a^2\triangle_M)G(t,P,t',P')=\delta(t,P,t',P'), \tag{38}$$

于是 $G(t,P,t',P')$ 可认为由集中在 P' 处在时刻 t' 的某个干扰源产生的, 在 P 处在时刻 t 的振幅. 形式上允许 $Q=\infty$, 具齐次 D.E. 的初值问题 (13) 的解 (16) 可写成以下形式

$$\begin{aligned}&\int_M\Big[\Big(\sum_{q=0}^{\infty}\cos(a\sqrt{\lambda_q}t)u_q(P')\Big)f(P')+\Big(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\sin(a\sqrt{\lambda_q}t)}{a\sqrt{\lambda_q}}u_q(P)u_q(P')\Big)g(P')\Big]dM(P')\\&=\int_M\big(-\partial_{t'}G(t,P;0,P')f(P')+G(t,P;0,P')g(P')\big)dM(P')\\&=\int_M\big(G(t,P;0,P')u_{t'}(P',0)-G_{t'}(t,P;0,P')u(P',0)\big)dM(P').\end{aligned} \tag{39}$$

因此, 初值问题 (13) 的解可优美地用 Green 函数表示. 的确, Green 函数 (37) 本质上是初始位置 $u(P,0)$ 为零初始速度分布图可以任意的波问题的核. 于是, Green 函数 $G(t,P;t',P')$ 可解释为由在 P' 处在时刻 t' 的集中速度源产生的在 P 处在时刻 t 的位移. □

例 6 (Poisson 核) 形式求以下 Poisson 问题解的积分公式

$$\begin{aligned}&\text{D.E.}\quad \triangle_M u(P)=h(P),\quad 于\ M\ 上;\\&\text{B.C.}\quad \begin{cases}u=0, & 于\ D\ 上,\\ \partial_\nu u=0, & 于\ N\ 上.\end{cases}\end{aligned} \tag{40}$$

解 D.E. 的两边与 u_q 取内积, 得

$$\langle h,u_q\rangle=\langle\triangle_M u,u_q\rangle=\langle u,\triangle_M u_q\rangle=-\langle u,\lambda_q u_q\rangle=-\lambda_q\langle u,u_q\rangle.$$

因此, 要使有解, 必须有

$$\langle h,u\rangle=0,\quad 如果\quad \lambda_q=0. \tag{41}$$

实际上只有在 $q=0$ 和 $u_0=$ 常数 $\neq 0$ 的情形 λ_q 才会为零, 这出现在 B.C. 中的 D 是空集的时候 (即, 或是 B.C. 是纯 Neumann 条件, 或是 ∂M 是空集; 参看习题 11). 无论如何, 假设 (41) 满足的话, 我们得到以下形式解:

$$u(P)=\sum_{\lambda_q\neq 0}\langle u,u_q\rangle u_q(P)=\sum_{\lambda_q\neq 0}-\lambda_q^{-1}\langle h,u_q\rangle u_q(P)$$

$$= \int_M G(P, P')h(P')dM(P'), \tag{42}$$

其中**Poisson 核**$G(P, P')$ 由下面给出

$$G(P, P') \equiv \sum_{\lambda_q \neq 0} -\lambda_q^{-1} u_q(P) u_q(P'). \quad \square \tag{43}$$

例 7 (稳态热问题) 根据形式运算和 Green 公式 (7) 求以下稳态热问题的假定性解:

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle_M u = 0, \quad 于\ M\ 上; \\ &\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = f, & 于\ D\ 上, \\ \partial_\nu u = g, & 于\ N\ 上. \end{cases} \end{aligned} \tag{44}$$

解 先考虑 $\lambda_0 \neq 0$ 的情形. 根据 (42), 形式上有

$$h(P) = \triangle_M \int_M G(P, P')h(P')dM(P') = \int_M \triangle_M G(P, P')h(P')dM(P'). \tag{45}$$

当 $h(P)$ 是问题 (44) 的一个解 (假设存在)u 时, 我们应用 (45)

$$\begin{aligned} u(P) &= \int_M \triangle_M G(P, P')u(P') - G(P, P')\triangle_M u(P')dM(P') \\ &= \int_{\partial M} \partial_\nu G(P, Q)u(Q) - G(P, Q)\partial_\nu u(Q)d\partial M(Q), \end{aligned} \tag{46}$$

或根据 B.C.,

$$u(P) = \int_{\partial M} \partial_\nu G(P, Q)f(Q) - G(P, Q)g(Q)d\partial M(Q). \tag{47}$$

因此, 在 $\lambda_0 \neq 0$ (即 D 是非空的) 的情形, (47) 提供了 (44) 的假定性解的一个积分公式. 特别, 如果 $D = \partial M$ 且 ∂M 是非空的, 我们注意到 $\partial_\nu G(P, Q)$ 充当了 M 上 Dirichlet 问题的假定性 Poisson 核. 经一些努力 (参看 [Cordes, p.82]), 可以证明 $G(P, P')$ 在 $M \times M$ 上除了 "对角线" $P = P'$ 是 C^∞ 函数. 而且由 (47) 定义的函数 u 在内点 M^0 上是调和的 (即在 M^0 上 $\triangle_M u = 0$), 且如果给定的边界函数 f 是连续的话, 则在边界上 u 可连续地延拓到 f. 现在我们来考虑 D 是空集的情形. 如果 ∂M 也是空集, 则没有边界条件要满足且任意常值函数将满足问题 (44)(参看习题 14). 如果 D 是空集而 ∂M 不是空集, 则 (44) 是 M 上的纯 Neumann 问题, 为了解存在, 有一个相容性条件必须成立. 的确, 利用 Green 公式, 我们有**相容性条件**(参看第 6.1~6.7 节):

$$0 = \int_M 1\triangle_M u - u\triangle_M 1 dM = \int_{\partial M} 1\partial_\nu u - u\partial_\nu 1 d\partial M$$

$$= \int_{\partial M} \partial_\nu u d\partial M = \int_{\partial M} g d\partial M, \tag{48}$$

即, 从物理上看, 为使稳态温度分布存在, 在边界上净指定温度流必等于零. 现假设 u 是 (44) 的解. 则从 u 减去平均 $\bar{u} \equiv \mathrm{Vol}(M)^{-1}\int_M udM$, 我们得到满足 (48) 的函数 $u-\bar{u}$(即 $\langle u-\bar{u}, u_0\rangle = 0$). 从而对 $f = u - \bar{u}$ 应用 (47), 得

$$u(P) - \bar{u} = \int_{\partial M} -G(P,Q)g(Q)d\partial M(Q). \tag{49}$$

显然, 一个 Neumann 问题的任意解加上一个常数得到另一个解, 由此我们有下面的纯 Neumann 问题的形式通解

$$u(P) = \int_{\partial M} -G(P,Q)g(Q)d\partial M(Q) + c, \tag{50}$$

其中 c 是任意常数, 只要相容性条件 (48) 满足. □

概要 8.6

1. 流形: 虽然给出了流形的严格定义, 然而直观说来 $\mathbf{R}^n$ 中一 k-流形 ($k \leqslant n$) 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个光滑 k 维子集, 设为 M, 它可以有一光滑 $k-1$ 维边界 ∂M.

2. Laplace 算子 $\triangle_M$: 定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的一 k-流形 M 上的函数是 C^2 的, 如果它能沿着 (M 的) 法线方向常值延拓成定义在 ($\mathbf{R}^n$ 的) 一个开子集 A 上的 C^2 函数 $\bar{f}$, A 本质上是把 M“变厚” 使其成为一个 n 维的物体. 则 M 上 C^2 函数 f 的 Laplace 算子 $\triangle_M$ 由以下定义: 对 M 中所有的点 P, $\triangle_M f(P) = \triangle \bar{f}(P)$, 其中 $\triangle = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Laplace 算子. 则我们可考虑 M 上标准热方程 ($u_t = k\triangle_M u$) 和标准波方程 ($u_{tt} = a^2\triangle_M u$), 满足初始条件和某种标准边界条件, 比如

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上} \\ \partial_\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}, \end{cases} \tag{S1}$$

其中 $\partial_\nu u$ 是 u 在 ∂M 上的点的外法向导数, N 是 ∂M 与 $\mathbf{R}^n$ 的某个开子集的交集, $D \equiv \partial M - N$, 是 ∂M 中但不是 N 中的点的集合.

3. $\triangle_M$ 的特征函数和特征值: 在求解 $\mathbf{R}^n$ 中 k-流形 M 上的热问题和波问题中头等重要的是确定 $\triangle_M$ 满足 B.C.(S1) 的特征函数. 我们限于紧致 M(即,

M 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭有界子集). 在这种情形, 存在 $\triangle_M$ 满足 B.C.(S1) 的实值特征函数列 $u_0, u_1, u_2, \cdots$, 以及相应的特征值 $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, 满足

$$\triangle_M u_0 = -\lambda_0 u_0, \quad \triangle_M u_1 = -\lambda_1 u_1, \quad \triangle_M u_2 = -\lambda_2 u_2, \cdots$$

其中 (S2)

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \qquad i, j = 0, 1, 2, \cdots.$$

这里 $\langle f, g \rangle \equiv \int_M f\bar{g} dM$ 表示 M 上函数的内积. 其中每个特征值重复的次数等于它的特征空间的维数. 具有不同的特征值的特征函数是正交的事实是 Green 公式:

$$\langle \triangle_M f, g \rangle - \langle f, \triangle_M g \rangle = \int_{\partial M} g(Q)\partial_\nu f(Q) - f(Q)\partial_\nu g(Q) d\partial M(Q)$$

的直接推论.

4. 特征函数展开: 令 f 是 M 上的函数, 使得对 (S2) 中所有的函数 u_q($q = 0, 1, 2, \cdots$), 积分 $\langle f, u_q \rangle$ 存在. 则

$$\mathrm{E}\ f(P) \equiv \sum_{q=0}^{\infty} c_q u_q(P), \quad \text{其中} \quad c_q = \|u_q\|^{-2} \langle f, u_q \rangle = \langle f, u_q \rangle. \tag{S3}$$

如果 f 是 C^m, $m > k/2$ (其中 k 是 M 的维数), 并且满足 B.C.(S1), 则 $\mathrm{E}\ f$ 一致收敛到 f(参看定理 3).

5. 流形上的热问题和波问题: 当初始函数是有限特征函数展开的实用情形时, 比如在实验误差之内展开时 (参看定理 4 和定理 5), 给出了一紧致 k-流形 M 上具 B.C.(S1) 的热方程和波方程的初值问题的解. 当源项是具依赖时间系数的有限特征函数时, 定理 6 和定理 7 提供了对具 B.C.(S1) 的非齐次热方程和波方程的解.

6. Green 函数: 具 B.C.(S1) 的非齐次热方程, 波方程和 Poisson 方程的解可用积分公式表示, 其中非齐次项与所给问题的 Green 函数卷积. 在每种情形, Green 函数都是由 (S2) 中的特征函数 u_q 和特征值 λ_q 构造. 详情见例 3 至例 7.

7. Wely 公式: 对大的 q, 一紧致和连通的 k–流形的特征值 λ_q 的性质受到维数 k 和它的 k 维体积 [Vol(M)] 的影响. 这由以下公式是明显的

$$\text{Weyl 公式:}\quad \lambda_q \sim 4\pi^2\left(\frac{q}{\omega_k \mathrm{Vol}(M)}\right)^{\frac{2}{k}},\quad q\to\infty, \tag{S4}$$

或等价地

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\kappa\lambda_q t} \sim (4\pi\kappa t)^{-\frac{k}{2}}\mathrm{Vol}(M),\quad t\to 0^+. \tag{S5}$$

公式 (S5) 的细化表明 $\mathbf{R}^n$ 中的 k–流形的某种几何 (或 "拓扑") 性质也可由对大的 q 的特征值 λ_q 的行为来确定. 例如, 一无边紧致曲面 (2–流形) 的洞的个数 h 由以下确定

$$\sum_{q=0}^{\infty} e^{-\kappa\lambda_q t} \sim \frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi\kappa t}+\frac{1-h}{3}\quad \text{或}\quad h=1+3\lim_{t\to 0^+}\Big[\frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi t}-\sum_{q=0}^{\infty}e^{-\lambda_q t}\Big].$$

练习 8.6

1. 通过证明例 1 中的映射 F, 对 C 中每点 P 是 B 中某个点 P' 的 $F(P')$, 且 $G(F(P'))=P'$, 现来证明 F 是集合 B 和 C 之间的微分同胚.

2. (a) 设 $f(x,y)$ 是对 xy–平面上所有的 (x,y) 有定义的 C^∞ 函数. 求 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^3$ 上的微分同胚, 使得 xy–平面映到 $f(x,y)$ 的图像上.

(b) (a) 中的微分同胚如何用来证明 $f(x,y)$ 在区域 $x-y\geqslant 0$ 上的图像是 $\mathbf{R}^3$ 中的边界是由形如 $(x,x,f(x,x))$ 的点组成的 2–流形.

提示 需要通过空间的旋转来修改 (a) 中的微分同胚.

3. 证明圆周 $x^2+y^2=1$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无边 1–流形.

4. 证明正方形 $|x|+|y|=1$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 中的 (光滑)1–流形.

提示 证明经微分同胚一条线段不可能映成一 "角点".

5. 验证 Weyl 公式在以下情形的有效性

(a) 半径为 r 的圆周　　(b) 半径为 ρ 的球面　　(c) $L\times M$ 矩形.

提示 关键是回忆起每个特征值重复的次数等于相应的特征空间的维数.

6. 通过直接代入验证定理 4 和定理 5 中的函数 u 确实满足 D.E., B.C. 和 I.C..

7. 对定理 6 和定理 7 做习题 6.

8. 对具带边界 ∂M 的紧致流形, 把下面问题转化成具齐次 B.C. 问题.

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad u_t = \kappa \triangle_M u, \quad \text{于 } M \text{ 上}, \quad t > 0; \\ &\text{B.C.} \quad u(Q,t) = f(Q,t), \quad \text{对 } \partial M \text{ 上所有的 } Q,\ t > 0; \\ &\text{I.C.} \quad u(P,0) = 0, \qquad \text{对 } \partial M \text{ 上所有的 } P. \end{aligned}$$

相应的 "齐次问题" 怎样可形式求解?

提示 为获得一个满足 B.C. 的特别函数, 对每个 $t > 0$ 求解满足所给 B.C. 的 Dirichlet 问题的解.

9. 假设习题 8 中的 B.C. 换成 $\partial_\nu u(Q,t) = f(Q,t)$. 在通过对每个 t 求解 Neumann 问题来找满足 B.C. 的函数会有什么困难? 先通过对每个 t 求解 Poisson D.E. $\triangle w = c(t)$, $c(t) \equiv \mathrm{Vol}(M)^{-1} \int_{\partial M} f(Q,t) d\partial M(Q)$ 这种困难怎样会被克服?

提示 作为 Green 公式的一个特殊情形, 利用

$$\int_M \triangle_M w(P) dM(P) = \int_{\partial M} \partial_\nu w(Q) d\partial M(Q),$$

然后考虑关于 $v = u - w$ 的相应问题.

10. $\mathbf{R}^n$ 中一紧致 k–流形 M 上的向量场把 M 中的每点 P 赋予与 M 相切的向量 $\mathbf{V}(P)$. 令 $\overline{\mathbf{V}}$ 是 $\mathbf{V}$ 在 M 在 $\mathbf{R}^n$ 中一个开子集 A 上的延拓, 它是通过沿着 M 的法线平移 $\mathbf{V}$ 获得. 定义 $\mathbf{V}$ 在 P 处的**散度**(记作 $\mathrm{div}(\mathbf{V})$) 为 $\overline{\mathbf{V}}$ 在 P 处的散度, 即, $\nabla \cdot \overline{\mathbf{V}} \equiv \partial \overline{\mathbf{V}}_1/\partial x_1 + \cdots + \partial \overline{\mathbf{V}}_n/\partial x_n$(在 P 处), 其中 $\overline{\mathbf{V}}_i$ 是 $\overline{\mathbf{V}}$ 第 i 个分量. 紧致 k–流形 M 的 **Gauss散度定理**表明对 M 上任意 C^1 向量 $\mathbf{V}$, 有

$$\int_M \mathrm{div}(\mathbf{V}) dM = \int_{\partial M} \mathbf{V}(Q) \cdot \mathbf{n}(Q) d\partial M(Q),$$

其中 $\mathbf{n}(Q)$ 是在 ∂M 上的点 Q 处的 ∂M 的外法向, 且如果 ∂M 是空集, 右端定义为零.

(a) 证明对 M 上的 C^2 函数 f, 有 $\triangle_M f = \mathrm{div}(\nabla f)$, 其中 ∇f 是 M 上的向量场, 定义为 $\nabla f \equiv \nabla \bar{f} = (\bar{f}_{x_1}, \cdots, \bar{f}_{x_n})$, 其中 $\bar{f}$ 是 f 的延拓, 它在 M 的法线上取常值. (一般在 M 上 $\nabla \bar{f}$ 与 $\overline{\nabla f}$ 之间有区别. 不过有能力的学生应该证明在 M 上 $\nabla \cdot \nabla \bar{f} = \nabla \cdot \overline{\nabla f}$.)

(b) 对 M 上的 C^2 函数 f 和 g, 证明 $\mathrm{div}(f\nabla g) = f\triangle_M g + \nabla f \cdot \nabla g$, 并推导 $f\triangle_M g - g\triangle_M f = \mathrm{div}(f\nabla g - g\nabla f)$.

(c) 由 (a) 和 (b) 部分以及 Gauss 散度定理, 推导 Green 公式 (7):

$$\langle \triangle f, g \rangle - \langle f, \triangle g \rangle = \int_{\partial M} g(Q)\partial_\nu f(Q) - f(Q)\partial_\nu g(Q) d\partial M(Q).$$

11. 设 M 是带边或不带边的紧致 k–流形.

(a) 利用习题 (10) 证明: 对任意 C^1 函数 v 和任意 C^2 函数 w, 有

$$\int_M v\triangle_M w dM = -\int_M \nabla v\cdot\nabla w dM + \int_{\partial M} v\partial_\nu w d\partial M.$$

(b) 利用 (a) 部分证明 $\triangle_M$ 满足标准 B.C.($u=0$ 于 $D\subset\partial M$ 上和 $\partial_\nu u=0$ 于 $N\subset\partial M$ 上(参看定理 1)) 的特征值 λ_n 是非负的, 且仅在 $N=\partial M$ 的情形 (即,B.C. 是纯 Neumann 问题或 ∂M 是空集)$\lambda_0=0$.

(c) 由 (b) 部分得出例 6 中的 Poisson 问题对所有 “好” 函数 h, 在 D 不是空集的情形下 (即, 条件 (41) 则是无意义的) 至少是形式可解的.

12. 证明热方程最大值原理的通常的证明 (参看第 3.2 节的末尾) 对空间区域是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致 k–流形 M 的情形时仍然是有效的.

13. 假设存在带边 ∂M 的紧致流形 M 上的 C^2 函数 v, 满足 $\triangle_M v=1$(或更一般地, $\triangle_M v>0$), 对 M^0 上的能连续地延拓到 ∂M 上的调和函数 u(即, 在 M 的内点 M^0 上 $\triangle_M u=0$) 证明最大值原理 (参看第 6.4 节的定理 1).(注意到当 ∂M 不是空集的情形下这样的函数 v 的存在性由习题 11 的 (c) 部分似乎是可能的.)

提示 对充分小的 $\epsilon>0$, 考虑在 $u+\epsilon v$ 的最大值点处的 Laplace 算式.

14. 假设 M 是无边紧致 k–流形. 利用 Green 公式证明在 M 上不存在 C^2 函数 v, 使得 $\triangle_M v\geqslant 0$, 除非 v 是常数.

15. 令 M 是带边或不带边的紧致 k–流形.

(a) 利用习题 11 的 (a) 部分证明: 对定理 4 中热问题 (11) 的任一 C^2 解 u①, 必有

$$\frac{d}{dt}\int_M u(P,t)^2 dM(P)\leqslant -2\kappa\int_M \|\nabla u\|^2 dM.$$

(b) 利用 (a) 部分的这个事实来证明热问题 (11) 的 C^2 解的唯一性.

16. 设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧致流形 M 上波方程 $u_{tt}=a^2\triangle_M u$ 的解. 考虑能量积分 (参看第 5.1 节的 (12))

$$H(t)=\frac{1}{2}\int_M u_t^2+a^2\|\nabla u\|^2 dM.$$

(a) 证明

$$\begin{aligned}H'(t)&=a^2\int_M u_t\triangle_M u+\nabla u_t\cdot\nabla u dM=a^2\int_M \operatorname{div}(u_t\nabla u)dM\\&=a^2\int_{\partial M} u_t\nabla u\cdot\mathbf{n}d\partial M\end{aligned}$$

①原书遗漏了 u.——译者

(参看习题 10 的 (b) 部分).

(b) 利用 (a) 部分证明以下波问题的唯一性定理:

$$\text{D.E.} \quad u_{tt} = a^2 \triangle_M u, \quad \text{于 } M \text{ 上}, \quad -\infty < t < \infty;$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上}, \\ \partial\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}; \end{cases}$$

$$\text{I.C.} \quad u(P,0) = f(P), \quad u_t(P,0) = g(P), \quad \text{对 } M \text{ 上所有的 } P.$$

17. 证明最多存在一个 C^∞ 函数 $H(t,P,P')$(对 $t > 0$), 使得问题

$$\text{D.E.} \quad u_t = \triangle_M u, \quad \text{于 (紧致流形)} M \text{ 上};$$

$$\text{B.C.} \quad \begin{cases} u = 0, & \text{于 } D \text{ 上}, \\ \partial\nu u = 0, & \text{于 } N \text{ 上}; \end{cases}$$

$$\text{I.C.} \quad u(P,0) = f(P)$$

(参看 (15)) 对每一初始 C^∞ 温度 $f(P)$ 有解

$$u(P,t) = \int_M H(t,P,P') f(P') dM(P'),$$

(即, 热核是唯一的).

提示 对固定的 t 和 P, 为求出 $H(t,P,P')$ 作为 P' 的函数的特征函数展开, 令 $f(P) = u_n(P)$, $n = 0,1,2,\cdots$, 并利用解的唯一性 (参看习题 15).

18. 如果 f 是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上且具有 C^∞ 的周期延拓 $\bar{f}$, 则

$$\text{D.E.} \quad u_t = u_{xx}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \ t > 0;$$

$$\text{B.C.} \quad u(-\pi,t) = u(\pi,t), \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t);$$

$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x)$$

的解 (参看第 7.5 节) 由以下给出

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} \bar{f}(y) dy.$$

(a) 证明 (至少是形式上)

$$u(x,t) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-z-2m\pi)^2/(4t)} \Big) f(z) dz.$$

(b) 由 (a) 和习题 17 推导 (参看第 7.2 节的习题 20)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 t} e^{im(x-z)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x-z-2m\pi)^2/(4t)}.$$

19. 利用练习 6.4 的习题 11—13, 第 8.5 节的例 1 和 (42) 形式证明, 对 $re^{i\theta} \neq r'e^{i\theta'}$, $r < 1$ 和 $r' < 1$,

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\beta_{m,k}^2 J_m'(\beta_{m,k})^2} J_m(r\beta_{m,k})J_m(r'\beta_{m,k})e^{im(\theta-\theta')}$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{1-rr'e^{i(\theta-\theta')}}{re^{i\theta}-r'e^{i\theta'}}\right|.$$

20. 对 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 和 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, 本题证明

$$\begin{aligned} &\text{D.E.} \quad \triangle u = h, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1; \\ &\text{B.C.} \quad u(x, y, z) = 0, \quad \rho = 1 \end{aligned} \tag{$*$}$$

的 Green 函数可写成以下形式:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} - \frac{(\rho')^{-1}}{\|\mathbf{r}-(\rho')^{-2}\mathbf{r}'\|}\Big), \tag{$**$}$$

其中 $\rho' \equiv \|\mathbf{r}'\|$.

(a) 证明

$$\frac{(\rho')^{-1}}{\|\mathbf{r}-(\rho')^{-2}\mathbf{r}'\|} = \frac{\rho^{-1}}{\|\mathbf{r}'-\rho^{-2}\mathbf{r}\|},$$

且当 $\rho = 1$ 时 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$.

提示 验证 $(\rho')^2\|\mathbf{r}-(\rho')^{-2}\mathbf{r}'\|^2 = \rho^2(\rho')^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + 1$.

(b) 如果 $(*)$ 中的 h 在空间上是 C^2 的, 且在某个球外等于零, 证明

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\rho' \leqslant 1} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')h(\mathbf{r}')dx'dy'dz'$$

满足问题 $(*)$. 可以利用 (a) 部分以及为形式验证 B.C., 在积分号下取极限 $\rho \to 1$.

提示 注意到如果 $\rho' < 1$, 则 $(**)$ 中 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的第二项在球 $\rho < 1$ 内是 $\mathbf{r}$ 的调和函数, 然而第一项在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 有奇异性. 因此, 只有 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的第一项对 $\triangle u(\mathbf{r})$ 有影响. 为计算 $\triangle u(\mathbf{r})$, 利用 $x'y'z'$–空间的球坐标, 以 $\mathbf{r}$ 作为原点. 计算与第 6.4 节的习题 9 中所进行的类似.

21. 如同在习题 19 二维单位圆盘的情形所做的, 用球 Bessel 函数和球面调和函数表示习题 (20) 中的 Green 函数.

附录 1 分类定理

本附录证明 (关于两个变量的未知函数) 任意具常系数二阶线性偏微 (即, 下面的形式 (1)) 经变量变换可转化成四个标准类型之一, 即广义波方程, 或广义 Poisson 方程, 或广义热方程或标准退化方程, 分别取决于原先偏微是双曲的, 椭圆的, 抛物的或退化的 (参看第 1.3 节). 因此, 分类定理把对 (1) 的研究转化成对四种标准类型的研究, 通过反转变量变换 (2), 相应的标准偏微的解可变换回原偏微 (1) 的解. 我们特别关注导出区分抛物情形和退化情形的量, 即 $2cd-be$ 和 $2ae-bd$, 因这些量在文献中通常不讨论.

分类定理的证明背后的思想来源于解析几何, 在解析几何中为了把二次方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$$

化成双曲线方程的标准形式 (或一对交于一点的直线), 椭圆方程的标准形式 (或一点或空集), 抛物线方程的标准形式或一对 (可能重合) 平行直线方程的标准形式, 我们利用了坐标旋转和平移. 证明中的关键一步是: 在坐标旋转下**判别式** b^2-4ac 是不变的 (即没有改变).

定理 1 (分类定理)　考虑二阶线性偏微

$$aU_{\xi\xi}+bU_{\xi\tau}+cU_{\tau\tau}+dU_{\xi}+eU_{\tau}+kU=F(\xi,\tau)\quad(a^2+b^2+c^2\neq 0),\tag{1}$$

其中未知函数 $U=U(\xi,\tau)$ 是 C^2 的, a,b,c,d,e 和 k 是给定的实常数, $F(\xi,\tau)$ 是给定的连续函数. 则存在以下形式的变量变换

$$\begin{cases}x=\alpha\xi+\beta\tau,\\ t=-\beta\xi+\alpha\tau,\\ u(x,t)=\frac{1}{\rho}\exp(\gamma\xi+\delta\tau)U(\xi,\tau),\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 和 $\rho(\rho\neq 0)$ 都是实常数, $\alpha^2+\beta^2=1$, 使得 (1) 正好变换成以下形式之一 (其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{K}$ 是实常数, $\mathbf{A}>0$):

(i) $-\mathbf{A}^2u_{xx}+u_{tt}+\mathbf{K}u=f(x,t),$　(3)

如果 $b^2-4ac>0$ (双曲情形);

(ii) $\mathbf{A}^2u_{xx}+u_{tt}+\mathbf{K}u=f(x,t),$　(4)

如果 $b^2-4ac<0$ (椭圆情形);

(iii) $\mathbf{A}^2u_{xx}+u_{t}+\mathbf{K}u=f(x,t),$　(5)

如果 $b^2-4ac=0$, 且 $2cd\neq be$ 或 $2ae\neq bd$ (抛物情形);

(iv) $u_{xx}+\mathbf{K}u=f(x,t),$　(6)

如果 $b^2-4ac=0$, 且 $2cd=be$ 和 $2ae=bd$ (退化情形), 其中 $f(x,t)=\exp[\gamma\xi+\delta\tau]F(\xi,\tau)$, $\xi=\alpha x-\beta t$ 和 $\tau=\beta x+\alpha t$.

证明　我们的做法是把 (1) 的左边用 u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_x, u_t 和 u 来表示, 然后选择常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 和 ρ, 使得左边变成 (在以 $\exp[\gamma\xi+\delta\tau]$ 相乘之后) 所期望的形式之一. 由这种论证, 对给定的方程 (1), 显然只有形式 (3)—(6) 的其中一种能够达到. 记

$$U(\xi,\tau)=\rho e^{\eta}u(x,t),\quad 其中\quad \eta\equiv-(\gamma\xi+\delta\tau).$$

则

$$U_{\xi}=\rho\big(e^{\eta}\eta_{\xi}u+e^{\eta}\eta(u_xx_{\xi}+u_tt_{\xi})\big)=\rho e^{\eta}(\alpha u_x-\beta u_t-\gamma u),$$

和

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= \rho e^{\eta}\eta_{\xi}(\alpha u_x - \beta u_t - \gamma u) \\ &\quad + \rho e^{\eta}\big(\alpha(u_{xx}x_{\xi} + u_{xt}t_{\xi}) - \beta(u_{tx}x_{\xi} + u_{tt}t_{\xi}) - \gamma(u_x x_{\xi} + u_t t_{\xi})\big) \\ &= \rho e^{\eta}\big(\alpha^2 u_{xx} - 2\alpha\beta u_{xt} + \beta^2 u_{tt} - 2\alpha\gamma u_x + 2\beta\gamma u_t + \gamma^2 u\big). \end{aligned}$$

类似地,

$$U_{\tau} = \rho e^{\eta}(\beta u_x + \alpha u_t - \delta u)$$

和

$$U_{\tau\tau} = \rho e^{\eta}\big(\beta^2 u_{xx} + 2\alpha\beta u_{xt} + \alpha^2 u_{tt} - 2\beta\delta u_x - 2\alpha\delta u_t + \delta^2 u\big).$$

而且,

$$U_{\xi\tau} = \rho e^{\eta}\big(\alpha\beta u_{xx} + (\alpha^2 - \beta^2)u_{xt} - \alpha\beta u_{tt} - (\alpha\delta + \beta\gamma)u_x + (\beta\delta - \gamma\alpha)u_t + \delta\gamma u\big).$$

把上述表达式代入 (1), 得

$$\rho e^{\eta}(Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Ku) = F(\xi, \tau), \tag{7}$$

其中

$$A = a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2, \tag{8}$$

$$B = 2(c - a)\alpha\beta + b(\alpha^2 - \beta^2), \tag{9}$$

$$C = a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2, \tag{10}$$

$$D = -a2\alpha\gamma - b(\gamma\beta + \delta\alpha) - c2\beta\delta + d\alpha + e\beta, \tag{11}$$

$$E = a2\beta\gamma + b(\beta\delta - \alpha\gamma) - c2\alpha\delta - d\beta + e\alpha, \tag{12}$$

$$K = a\gamma^2 + b\delta\gamma + c\delta^2 - d\gamma - e\delta + k. \tag{13}$$

利用假设 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 计算表明 $B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\alpha^2 + \beta^2) = (b^2 - 4ac)$(即判别式是不变的). 可选 α 和 β, 使得 $B = 0$. 的确, 因 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 故存在角度 θ 使得 $\alpha = \cos\theta$ 和 $\beta = \sin\theta$. 因此 $\alpha^2 - \beta^2 = \cos(2\theta)$ 和 $2\alpha\beta = \sin(2\theta)$, 为使 $B = 0$, 我们只需选取 θ, 使得单位向量 $(\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ 与向量 $(b, a - c)$ 正交. 于是有 $-4AC = B^2 - 4AC = b^2 - 4ac$. 考虑 $b^2 - 4ac$ 是正的, 负的或等于零的情形.

情形 1 $(-4AC = b^2 - 4ac > 0)$ 这时 A 和 C 必不为零且符号相反. 取 $\rho = C^{-1}$. 则以 e^η 除 (21), 得到形式 (3) (其中 $\mathrm{A}^2 = -A/C > 0$ 和 $\mathrm{K} = K/C$), 只要能证明可以选取 γ 和 δ, 使得 $D = 0$ 和 $E = 0$, 或换言之 (参看 (11) 和 (12)),

$$\begin{cases}(2a\alpha + b\beta)\gamma + (2c\beta + b\alpha)\delta = d\alpha + e\beta \\ (2a\beta - b\alpha)\gamma + (b\beta - 2c\alpha)\delta = d\beta - e\alpha.\end{cases} \tag{14}$$

如果系数矩阵的行列式不为零我们可从该方程组解出 γ 和 δ. 然而, 利用事实 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 有

$$\begin{vmatrix} 2a\alpha + b\beta & 2c\beta + b\alpha \\ 2a\beta - b\alpha & b\beta - 2c\alpha \end{vmatrix} = b^2 - 4ac. \tag{15}$$

因此, 在这种情形可 (唯一) 选取 γ 和 δ, 使得 $D = E = 0$:

$$\gamma = \frac{1}{b^2 - 4ac}\begin{vmatrix} d\alpha + e\beta & 2c\beta + b\alpha \\ d\beta - e\alpha & b\beta - 2c\alpha \end{vmatrix} = \frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}$$

和 (16)

$$\delta = \frac{1}{b^2 - 4ac}\begin{vmatrix} 2a\alpha + b\beta & d\alpha + e\beta \\ 2a\beta - b\alpha & d\beta - e\alpha \end{vmatrix} = \frac{bd - 2ae}{b^2 - 4ac}.$$

情形 2 $(-4AC = b^2 - 4ac < 0)$ 这时 A 和 C 同号. 因 $b^2 - 4ac \neq 0$, 故如同 (16) 可选常数 γ 和 δ, 使得 $D = E = 0$. 取 $\rho = C^{-1}$, 用 e^η 除 (7), 由此得形式 (4).

情形 3 $(-4AC = b^2 - 4ac = 0)$ 这时必有 $A = 0$ 或 $C = 0$. 注意到 A 和 C 不能同时为零. 的确, 根据方程 (8) 和 (10), 有 $0 = A + C = (a + c)(\alpha^2 + \beta^2)$. 则由 $a = -c$, 得 $0 = b^2 - 4ac = b^2 + 4a^2 = b^2 + 2a^2 + 2c^2$ 或 $a = b = c = 0$, 这与方程 (1) 是二阶的假设矛盾. 注意到如果在公式 (8),(9) 和 (10) 中以 β 替换 α 和以 $-\alpha$ 替换 β, 则 B 变成 $-B$(即, 如果 $B = 0$, 则它仍是 0),A 变成 C 以及 C 变成 A. 因此, 在此时的情形, 如果必要, 可改变 α 和 β 的值, 使得 $A \neq 0$ 和 $C = 0$, 同时 $B = 0$. 因 $b^2 - 4ac = 0$, 故不再保证方程组 (14) 可同时解出 γ 和 δ, 使得有 $D = 0$ 和 $E = 0$. 然而, 在 (14) 的第一个方程中, 如果

$$2a\alpha + b\beta \neq 0 \quad 或 \quad 2c\beta + b\alpha \neq 0, \tag{17}$$

则我们至少可选 γ 和 δ 的值, 使得这第一个方程成立 (即 $D = 0$). 为证明 (17) 成立, 我们注意到如果 $2a\alpha + b\beta = 0$ 和 $2c\beta + b\alpha = 0$, 则得到矛盾 $A = 0$. 的确,

由 (8),

$$2A = 2a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + 2c\beta^2 = \alpha(2a\alpha + b\beta) + \beta(2c\beta + b\alpha).$$

因此, 可求得 γ 和 δ , 使得 $D = 0$. 因行列式 (15) 在此时为零, 故方程组 (14) 的解 (γ, δ) 存在当且仅当 (16) 中的分子都为零, 即

$$be = 2cd \quad 和 \quad bd = 2ae. \tag{18}$$

因此, 可以选取 γ 和 δ, 使得 $D = E = 0$ 当且仅当关系式 (18) 都成立. 在这种情形, 通过取 $\rho = A^{-1}$ 并以 e^{η} 除 (7), 得到形式 (6). 如果 (18) 中一个或两个关系式不成立, 我们仍然能选取 γ 和 δ, 使得 $D = 0$. 还能保证 A 和 E 同号. 的确, 注意到如果以 $-\alpha$ 替换 α 和以 $-\beta$ 替换 β, 则 (12) 表明 E 变成 $-E$, 而根据 (8) A 保持不变 (还注意到 B, C 和 D 保持为 0). 则为得到具 $\mathrm{A}^2 = A/E$ 的形式 (5), 取 $\rho = E^{-1}$. □

注记 如果偏微 (1) 的系数允许是 ξ 和 τ 的函数, 则方程的类型可能变化. 例如, 偏微 $U_{\xi\xi} - \xi U_{\tau\tau} = 0$ 有判别式 $b^2 - 4ac = 4\xi$. 因此, 该偏微对 $\xi > 0$ 是双曲的, 对 $\xi < 0$ 是椭圆的, 以及对 $\xi = 0$ 是抛物的. □

附录 2 Fubini 定理

在本书中, 为在积分号下求导是有效的, 我们经常提到 Leibniz 法则, 且为了交换多重积分的积分次序我们不时利用 Fubini 定理 (以意大利数学家 Guido Fubini(1879—1943) 命名, 他大约在 1910 年证明了该结果). 因 Fubini 定理在概念上似乎比 Leibniz 法则简单, 故我们先论及 Fubini 定理. 为说明交换积分次序时需要小心, 我们考虑一些例子.

例 1 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{如果 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果 } (x,y)=(0,0).\end{cases}\tag{1}$$

证明

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx \neq \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy.\tag{2}$$

(2) 的左边是

$$\int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}.$$

然而, (2) 的右边是

$$\int_0^1\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1}dy=\int_0^1\frac{-1}{y^2+1}dy=-\arctan(1)=-\frac{\pi}{4}.$$

实际上, 由事实 $f(y,x)=-f(x,y)$, 我们可得出 (2) 的两边有相反符号, 所以证明一边非零就足够了. □

例 2　令 $f(x,y)=(2xy-x^2y^2)e^{-xy}$. 该函数在整个 xy–平面上是 C^∞, 然而我们将证明

$$\int_0^1\int_0^\infty f(x,y)dydx \neq \int_0^\infty\int_0^1 f(x,y)dxdy. \tag{3}$$

对 $x>0$, 有

$$\int_0^\infty f(x,y)dy=\lim_{R\to\infty}\int_0^R (2xy-x^2y^2)e^{-xy}dy=\lim_{R\to\infty}\left[xy^2e^{-xy}\right]_{y=0}^{y=R}=0.$$

因 $f(0,y)=0$, 故当 $x=0$ 时也得到同样的结果. 因此, (3) 的左边是 0. 然而, (3) 的右边是

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^1(2xy-x^2y^2)e^{-xy}dxdy &= \int_0^\infty\left[x^2ye^{-xy}\right]_{x=0}^{x=1}dy\\ &=\int_0^\infty ye^{-y}dy=\lim_{R\to\infty}\left[-e^{-y}-ye^{-y}\right]_{y=0}^{y=R}=1.\end{aligned}$$ □

虽然这些例子表明一般积分次序会很重要, 然而 Fubini 定理的以下形式给出了不改变结果积分次序可交换的准则. 这不是 Fubini 定理最一般的形式, 但对我们的应用是足够的.

Fubini 定理　令 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$ 和 $-\infty\leqslant c<d\leqslant\infty$. 设 $f(x,y)$ 在区域$a<x<b,\ c<y<d$ 上可能除去由有限多条线段的并组成的集合之外是连续函数. 假设

$$\int_c^d\int_a^b|f(x,y)|dxdy<\infty \quad 或 \quad \int_a^b\int_c^d|f(x,y)|dydx<\infty. \tag{4}$$

则

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx. \tag{5}$$

注记　如果 $f(x,y)\geqslant 0$, 则 (5) 成立, 即使 (4) 不成立. 的确, 如果 $f(x,y)\geqslant 0$ 且 (4) 不成立, 则 (5) 的两边都是 $+\infty$, 因 $|f(x,y)|=f(x,y)$. 自然, 因在例 1 和例 2 中 (5) 不成立, 尽管 (5) 的两边都是有限的, 故必是对在这些例子中的函数

$f(x, y)$ 条件 (4) 不满足的情形, 因这些函数满足 Fubini 定理的连续性条件. 我们把这些例子中 (4) 不成立的验证留给有兴趣的读者. 在一些附加假设下, 在附录 3 的末尾我们将给出部分基于 Leibniz 法则的 Fubini 定理的证明. 现在我们提供以下直观的解释. (5) 的两边应该表示函数的图像和 xy–平面之间的净体积, 其中当图像在 xy–平面下面时体积认为负的. 两边只是表示体积元 $f(x, y)dxdy$ 求和的两种方式. 如果在 xy–平面上的总体积, 记作 V^+ 是有限的, 以及在 xy–平面下的总体积, 记作 V^- 是有限的 (即, 如果积分 (4) 中的任一个是有限.), 则计算净体积的两种方法应该得出相同的结果, 即 $V^+ - V^-$(即 (5) 应该成立). 然而, 如果 V^+ 或 V^- 都是无穷的, 则 $V^+ - V^-$ 是 $\infty - \infty$, 这是不确定的 (例如, $\lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty$ 和 $\lim_{x\to\infty}(x-1) = \infty$, 但 $\lim_{x\to\infty}[(x+1)-(x-1)] = 2$, 而 $\lim_{x\to\infty}[(x-1)-(x+1)] = -2$). 的确, 计算体积元的一种方法在求和过程中可能从 V^+ 提取比从 V^- 提取多, 而另一种计算方法可能从 V^- 提取比从 V^+ 多. 上述的例 1 就发生过这种情况. □

附录 3 Leibniz 法则

在叙述和证明 Leibniz 法则之前, 我们先给出一些例子, 说明在积分号下求导数并不总是得出正确结果.

例 1 对 x 的每个正值, 有

$$I(x) \equiv \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{y} dy = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(xy)}{y} dy = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

的确, 从 y 到 $z = xy$ 的变量变换表明 $I(x)$ 与正数 x 的选取无关, 则当 $x = 1$ 时结果 (1) 在第七章最后的补充中已被证明. 因此, 有

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{y} dy = I'(x) = 0. \tag{2}$$

然而, 如果我们在积分之前先在积分号下求导, 得

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin(xy)}{y} \right) dy = \int_0^\infty \cos(xy) dy = \lim_{R\to\infty} \frac{\sin(xR)}{x}, \tag{3}$$

此极限不存在. 因 0 存在, 故 (2) 和 (3) 不相等, 即

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{y} dy \neq \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\sin(xy)}{y}) dy \quad (x > 0).$$

因此, 当在积分号下求导数时我们没得到相同的结果. 的确, 我们什么也没得到.

□

例 2 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{|x-y|}, & \text{如果} \quad x\neq y,\\ 0, & \text{如果} \quad x=y,\end{cases}$$

即, 如果 $x>y$, $f(x,y)=1$; 如果 $x<y$, $f(x,y)=-1$; 如果 $x=y$, $f(x,y)=0$. $f(x,y)$ 在区域 $x>y$ 上的图像是水平半平面. 因此, 对 $x>y$, $f_x(x,y)=0$. 类似地, 对 $x<y$, $f_x(x,y)=0$. 当 $y=x$ 时, f_x 不存在. 回忆起一个 (单变量) 函数在有限点重新定义或无定义, 它的定积分经这种变化不受影响. 特别, 对任意固定的 x, 变量 y 的函数 $f_x(x,y)$, 除去没有定义的一个点 (即在 x) 之外等于零, 从而它关于 y 在任意区间上的积分等于零. 于是, $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy=0$. 另一方面,

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^x 1dy+\int_x^1(-1)dy=x-(1-x)=2x-1.$$

因此,

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)dy=2\neq 0=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy.$$

于是, 我们不能在积分号下求导数而保持结果不变. □

例 3 令 $f(x,y)=\frac{x^2}{y^2}e^{-x/y}$, $(y>0)$ 和 $f(x,0)=0$. 则

$$h(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 x\frac{d}{dy}(e^{-x/y})dy=xe^{-x}.$$

因此,

$$h'(x)=(1-x)e^{-x} \quad \text{和} \quad h'(0)=1.$$

然而,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(\frac{2x}{y^2}-\frac{x^2}{y^3})e^{-x/y}, \quad \text{所以} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0.$$

从而

$$\left(\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)dy\right)_{x=0}=h'(0)=1\neq 0=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)dy.$$ □

虽然上述例子表明积分号下求导一般是不正确的, 但 Leibniz 法则提供了一个准则, 在该准则下这种运算是允许的. 我们的证明依靠以下关于 Riemann 积分的控制收敛定理的初等形式. 该定理给出了可在积分号下取极限的准则. 证明由 [Lewin, 1986, 1988] 得到启发.

控制收敛定理 令 $f(x)$ 和 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是定义在某个非空实数区间 I 上分段连续函数 (I 可以是开的或闭的, 有限的或无穷的). 假设对 I 中的每个 x, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. 假设存在分段连续函数 $g(x)\geqslant 0$, 使得 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$, 且 $g(x)$ 在 I 上的积分, 记作$\int_I g(x)dx$, 是有限的. (称函数列 $f_n(x)$ 由可积函数 $g(x)$ 控制.) 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)dx=\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_I f(x)dx. \tag{4}$$

证明 注意到

$$\left|\int_I f_n(x)dx-\int_I f(x)dx\right|\leqslant\int_I |f_n(x)-f(x)|dx. \tag{5}$$

因此, 为证 (4) 只需证明通过取 n 充分大, (5) 的右边可任意小. 现由 (5) 我们只需对 $f_n\geqslant 0$ 和 $f=0$ 的情形来证明本定理是真的 (即以 $|f_n(x)-f(x)|$ 替换 f_n, 以 $2g(x)$ 替换 $g(x)$). 自此我们假设 $f_n(x)\geqslant 0$ 和 $f=0$. 令 L 是任意正实数, 令 J 是 I 中满足 $|x|>L$ 的点 x 的集合. 因 $\int_I g(x)dx<\infty$, 故通过取 L 足够大, 可使 $\int_J g(x)dx$ 任意小. 而且由于 $0\leqslant f_n(x)\leqslant g(x)$, 故通过取 L 足够大, 也可使 $\int_J f_n(x)dx$ 任意小 (同时对所有的 n). 令 K 是 I 中不属于 J 中的点的集合. 因此, K 是包含在 $[-L,L]$ 内的有限区间. 剩下来要证明 $\lim_{n\to\infty}\int_K f_n(x)dx=0$.

定义在 K 上的**阶梯函数**在 K 中有限多个子区间的每个子区间上都是常数, 且在 K 中其他处为零. 因在闭区间上分段连续函数是 Riemann 可积的, 故知 $\int_K f_n(x)dx$ 可由下和任意逼近. 换言之, 存在阶梯函数 $s_n(x)$, 使得对 K 中所有的 x, 有 $0\leqslant s_n(x)\leqslant f_n(x)$, 且

$$0\leqslant\int_K f_n(x)dx\leqslant\int_K s_n(x)dx+\frac{1}{n}.$$

因此, 只需证明 $\lim_{n\to\infty}\int_K s_n(x)dx=0$. 令 $G(x)$ 是定义在 K 上的阶梯函数, 使得对 K 中所有的 x, 有 $G(x)\geqslant g(x)$, 且 $\int_K G(x)dx\leqslant\int_K g(x)dx+1<\infty$. 对任意固定的 $\epsilon>0$, 令

$$E_n=\{x\in K:\ s_n(x)>\epsilon G(x)\}\quad 和\quad T_n=\{x\in K:\ s_n(x)\leqslant\epsilon G(x)\}.$$

因 s_n 和 G 都是阶梯函数, 故 E_n 和 T_n 是有限多个区间的并. 则

$$\begin{aligned}\int_K s_n(x)dx &= \int_{E_n} s_n(x)dx + \int_{T_n} s_n(x)dx \leqslant \int_{E_n} s_n(x)dx + \int_{T_n} \epsilon G(x)dx \\ &\leqslant \int_{E_n} G(x)dx + \epsilon\left(\int_K g(x)dx + 1\right),\end{aligned}$$

其中我们利用了对 E_n 中的 x, 有 $s_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x) \leqslant G(x)$. 因此,

$$\int_K s_n(x)dx \leqslant \mu(E_n) + \epsilon\left(\int_K g(x)dx + 1\right), \tag{6}$$

其中 $\mu(A) \equiv \int_A G(x)dx$, A 是 K 中由有限多个子区间的并组成的任意子集. 称这样的子集 A 为**基本的**. 因 ϵ 是任意的, 故只需证明 $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

$$\text{令} \quad F_n = \bigcup_{m\geqslant n} E_m = \{x \in K : s_m(x) > \epsilon G(x) \quad \text{至少有一个 } m \geqslant n\}. \tag{7}$$

注意到 $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$(即集合 F_n 随 n 增加而 “收缩”). 不存在属于所有集合 F_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的点, 因为 $f_n(x)$ 收敛到 0 且在 K 上 $f_n(x) \geqslant s_n(x)$(即使对某个 x, $\epsilon G(x) = 0$, 我们仍然有 $0 \leqslant s_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x) \leqslant G(x) = 0$, 即对所有的 n, 有 $s_n(x) = 0$, 因此 x 不属于集合 F_n.) 回忆到我们想证明 $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. 假设不对, 则存在常数 c, 使得对无穷多个 n 有 $\mu(E_n) > c > 0$. 对每个 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 令 H_n 是 F_n 的子集, 使得 H_n 由有限多个闭区间组成, 且对 F_n 中每个基本子集 A, 有

$$\mu(H_n) > \mu(A) - c2^{-n}. \tag{8}$$

注意到 $\mu(A) < \mu(K) < \infty$, 所以 H_n 存在. 令

$$Z_n \equiv \bigcap_{m\leqslant n} H_m = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n.$$

则 Z_n 构成一个收缩的闭有界集列, 且如果它们都不是空集的话必存在交集中的点.(对每个 n, 从 Z_n 中选一点 p_n, 并注意到由附录 4 的 Bolzano-Weierstrass 定理, p_n 有收敛到属于每个闭有界集 Z_n 的一个点的子列.) 然而, 不存在点属于每个 Z_n, 因 $Z_n \subset H_n \subset F_n$ 以及 F_n 没有公共点. 因此, 对某个 n_0, Z_{n_0} 必是空集, 于是对所有 $n \geqslant n_0$, Z_n 是空集. 然而, 对 $n \geqslant n_0$ 和 $0 \leqslant i \leqslant n$, E_n 是 F_i 的子集, $H_i \cup E_n$ 是 F_i 的由有限多个区间组成的子集. 由 (8), 有

$$\mu(H_i) \geqslant \mu(E_n \cup H_i) - c2^{-i} = \mu(E_n - H_i) + \mu(H_i) - c2^{-i}$$

或 $\mu(E_n - H_i) \leqslant c2^{-i}$. 则对 $n > n_0$, 有

$$\mu(E_n) = \mu(E_n - Z_n) \leqslant \mu(E_n - H_1) + \cdots + \mu(E_n - H_n) \leqslant (2^{-1} + \cdots + 2^{-n})c < c. \quad (9)$$

现 (9) 与我们以下的假设矛盾: 对无穷多个 n, $\mu(E_n) > c$. 因此, 假设 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) \neq 0$ 是错误的, 从而 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$ 为真. 于是由 (6), 通过先取 ϵ 很小, 然后取 n 足够大, 可使 $\int_K s_n(x)dx$ 如期望的那样小. □

在许多情形, 以下控制收敛定理的 "连续" 形式是方便的, 它相当容易从上述 "离散" 形式得到.

推论 (控制收敛定理 —— 连续形式) 对包含 h_0 的某个区间 H 内的每个实数 h, 令 $F(x,h)$ 是定义在某个非空实数区间 I(可能是开的或闭的, 有限的或无穷的) 上 x 的分段连续函数. 假设 $f(x) = \lim_{h\to h_0} F(x,h)$ 是 I 上分段连续的. 假设存在分段连续函数 $g(x) \geqslant 0$, 使得对所有的 $x \in I$ 和 $h \in H$, 有 $|F(x,h)| \leqslant g(x)$, 以及 $g(x)$ 在 I 上的积分是有限的, 该积分记为 $\int_I g(x)dx$. 则

$$\lim_{h\to h_0}\int_I F(x,h)dx = \int_I \lim_{h\to h_0} F(x,h)dx = \int_I f(x)dx. \quad (4')$$

证明 令 $h_1, h_2, \cdots$ 是 H 中任意点列, 使得 $\lim_{n\to\infty} h_n = h_0$. 令 $f_n(x) = F(x,h_n)$. 因 $f(x)$ 和 $f_n(x)$ 满足控制收敛定理的假设以及数列 $h_1, h_2, \cdots$ 可任意接近 h_0, 故有

$$\lim_{h\to h_0}\int_I F(x,h)dx = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx = \int_I \lim_{h\to h_0} F(x,h)dx. \quad □$$

定理 (Leibniz 法则) 令 R 是 xt–平面中的区域 $-\infty \leqslant c < x < d \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant a < t < b \leqslant +\infty$. 令 $f(x,t)$ 是定义在 R 上的连续函数, 使得 $f_t(x,t)$ 在R 上也是连续的. 并假设对 (a,b) 内每个 t, $\int_c^d |f(x,t)|dx < \infty$. 假设存在分段连续函数 $g(x)$, 使得对 R 中所有的 (x,t),

$$|f_t(x,t)| \leqslant g(x) \quad \text{和} \quad \int_c^d g(x)dx < \infty. \tag{10}$$

则

$$\frac{d}{dt}\int_c^d f(x,t)dx = \int_c^d \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \quad (a < t < b). \tag{11}$$

如果 c 和 d 是有限的, 且 $f(x,t)$ 和 $f_t(x,t)$ 在区域 $c \leqslant x \leqslant d$ 和 $a < t < b$ (包括端点 $x = c$ 和 $x = d$) 上连续, 则不需要 (10) 就可得到 (11).

证明 由导数的定义, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_c^d f(x,t)dx &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_c^d f(x,t+h)dx - \int_c^d f(x,t)dx\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\int_c^d \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}dx.\end{aligned}$$

下面证明在积分号下求导数是正当的. 利用微积分的基本定理及假设 $|f_t(x,t)| \leqslant g(x)$, 有

$$|f(x,t+h) - f(x,t)| = \left|\int_t^{t+h} f_t(x,s)ds\right| \leqslant \left|\int_t^{t+h} |f_t(x,s)|ds\right| \leqslant g(x)|h|$$

或

$$\left|\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right| \leqslant g(x).$$

因此, 可利用 (4′)(参看上述的推论), 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_c^d f(x,t)dx &= \lim_{h\to 0}\int_c^d \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}dx\\ &= \lim_{h\to 0}\int_c^d \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}dx = \int_c^d \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx.\end{aligned}$$

现在来证明本定理的最后断言. 对任意 $t \in (a,b)$, 选 α 和 β, 使得 $a < \alpha \leqslant t \leqslant \beta < b$. 如果 c 和 d 是有限的, 且 $f_t(x,t)$ 在闭矩形区域 $c \leqslant x \leqslant d$, $a < \alpha \leqslant$

$t \leqslant \beta < b$ 上连续, 则可选函数 $g(x)$ ((10) 中要求的, 但现在 $t \in (\alpha, \beta)$) 为等于 $|f_t(x,t)|$ 在该闭矩形区域上的最大值的常值函数. 在附录 4 中独立地证明了该最大值的存在性, 在附录 4 证明了在闭矩形上的连续函数 (例如, $|f_t|$) 有最大值. 令最大值为 M, 我们有 $\int_c^d g(x)dx = M(d-c) < \infty$. 因此, 在该情形假设 (10) 满足, 于是本定理最后断言得证. □

注记 (推广) Leibniz 法则的更一般形式表明, 如果 $f(x,t)$ 满足上面定理中的假设, $c(t)$ 和 $d(t)$ 是 C^1 函数, 对 $a < t < b$ 满足 $c < c(t)$ 和 $d(t) < d$, 则

$$\frac{d}{dt}\int_{c(t)}^{d(t)} f(x,t)dx = f(d(t),t)d'(t) - f(c(t),t)c'(t) + \int_{c(t)}^{d(t)} f_t(x,t)dx. \tag{12}$$

该结果的证明过程如同第 3.4 节中定理 1(Duhamel 原理) 前的引理的证明. 换言之, 考虑函数 $H(w,z,t) = \int_w^z f(x,t)dx$, 则由链法则

$$\frac{d}{dt}\big(H(c(t),d(t),t)\big) = H_w c'(t) + H_z d'(t) + H_t,$$

微积分基本定理和 Leibniz 法则立刻得 (12). 我们还提及控制收敛定理和 Leibniz 法则可以没有更多困难地推广到多重积分的情形. 而且, 当 $f(x,t)$ 是 t 的连续函数, 但关于 x 仅是分段连续, 且 $f_t(x,t)$ 关于 t 是分段连续时, 上述 Leibniz 法则的证明仍然有效. 作为一个推论, 易证以下有关函数无穷级数逐项求导的有用结果. □

定理 (级数的逐项求导) 令 $f_1(t), f_2(t), \cdots$ 是定义在 (c,d) 上 C^1 函数列, 其中 $-\infty \leqslant c < d \leqslant \infty$. 假设存在常数 M_n, 使得 $|f_n'(t)| \leqslant M_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ 对 (c,d) 中每个 t 是收敛的, 则

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t).\right) \tag{13}$$

证明 定义 $f(x,t) = f_n(t)$, $n-1 \leqslant x \leqslant n$, $n = 1, 2, \cdots$. 注意到 $f_t(x,t)$ 关于 t 是连续的, 关于 x 是分段连续的 (参看上述注记的结束部分). 并令 $g(x) = M_n$, $n-1 \leqslant x \leqslant n$, $n = 1, 2, \cdots$. 则 $|f_t(x,t)| \leqslant g(x)$ 以及 $\int_0^{\infty} g(x)dx =$

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. 因此, 由 Leibniz 法则, 得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^{\infty} f(x,t)dx\right) = \int_0^{\infty} f_t(x,t)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t). \qquad \square$$

下面的 Fubini 定理的证明也要用到 Leibniz 法则:

带一些新假设的 Fubini 定理 (见附录 2 中的叙述) **的证明** 除了附录 2 的 Fubini 定理中的假设之外, 此处我们还假设:

1. $f(x,y)$ 在任意闭子矩形 $a < x < b$, $c < y < d$ 上有界.

2. 函数 $f(x,y)$ 关于 x 和关于 y 是分段连续的.

3. 对所有满足 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ 的 α 和 β, 积分 $\int_\alpha^\beta f(x,y)dx$ 和 $\int_\alpha^\beta |f(x,y)|dx$ 是 y 的分段连续函数.

4. 对所有满足 $c \leqslant \gamma < \delta \leqslant d$ 的 γ 和 δ, 积分 $\int_\gamma^\delta f(x,y)dy$ 和 $\int_\gamma^\delta |f(x,y)|dy$ 是 x 的分段连续函数.

假设 $\int_c^d \int_a^b |f(x,y)|dxdy < \infty$. 证明

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

由对称性得到另一种情形. 对 $c < y < d$, 令

$$G(x,y) = \int_c^y f(x,z)dz,$$

对 $a < \alpha < \beta < b$, 令

$$H(y) = \int_\alpha^\beta G(x,y)dx.$$

对使 $f(x,y)$ 在 $y = y_0$ 是 y 的连续函数的任意 x 值, 由微积分基本定理, 有 $G_y(x,y_0) = f(x,y_0)$. 因此, 由关于 $f(x,y)$ 的假设, $G_y(x,y)$ 是在任意闭子矩形上有界的 x 和 y 的分段连续函数. 而且, 利用 $f(x,y)$ 在闭子矩形上的有界性, 可知 $G(x,y)$ 对每个 x 是 y 的连续函数 (为什么?). 于是, 由 Leibniz 法则 (同样参看上述注记结束部分),

$$H'(y) = \int_\alpha^\beta G_y(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(x,y)dx.$$

则由微积分基本定理, 得

$$\int_\alpha^\beta \int_c^d f(x,y)dydx = H(d) = \int_c^d H'(y)dy = \int_c^d \int_\alpha^\beta G_y(x,y)dxdy$$
$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy.$$

现在

$$\int_\alpha^b \int_c^d f(x,y)dydx = \lim_{\beta\to b}\int_\alpha^\beta \int_c^d f(x,y)dydx = \lim_{\beta\to b}\int_c^d \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy.$$

对 $c < y < d,\ \alpha < \beta < b$, 令 $F(\beta,y) = \int_\alpha^\beta f(x,y)dx$. 则由假设,[1]

$$|F(\beta,y)| \leqslant g(y) \equiv \int_a^b |f(x,y)|dx \quad 和 \quad \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \int_a^b |f(x,y)|dxdy < \infty.$$

因此, 由控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to b}\int_c^d \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy &= \lim_{\beta\to b}\int_c^d F(\beta,y)dy = \int_c^d \lim_{\beta\to b} F(\beta,y)dy \\ &= \int_c^d \int_\alpha^b f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

对极限 $a \to \alpha$ 利用类似的论证, 得到期望的结果. □

[1]原书下式中的 $\int_c^d g(y)dy$ 误作 $\int_c^d g(y)dx$.——译者

附录 4 最大值最小值定理

不是每个函数都有最大值或最小值. 例如, 函数 $f(x) = x^3(-\infty < x < \infty)$ 没有最大值和最小值. 还有, 即使函数 $f(x) = \arctan x$ 有任意接近 $\frac{\pi}{2}$ 的值, 但对任何实数 x 不能达到该值. 本节的目的是找出确保一个多变量函数在给定的区域内的点处达到最大值和最小值的准则. 作为具体的, 我们讨论 xy–平面 (即 $\mathbf{R}^2$) 的子集和函数 $f(x, y)$, 但所有这些考虑可容易推广到 n 变量的情形, $n = 1, 2, 3, \cdots$. $\mathbf{R}^2$ 的子集 C 是**闭的**, 如果每个 C 中的收敛点列的极限点本身在 C 内, 例如, 一矩形区域是闭的, 仅当这些边缘包含在该区域. $\mathbf{R}^2$ 的子集是**有界的**, 如果它能包含在一个充分大 (但是有限的) 正方形内. 例如, 圆盘是有界的, 但半平面不是有界的. 定义在 $\mathbf{R}^2$ 的子集 C 上的函数是**连续的**, 如果对 C 内每个点列 $p_n = (x_n, y_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 它收敛于 C 中的某点 $p = (x, y)$, 有函数值 $f(p_n)$ 列收敛到值 $f(p)$. (有其他连续的等价定义, 但这个定义对我们的目的是方便的.) 我们主要目的是证明最大值最小值定理, 该定理表明在一闭有界子集上有定义且连续的函数有最大值和最小值. 为了证明, 我们需要以下结果.

定理 1($\mathbf{R}^2$ 上 Bolzano-Weierstrass 定理) 令 $p_n = (x_n, y_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是构成 $\mathbf{R}^2$ 的有界子集 B 的点列. 则该点列存在收敛的子列.

证明 为方便起见, 我们均匀收缩和平移该有界集 B, 使得它落在单位正

方形 $\{(x,y): 0<x,\ y<1\}$ 内. 令 $D=\{0,1,2,\cdots,9\}$ 是十进制展开所有可能数字的集合. D 中存在数字 a_1 和 b_1, 使得对无穷多个 n 的值, x_n 的十进制展开以 $0.a_1$ 开始, y_n 的十进制展开以 $0.b_1$ 开始. 令 N_1 是所有这些 n 的值的集合. 存在数字 a_2 和 b_2, 使得对 N_1 中无穷多个 n 的值, x_n 和 y_n 的十进制展开分别以 $0.a_1a_2$ 和 $0.b_1b_2$ 开始. 令 N_2 是由这些 n 的值组成的 N_1 中的 (无穷) 子集. 类似地, 可构造无穷集 $N_3,N_4,N_5,\cdots$(每个包含在前一个内). 对 N_1 中某个 n_1, 令 $q_1=p_{n_1}$, 对 N_2 中某个 n_2(大于 n_1), 令 $q_2=p_{n_2}$, 类似地定义 $q_3,q_4,\cdots$. 令 $q=(0.a_1a_2a_3\cdots,\ 0.b_1b_2b_3\cdots)$. 由于 q_n 到 q 的距离 $\leqslant[(10^{-n})^2+(10^{-n})^2]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}10^{-n}$, 故子列 $q_1,q_2,q_3,\cdots$ 收敛到 q. □

最大值最小值定理　令 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 的闭有界非空子集 C 上的连续函数. 则 C 中存在点 $(\underline{x},\underline{y})$ 和 $(\bar{x},\bar{y})$, 使得对 C 中所有的 (x,y), 有

$$f(\underline{x},\underline{y})\leqslant f(x,y)\leqslant f(\bar{x},\bar{y}).$$

特别, 对某个常数 K, 有 $|f(x,y)|\leqslant K$.

证明　先证明存在常数 M, 使得 $f(x,y)<M$. 如果常数 M 不存在, 则可找出点列 $p_1,p_2,p_3,\cdots$, 使得 $f(p_n)>n$. 由定理 1, 存在收敛于闭有界集 C 中某点 q 的子列 $q_1,q_2,q_3,\cdots$. 然而因假设 f 是连续的, 故有 $f(q)=\lim_{n\to\infty}f(q_n)$, 该极限不存在. 这与 f 在 C 中所有的点有定义矛盾. 令 S 是当 (x,y) 取遍 C 时所有值 $f(x,y)$ 的集合. 对任意实数 r 和正整数 n, 令 $r[n]$ 是 r 在第 n 位十进制的截断 (即, $\sqrt{2}[3]=1.414$). 令 s_n 是 S 中的数, 使得 $s_n[n]$ 是最大的. s_n 的存在性由大于 S 中所有数的常数 M 的存在性来保证. 令 s 是对所有的 $n=1,2,3,\cdots$ 满足 $s[n]=s_n[n]$ 的实数. 根据构造, S 中所有的数小于或等于 s. 因此, 如果能证明存在 C 中的点 $(\bar{x},\bar{y})$, 使得 $f(\bar{x},\bar{y})=s$, 则对 C 中所有的 (x,y), $f(x,y)\leqslant f(\bar{x},\bar{y})$. 令 $P_n=(x_n,y_n)$ 是 C 中的点, 使得 $f(x_n,y_n)=s_n$, s_n 定义如上. 由定理 1, 数列 $P_1,P_2,P_3,\cdots$ 有收敛于闭有界集 C 内某点 Q 的子列 $Q_1,Q_2,Q_3,\cdots$ (比如 $Q_i=P_{n_i},\ i=1,2,\cdots$). 由 f 的连续性, 我们有 $f(Q)=\lim_{i\to\infty}f(Q_i)=\lim_{i\to\infty}s_{n_i}=s$. 因此, Q 可作为点 $(\bar{x},\bar{y})$, 使得 $f(x,y)\leqslant f(\bar{x},\bar{y})$. 因 $-f(x,y)$ 也在 C 上连续, 故现在得知也存在某点 $(\underline{x},\underline{y})$, 使得对 C 中所有的 (x,y), $-f(x,y)\leqslant -f\ (\underline{x},\underline{y})$ (或 $f(\underline{x},\underline{y})\leqslant f(x,y)$). □

注记　最大值最小值定理一个更常见的证明如下. 令 M_0 是最小的常数, 它大于或等于当 (x,y) 取遍 C 时所有的值 $f(x,y)$. 因我们已经证明对某个常数

M, $f(x,y) < M$, 故 M_0 的存在性由所谓的**上确界公理**得到. 该公理表明每个有上界的实数集有上确界. 在上述 "构造性" 证明中我们刻意避免该公理. 然而, 如果利用该公理, 则我们只需证明对 C 内某个 (x_0, y_0), $M_0 = f(x_0, y_0)$. 如果不是这样, 则 $g(x,y) = [M_0 - f(x,y)]^{-1}$ 在 C 上连续 (为什么?). 因此, 对某个正常数 K, $g(x,y) < K$. 于是 $M_0 - f(x,y) = g(x,y)^{-1} > K^{-1}$, 或 $f(x,y) < M_0 - K^{-1}$, 与 M_0 的定义矛盾. □

附录 5　Fourier 变换表[①]

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)\left(=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx\right)$
1. $f'(x)$	$i\xi\hat{f}(\xi)$
2. $f^{(m)}(x)\quad(m=0,1,2,\ldots)$	$i^m\xi^m\hat{f}(\xi)$
3. $xf(x)$	$i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$
4. $x^mf(x)\quad(m=0,1,2,\ldots)$	$i^m\frac{d^m}{d\xi^m}\hat{f}(\xi)$
5. $f(x+a)$　(a 为实数)	$e^{ia\xi}\hat{f}(\xi)$
6. $e^{ibx}f(ax)$　(a,b 为实数, $a\neq 0$)	$\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi-b}{a}\right)$
7. $(f*g)(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
8. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}\|x\|\leqslant L\\0, & \text{如果}\|x\|>L\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin(\xi L)}{\xi}$
9. $f(x)=\begin{cases}L-\|x\|, & \text{如果}\|x\|\leqslant L\\0, & \text{如果}\|x\|>L\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(\xi L)}{\xi^2}$
10. $e^{-\frac{1}{2}ax^2}\quad(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2/a}$
11. $e^{-a\|x\|}\quad(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\xi^2}$
12. $\frac{1}{a^2+x^2}\quad(a>0)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a\|\xi\|}$
13. $e^{-a\|x\|}\cos(bx)\quad(a,b>0)$	$\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{[a^2+(b-\xi)^2]}+\frac{1}{[a^2+(b+\xi)^2]}\right)$
14. $e^{-\frac{1}{2}ax^2}\sin(bx)\quad(a,b>0)$	$\frac{1}{2i\sqrt{a}}\left(e^{-\frac{1}{2}(\xi-b)^2/a}-e^{-\frac{1}{2}(\xi+b)^2/a}\right)$
15. $\delta(x-c)$　(c为实数)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ic\xi}$

①表中所列的结果来自第七章.

附录 6　Bessel 函数

在本教材的第 8.2, 8.3 和 4.4 节中讨论了 Bessel 函数. 对 Bessel 函数详细论述的经典参考文献是 G.N.Watson, *Bessel functions*, 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1958(也可见 E.T. Whittaker and G.N. Watson, 4th ed.*A course of modern analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1952). 以下收集了 Bessel 函数的一些基本定义和性质.

I. 实数 ν 阶的 Bessel 微分方程是

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{1}$$

满足 (1) 的ν **阶第一类 Bessel 函数**由以下定义

$$J_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}x^2)^k}{k!\Gamma(1+\nu+k)},\ \nu \neq -1, -2, \cdots, \tag{2}$$

其中 Γ 是 **Gamma函数**, $\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx,\ s > 0$, 且如果 $n = 1, 2, \cdots, \Gamma(1+n) = n!$. Gamma 函数的倒数可唯一地延拓成对所有复数有定义的解析函数

“$1/\Gamma(z)$”, 且 $1/\Gamma(z)$ 只在 $z = 0, -1, -2, \cdots$ 处为零. 该事实可用来使 (2) 有意义, 即使当 ν 是负数, $\nu \neq -1, -2, \cdots$.

当 ν 不是整数, 函数 $J_{-\nu}(x)$ 和 $J_\nu(x)$ 是 (1) 的两个线性无关的解, 任意其他的解是它们的线性组合. 一个标准的线性组合是**实数 ν 阶第二类 Bessel 函数** Y_ν, 即

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{3}$$

对整数 m, $k \geqslant 0$, 由上面回忆到对 $1-m+k \leqslant 0$, 即 $k \leqslant m-1$, $1/\Gamma(1-m+k) = 0$. 因此, 对 $\nu = -m$, 由 (1) 得 $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$. 因此, 如果 m 是整数, $J_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$ 不是线性无关的. 然而, $\nu = m$ 时, (1) 的与 $J_m(x)$ 线性无关的解是整数阶 m 第二类 **Bessel** 函数 $Y_m(x)$, 它定义为 (3) 中 $Y_\nu(x)$ 当 $\nu \to m$ 时的极限. 在所有情形, $c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$ 是 (1) 的通解. 对 $m = 0, 1, 2, \cdots$.

$$\begin{aligned} Y_m(x) = {} & \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{1}{2}x\right)J_m(x) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k \\ & -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}x^2)^k}{k!(m+k)!}\big(\psi(k+1) + \psi(m+k+1)\big), \end{aligned} \tag{4}$$

其中如果 $m = 0$, 第一个求和项为 0, $\psi(n) \equiv -\gamma + \sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{q}$ $(n = 2, 3, \cdots)$, $\gamma = 0.57721566\cdots$ 是 **Euler常数**$[\gamma \equiv \lim_{n\to\infty}(\sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{q} - \ln n)]$ 以及 $\psi(1) \equiv -\gamma$. 对整数 $m \leqslant 0$, 由 (2) 和 (3), 经取极限 $\nu \to -m$, 得 $Y_{-m}(x) = (-1)^m Y_m(x)$.

II. 整数 m 阶 Bessel 函数一些基本性质

1. 微分递归式:

$$\frac{d}{dx}(x^m J_m(x)) = x^m J_{m-1}(x) \quad 和 \quad \frac{d}{dx}(x^m Y_m(x)) = x^m Y_{m-1}(x) \ (m \geqslant 1). \tag{5}$$

2. 纯递归式:

$$2mJ_m(x) = x\big(J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)\big)$$

和 $(m > 1)$ (6)

$$2mY_m(x) = x\big(Y_{m-1}(x) + Y_{m+1}(x)\big).$$

3. $J_m(x)(m=0,1,2,\cdots)$ **的 Bessel 积分:**

$$J_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(mt-x\sin t)dt. \tag{7}$$

4. $J_m(x)$ **的生成函数:**

$$f(x,t)\equiv\exp\Big(\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\Big)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)t^m \quad (t\neq 0). \tag{8}$$

因 $f(x,t)f(-x,t)\equiv 1\ (t\neq 0)$, 故得

$$J_0(x)^2+2\sum_{m=0}^{\infty}J_m(x)^2=1, \tag{9}$$

于是

$$|J_0(x)|\leqslant 1 \quad 和 \quad |J_m(x)|\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}} \quad (m=1,2,3,\cdots;\ x \quad 是实数). \tag{10}$$

5. 渐近行为: 对固定的 m, 当 $x\to\infty$, 我们有

$$J_m(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\Big(x-\frac{1}{2}\pi m-\frac{1}{4}\pi\Big)+O(x^{-\frac{3}{2}})\ (x\to\infty) \tag{11}$$

$$Y_m(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\Big(x-\frac{1}{2}\pi m-\frac{1}{4}\pi\Big)+O(x^{-\frac{3}{2}})\ (x\to\infty) \tag{12}$$

III. 第一类半阶 Bessel 函数

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \tag{13}$$

$$J_{m+\frac{3}{2}}=-x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\big(x^{-(m+\frac{1}{2})}J_{m+\frac{1}{2}}(x)\big), \tag{14}$$

$$J_{m-\frac{1}{2}}(x)=x^{-(m+\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\big(x^{(m+\frac{1}{2})}J_{m+\frac{1}{2}}(x)\big) \quad (m=0,1,2,\cdots). \tag{15}$$

IV. $J_m(x)(m=0,1,2,3,4)$ **零点表**[①]**:**

$J_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 有无穷多个零点, 所有这些零点是实数. 如果 $j_{m,k}$ 表示 $J_m(x)$ 的第 k 个正零点, 以增加次序排列, 则 (参看 (11)),

$$j_{m,k} \approx \left(k+\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}\right)\pi, \quad k \gg m. \tag{16}$$

$m=0,1,2,3,4$ 的 $J_m(x)$ 一些零点表

m	$j_{m,1}$	$j_{m,2}$	$j_{m,3}$	$j_{m,4}$	$j_{m,5}$
0	2.40482...	5.52007...	8.65372...	11.79153...	14.93091...
1	3.83170...	7.01558...	10.17346...	13.32369...	16.47063...
2	5.13562...	8.41724...	11.61984...	14.79595...	17.95981...
3	6.38016...	9.76102...	13.01520...	16.22346...	19.40941...
4	7.58834...	11.06470...	14.37253...	17.61596...	20.82693...

[①] 我们在 Sun Spare 1000 上用 Macsyma, 在 486DX2 PC 上用 Microsoft Windows 3.1 获得该表中所列的零点.

参考文献

A

Abbott M B. *An introduction to the method of characteristics*, American Elsevier Pub. Co., New York, 1966.

Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1988.

Agmon S. *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.

Ahlfors L V. *Complex analysis; an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1966.

Ames W F. *Numerical methods for partial differential equations*, Nelson London, 1969.

Ames W F. *Nonlinear partial differential equations in engineering* , Academic Press, New York, 1972.

Ames W F, Rogers C. *Nonlinear boundary value problems in science and engineering*, Academic Press, Boston, 1989.

Andrews L C. *Elementary partial differential equations with boundary value problems*, Academic Press, Orlando, 1986.

Andrews L C. *Special functions for engineers and applied mathematicians*, MacMillan, New York, 1985.

Antman S S. *The equations for large vibrations of strings*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 359~370.

Apostol T M. *Calculus,* Vols. 1 and 2, 2nd ed., Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass., 1969.

Apostol T M. *Mathematical analysis ; a modern approach to advanced calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957

Avery J. *Hyperspherical harmonics: applications in quantum theory,* Kluwer Academic, Boston, 1989.

Axelsson O, Barker V A. *Finite element solution of boundary value problems: theory and computation*, Academic Press, Orlando, 1984.

Ayres F. *Schaum's outline of theory and problems of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1952.

B

Bari N K. *A treatise on trigonometric series*, Pergamon Press, New York, 1964.

Bateman H. *Partial differential equations of mathematical physics*, Dover, New York, 1944.

Bathe K, Wilson E L. *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

Beckenbach E F. *Modern mathematics for the engineer,* Vols. 1 and 2, McGraw-Hill, New York, 1956~1961.

Beckenbach E F, Bellman R E. *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

Bellman R E. *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1953.

Bellman R E, Adomian G. *Partial differential equations: new methods for their treatment and solution*, Reidel Pub. Co., Hingham, Mass., 1985.

Bellman R E, Cooke K L. *Modern elementary differential equations*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.

Bellman R E, Kalaba R E, Lockett J. *Numerical inversion of the Laplace transform: application to biology, economics, engineering and physics*, American

Elsevier Pub. Co., New York, 1966.

Bérard P H. *Spectral geometry: direct and inverse problems*, Springer-Verlag, New York, 1986.

Berg P W, McGregor J L. *Elementary partial differential equations*, Holden-Day, San Francisco, 1966.

Berman A, Plemmons R J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Academic Press, New York, 1979.

Birkhoff G, Lynch R E. *Numerical solution of elliptic problems*, SIAM, Philadelphia, 1984.

Birkhoff G, Rota G C. *Ordinary differential equations*, 2nd ed., Blaisdell, Waltham, Mass., 1969.

Birkhoff G, Schoenstadt A L. *Elliptic problem solvers II*, Academic Press, Orlando, 1984.

Bjorck A, Plemmons R J, Schneider H. *Large scale matrix problems*, North-Holland, New York, 1981.

Bjorken J D, Drell S D. *Relativistic quantum fields*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Bland D R. *Wave theory and applications*, Oxford University Press, Oxford, 1988.

Bleecker D. *Gauge theory and variational principles*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

Bleistein N. *Mathematical methods for wave phenomena*, Academic Press, New York, 1984.

Boas R P. *Inversion of Fourier and Laplace transforms*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 955~960.

Boccardo L, Tesei A. *Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.

Bowman F. *Introduction to Bessel functions*, Dover, New York, 1958.

Bowman F, Gerard F A. *Higher calculus*, Cambridge Univ. Press, London, 1967.

Botha J F, Pinder G F. *Fundamental concepts in the numerical solution of differential equations*, Wiley, New York, 1983.

Boyce W E, Di Prima R C. *Elementary differential equations and boundary value problems*, Wiley, New York, 1965.

Brand L. *Advanced calculus; an introduction to classical analysis*, Wiley, New

York, 1955.

Brand L. *Differential and difference equations*, Wiley, New York, 1966.

Braun M. *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1983.

Broman A E. *Introduction to partial differential equations; from Fourier series to boundary-value problems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.

Buck R C, Buck E F. *Advanced calculus*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1965.

Burkill J C. *The theory of ordinary differential equations*, 2nd ed., Interscience Publishers, New York, 1962.

Byerly W E. *An elementary treatise on Fourier's series, and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics, with applications to problems in mathematical physics*, Dover, New York, 1959.

C

Cajori F. *The early history of partial differential equations and of partial differentiation and integration*, Amer. Math. Monthly 35(1928), 459~467.

Cannon J R. *The one-dimensional heat equation*, Cambridge Univ. Press, New York, 1984.

Carasso A, Stone A P, John F. *Improperly posed boundary value problems*, Pitman, San Francisco, 1975.

Carnahan B, Luther H A, Wilkes J O. *Applied numerical methods*, Wiley, New York, 1969.

Carslaw H S. *Introduction to the theory of Fourier's series and integrals*, 3rd ed., Dover, New York, 1930.

Carslaw H S, Jaeger J C. *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1959.

Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Ceschino F, Kuntzmann J. *Numerical solution of initial value problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.

Chester C R. *Techniques in partial differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1971.

Chavel I. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1984.

Churchill R V, Brown J W. *Fourier series and boundary value problems*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

Ciarlet P, Kesavan S, Ranjan A, Vanninathan M.*Lectures on the finite element method*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1975.

Coddington E A. *An introduction to ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Coddington E A, Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

Collatz L. *The numerical treatment of differential equations*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1960.

Collatz L. *Differential equations: an introduction with applications*, Wiley, New York, 1986.

Colton D L. *Partial differential equations in the complex domain*, Pitman, San Francisco, 1976.

Coppel W A. *J. B. Fourier — on the occasion of his two-hundredth birthday*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 468~483.

Copson E T. *Partial differential equations* , Cambridge Univ. Press, New York, 1975.

Cordes H O. *Spectral theory of linear differential operators and comparison algebras*, Cambridge Univ. Press, New York, 1987.

Courant R, Hilbert D. *Methods of mathematical physics,* Vols. I and II, Interscience Publishers, New York, 1953.

Craig I J, Brown J C. *Inverse problems in astronomy: a guide to inversion strategies for remotely sensed data*, Adams Hilger Ltd, Bristol and Boston, 1986.

Cryer C W. *Numerical functional analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

Csordas G, Varga R S. *Comparisons of regular splittings of matrices*, Numer. Math. Vol. **44** (1984), 23~35.

D

Davies E B. *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge Univ. Press, New York, 1989.

Davis H F. *Fourier series and orthogonal functions*, Allyn and Bacon, Boston, 1963.

Davis J L. *Wave propagation in solids and fluids*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Deans S R. *The radon transform and some of its applications*, Wiley, New York, 1983.

Debnath L. *Nonlinear waves* , Cambridge Univ.Press, New York, 1983.

De Luca L J, Sedlock J T. *Calculus: a first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

Dennemeyer R. *Introduction to partial differential equations and boundary value problems*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Dezin A A. *Partial differential equations: an introduction to a general theory of linear boundary value problems*, Springer-Verlag, New York, 1987.

Diaz J I. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*, Pitman, Boston, 1985.

Dodziuk J. *Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 686~695.

Doniach S, Sondheimer E H. *Green's functions for solid state physicists*, W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1974.

Downing H H. *Sums of sines converted into numerical sums*, Amer. Math. Monthly **56** (1949), 630~631.

Driver R D. *Introduction to ordinary differential equations* , Harper & Row, New York, 1978.

Du Chateau P, Zachmann D. *Applied partial differential equations* , Harper & Row, New York, 1989.

Du Chateau P, Zachmann D. *Schaum's outline of theory and problems of partial differential equations* , McGraw-Hill, New York, 1986.

Duff G F D. *Partial differential equations* , Toronto Univ. Press, Toronto, 1956.

Duff G F D, Naylor D. *Differential equations of applied mathematics*, Wiley, New York, 1966.

Dunford N, Schwartz J T. *Linear operators* , Interscience Publishers, New York, 1958.

Dym H, Mckean H P. *Fourier series and integrals*, Academic Press, New York,

1972.

E

Ecomomou E N. *Green's functions in quantum physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1983.

Edwards H M. *Riemann's zeta function*, Academic Press, New York, 1974.

Edwards R E. *Fourier series, a modern introduction*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1979.

Eggermont P P B. *Noncentral difference quotients and the derivative*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 551~553.

Epstein B. *Partial differential equations* , McGraw-Hill, New York, 1962.

Evans L C. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations,* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1990.

F

Fattorini H O. *Second order linear differential equations in Banach spaces*, North-Holland, New York, 1985.

Farlow S J. *Partial differential equations for scientists and engineers*, Wiley, New York, 1982.

Feineman G, Garrett S J, Karaus A D. *Applied differential equations* , Spartan Books, Washington, 1965.

Feller W. *An introduction to probability theory and its application*, vol II, 3rd ed., Wiley, New York, 1967.

Forsythe G E. *Numerical analysis and partial differential equations*, Wiley, New York, 1958.

Forsythe G E, Wasow W R. *Finite-difference methods for partial differential equations*, Wiley, New York, 1960.

Fox L. *An introduction to numerical linear algebra, with exercises*, Oxford Univ. Press, New York, 1965.

Franklin P. *An introduction to Fourier methods and the Laplace transformation,* Dover, New York, 1958.

Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

Friedman A. *Variational principles and free-boundary problems*, Wiley, New York, 1982.

Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964

Fulks W. *Advanced calculus*, 2nd ed., Wiley, New York, 1969.

G

Garabedian, P. *Partial differential equations*, Wiley, New York, 1964.

Gilbarg D, Trudinger N S. *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York, 1977.

Gilbert R P. *Constructive methods for elliptic equations* , Springer-Verlag, New York, 1974.

Gilbert R P. *Function theoretic methods in partial differential equations*, Academic Press, New York, 1969.

Gilkey P B. *The index theorem and the heat equation*, Publish or Perish, Inc., Boston, 1974.

Glowinski R. *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

Glowinski R, Lions J L, Tremolieres R. *Numerical analysis of variational inequalities*, North-Holland, New York, 1981.

Goffman C, Waterman D. *Some aspects of Fourier series*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 119~133.

Golomb M, Shanks M E. *Elements of ordinary differential equations*, 2nd ed, McGraw-Hill, New York, 1965.

Golub G H, Van Loan C F. *Matrix computations*, Johns Hopkins Univ. press, 1983.

Good I J. *Analogues of Poisson's summation formula*, Amer. Math. Monthly **69**(1962), 259~266.

Graham A. *Nonnegative matrices and applicable topics in linear algebra*, Halsted Press, New York, 1987.

Greenberg M D. *Foundations of applied mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.

Greenberg M D. *Advanced engineering mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

Groetsch C W. *Generalized inverses of linear operators: representation and approximation*, Dekker, New York, 1977.

Grosswald E. *Bessel polynomials*, Springer-Verlag, New York, 1978.

Guenther R B. *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J., 1988.

Gustafson K E. *Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods*, 2nd ed., Wiley, New York, 1987.

H

Haberman R. *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow: an introduction to applied mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.

Haberman R. *Elementary applied partial differential equations: with Fourier series and boundary value problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.

Hackbusch W. *Multi-grid methods and applications*, Springer-Verlag, New York, 1985.

Hagin F. *A first course in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

Hardy G H. *A Theorem concerning Fourier transforms*, J.London Math. Soc., **8** (1933), 227～231.

Hardy G H, Rogosinski W W. *Fourier series*, Cambridge Tracts no. 38, Cambridge Univ. Press, New York, 1950.

Harris S. *An introduction to the theory of the Boltzman equation*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

Hartman P. *Ordinary differential equations* 2nd ed., Birkhauser, Boston, 1982.

Hellwig G. *Partial differential equations: an introduction*, 2nd ed., Blaisdell Pub. Co., New York, 1977.

Henrici P. *Applied and computational complex analysis,* vols.1, 2 and 3, Wiley,

New York, 1974.

Henrici P. *Error propagation for difference methods*, Wiley, New York, 1963.

Henrici P. *Elements of numerical analysis*, Wiley, New York, 1964.

Higgins J R. *Five short stories about the cardinal series*, Bull. Amer. Math. Soc.(New Series), **12**, (1985), 45～89.

Hildebrand F B. *Advanced calculus for applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Hildebrand F B. *Introduction to numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.

Hlavacek I. *Solution of variational inequalities in mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Hochstadt H. *Special functions of mathematical physics*, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1961.

Hodge P G. *On the method of characteristics*, Amer. Math.Monthly **57** (1950), 621～623.

Hoffman S P. *Advanced calculus* , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

Holzapfel R. *Geometry and arithmetic around Euler partial differential equations*, Kluwer Academic, Boston, 1986.

Holbrook J G. *Laplace transforms for electrical engineers*, 2nd rev.ed., Pergamon Press, New York, 1966.

Hormander L. *The analysis of linear partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

Hornbeck R W. *Numerical methods*, Quantum Publishers, New York, 1975.

Householder A S. *Principles of numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1953.

Huntley I, Johnson R M. *Linear and nonlinear differential equations*, Halsted Press, New York, 1983.

Hunzeker H L. *The separation of partial differential equations with mixed derivatives*, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 131～134.

Hurewicz W. *Lectures on ordinary differential equations*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1958.

I

Ince E L, Sneddon I N. *The solution of ordinary differential equations*, 2nd ed., Wiley, New York, 1987.

Isaacson E, Keller H B. *Analysis of numerical methods*, Wiley, New York, 1966.

J

John F. *Lectures on advanced numerical analysis*, Gordon and Breach, New York, 1967.

John F. *Partial differential equations*, 4th ed., Springer-Verlag, New York, 1982.

Jordan D W, Smith P. *Nonlinear ordinary differential equations*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1987.

Jordan K. *Calculus of finite differences* 3rd ed., Chelsea Pub. Co., New York, 1965.

K

Kac M. *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math.Monthly **73S**(1966), 1~23.

Kaplan W. *Advanced calculus* , Addison-Wesley, Reading, Mass., 1952.

Keller H B. *Numerical methods for two-point boundary-value problems*, Blaisdell Pub.Co., Waltham, Mass., 1968.

Kellner R. *On a theorem of Pólya*, Amer. Math.Monthly **73**(1966), 856~858.

Kelman R B. *Regularity of certain explicit solutions to Laplace's equation at artificial interfaces*, Amer. Math.Monthly **73**(1966), 1073~1078.

Kober H. *Dictionary of conformal representations* 2nd ed., Dover, New York, 1957.

Konig M. *Schauder's estimates and boundary value problems for quasilinear partial differential equations*, Presses de L'Universite de Montreal, Montreal, 1985.

Kovach L D. *Boundary-value problems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1984.

Krein M G, Gohberg I. *Topics in differential and integral equations and operator*

theory, Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

Krylov N V. *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, Kluwer Academic, Boston, 1987.

Krzyzanski M. *Partial differential equations of second order* (trans., H.Zorski), Polish Scientific Publishers, Warszawa PWN, 1971.

Kunz K S. *Numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1957.

L

Ladyzhenskaia O. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of mathematical monographs, v.23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

Laforgia A, Muldoon M E. *Some consequences of the Sturm comparison theorem*, Amer. Math. Monthly **93** (1986), 89~94.

Lang S.*Differential manifolds*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

Lapidus L, Schiesser W E. *Numerical methods for differential systems: recent developments in algorithms, software, and applications*, Academic Press, New York, 1976.

Lax P D, Phillips R S. *Scattering theory*, rev.ed., Academic Press, Boston, 1989.

Lax P D. *Numerical solution of partial differential equations*, Amer. Math. Monthly **72S**(1965), 74~84.

Lebedev N N, Silverman R A. *Special functions and their applications*, rev. English ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

Leighton W. *Ordinary differential equations*, 2nd ed., Wadsworth, Belmont, Calif., 1966.

Leis R. *Partial differential equations of applied mathematics*, Wiley, New York, 1983.

Leis R. *Initial value boundary problems in mathematical physics*, Wiley, New York, 1986.

Le Page W R. *Complex variables and the Laplace transform for engineers*, McGraw-Hill, New York, 1961.

Leung A W. *Systems of nonlinear partial differential equations: applications to biology and engineering*, Kluwer Academic, Boston, 1989.

Levitan B M, Sargsjan I S. *Sturm-Liouville and Dirac operators*, Kluwer Academic, Boston, 1989.

Lewin J W. *A truly elementary approach to the bounded convergence theorem*, Amer. Math. Monthly **93**(1986), 395~397.

Lewin J W. *Some applications of the bounded convergence theorem for an introductory course in analysis*, Amer.Math. Monthly **94**(1987), 988~993.

Lewin J W. *An introduction to mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1988.

Lieberstein H M. *Theory of partial differential equations*, Academic Press, New York, 1972.

Lions J L, Magenes E. *Non-Homogeneous boundary-value problems and applications*, Springer-Verlag, New York, 1972.

Lomen D, Mark J. *Ordinary differential equations with linear algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986.

Loomis L H, Sternberg S. *Advanced calculus* , Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

M

Magnus W, Winkler S. *Hill's equation* Interscience Publishers, New York, 1966.

Martin W T, Reissner E. *Elementary differential equations* , 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

Mathews J H. *Basic complex variables for mathematics and engineering*, Allyn and Bacon, Boston, 1982.

Mathews J, Walker R L. *Mathematical methods of physics*, W.A. Benjamin, New York, 1964.

McShane E J. *The Fourier transform and mean convergence*, Amer.Math. Monthly **68**(1961), 205~211.

Michel A N. *Ordinary differential equations*, Academic Press, New York, 1982.

Mikhlin S G. *Linear equations of mathematical physics* , Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.

Miles E P, Williams E. *A basic set of polynomial solutions for the Euler-Poisson-Darboux and Beltrami equations*, Amer. Math. Monthly **63**(1956), 401~404.

Miller K S. *Advanced complex calculus* , Harper, New York, 1960.

Miller K S. *Partial differential equations in engineering problems*, Prentice-Hall, New York, 1953.

Miller R K, Michel A N. *Ordinary differential equations* , Academic Press, New York, 1982.

Milne W E. *Numerical calculus: approximations, interpolation, finite differences, numerical integration and curve fitting*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

Milne W E. *Numerical solution of differential equations*, Wiley, New York, 1953.

Mitchell A, Wait R. *The finite element method in partial differential equations*, Wiley, New York, 1977.

Mitchell A R. *Computational methods in partial differential equations*, Wiley, New York, 1969.

Moon P H, Spencer D E. *Partial differential equations*, D. C. Heath, Lexington, Mass., 1969.

Myint-U T, Debnath L. *Partial differential equations for scientists and engineers*, North-Holland, New York, 1987.

N

Nirenberg L. *Lectures on linear partial differential equations*, Regional conference series in mathematics, no. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972.

Noble B, Daniel J W. *Applied linear algebra*, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

Noye J. *Computational techniques for differential equations* (North-Holland Mathematics Studies 83), North-Holland, New York, 1984.

O

Olmsted J M H. *Advanced calculus* , Appleton-Century-Crofts, New York, 1961.

Ortega J M. *Numerical analysis; a second course*, Academic Press, New York, 1972.

Ortega J M, Rheinboldt W C. *Iterative solutions of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.

Osserman R. *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer.Math. Soc., **84**(1978), 1182~1238.

Osserman R, Weinstein A, eds. *Geometry of the Laplace operator*, Proceedings of symposia in pure mathematics, *v*, XXXVI, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.

P

Palais R S. *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965.

Papoulis A. *The Fourier integral and its applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

Paris R B, Wood A D. *Asymptotics of high order differential equations*, Wiley, New York, 1986.

Payne L E. *Improperly posed problems in partial differential equations*, Regional conference series in applied mathematics, 22, Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1975.

Pearson C E. *Numerical methods in engineering and science*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1986.

Peek R L. *Flow of heat in a disk heated by a gas stream*, Amer.Math. Monthly **39**(1932), 276~280.

Pinsky M A. *Introduction to partial differential equations with applications*, McGraw-Hill, New York, 1984.

Pólya G. *Collected Papers, Vol II, Location of zeros*, (R.P. Boas, Ed.), MIT Press, Cambridge, 1974.

Pólya G, Szegö G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

Prenter P M. *Splines and variational methods*, Wiley, New York, 1975.

Protter H M. *The characteristic initial value problem for the wave equation and Riemann's method*, Amer.Math. Monthly **61**(1954), 702~705.

Protter H M, Morrey C B. *College calculus with analytic geometry*, 3rd ed.,

Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

Protter M H, Weinberger H F. *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

R

Rabenstein A L. *Introduction to ordinary differential equations*, Academic Press, New York, 1972.

Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Sächs.Ges.Wiss.Leipzig, **69**(1917), 262~267.

Rainville E D. *Intermediate differential equations* , 2d ed., Macmillan, New York, 1964.

Rainville E D. *Special functions* , Macmillan, New York, 1960.

Rainville E D. *The Laplace transform: an introduction*, Macmillan, New York, 1963.

Rainville E D, Bedient P E. *Elementary differential equations* , 4th ed., Macmillan, 1969.

Reid W T. *Ordinary differential equations* , Wiley, New York, 1971.

Reissig R, Sansone G, Conti R. *Non-linear differential equations of higher order*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.

Rheinboldt W C. *Numerical analysis of parameterized nonlinear equations*, Wiley, New York, 1986.

Rhoades B E. *On forming partial differential equations* , Amer.Math. Monthly **66**(1959), 473~476.

Richtmyer R D. *Difference methods for initial-value problems*, Interscience Publishers, New York, 1957.

Roach G F. *Green's functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1982.

Rogers C, Shadwick W F. *Backlund transformations and their applications*, Academic Press, New York, 1982.

Roseau M. *Asymptotic wave theory*, American Elsevier Pub. Co., New York, 1976.

Rosenberg von, D U. *Methods for the numerical solution of partial differential*

equations, American Elsevier Pub. Co., New York, 1969.

Ross S L. *Differential equations*, 1st ed., Blaisdell, New York, 1964.

Royden H L. *Real analysis*, 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.

Rozhdestvenskii B L, IAnenko N N. *Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics*, 2nd ed., American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

Rubinstein Z. *A course in ordinary and partial differential equations*, Academic Press, New York, 1969.

Rudin W. *Functional analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1973.

Rudin W. *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

Rudin W. *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

S

Sagan H. *Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics*, Wiley, New York, 1961.

Sakamoto R. *Hyperbolic boundary value problems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1982.

Salas S L, Hille E, Anderson J T. *Calculus: one and several variables, with analytic geometry*, 5th ed., Wiley, New York, 1986.

Salkover M. *The homogeneous linear differential equation with constant coefficients*, Amer.Math. Monthly **37**(1930), 524~529.

Schechter M. *Operator methods in quantum mechanics*, North-Holland, New York, 1981.

Schechter M. *Modern methods in partial differential equations: an introduction*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1977.

Scheid F J. *Schaum's outline of theory and problems of numerical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Schiff L I. *Quantum mechanics*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1968.

Schultz M.*Spline analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

Scott E J. *Determination of the Riemann function*, Amer.Math.Monthly **80** (1973), 906~909.

Seeley R T. *An introduction to Fourier series and integrals*, W.A. Benjamin, 1966.

Seeley R T. *Calculus of several variables*, Scott, Foresman, Glenview, III., 1970.

Sewell G. *The numerical solution of ordinary and partial differential equations*, Academic Press, Boston, 1988.

Silverman R A. *Modern calculus and analytic geometry*, Macmillan, New York, 1969.

Simmons G F. *Differential equations, with applications and historical notes*, McGraw-Hill, New York, 1972.

Smith G D. *Numerical solution of partial differential equations:finite difference equations*, 3rd ed., Oxford University Press, Oxford, 1985.

Smoller J A, ed. *Nonlinear partial differential equations*, Contemporary mathematics, v.17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

Sneddon I N. *Fourier transforms* , McGraw-Hill, New York, 1951.

Sneddon I N. *Elements of partial differential equations* , McGraw-Hill, New York, 1957.

Sneddon I N. *Special functions of mathematical physics and chemistry*, 3rd ed., Longman, London, 1980.

Sobolev S L. *Partial differential equations of mathematical physics*, Addision-Wesley, Reading, Mass., 1964.

Sod G A. *Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary-value problems*, Cambridge University Press, New York, 1985.

Spain B. *Ordinary differential equations*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

Sperb R P. *Maximum principles and their applications*, Academic Press, New York, 1981.

Spivak M. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Benjamin and Cummings Pub. Co., Menlo Park, Calif., 1965.

Stakgold I. *Green's functions and boundary value problems*, Wiley, New York, 1979.

Sternberg W J. Smith T L. *The theory of potential and spherical harmonics*, 2nd ed., Univ. of Toronto, Toronto, 1952.

Strang G. *Linear algebra and its applications*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1980.

T

Taira K. *Diffusion processes and partial differential equations*, Academic Press, Orlando, 1988.

Taylor A E. *Calculus, with analytic geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1959.

Taylor A E, Mann W R. *Advanced calculus*, 2nd ed., Xerox College Pub., Lexington, Mass., 1972.

Temam R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, Rev.ed., North-Holland, New York, 1979.

Thomas G B, Finney R L. *Calculus and analytic geometry*, 6th ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1984.

Titchmarsh E C. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, vols.1and 2, Clarendon Press, Oxford, 1946(vol.1, 2nd ed., 1962).

Titchmarsh E C. *Introduction to the theory of Fourier integrals*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1967.

Titchmarsh E C. *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1939.

Treves F. *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1975.

Treves F. *Applications of distributions to pde theory*, Amer.Math. Monthly **77**(1970), 241~248.

V

Varga R S. *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Vemuri V, Karplus Walter J. *Digital computer treatment of partial differential equations*, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

Vichnevetsky R. *Computer methods for partial differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

W

Warner F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, III., 1971.

Watson E J. *Laplace transforms and applications*, Van Noststrand Reinhold, New York, 1981.

Watson G N. *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.

Watson N A. *Parabolic equations on an infinite strip*, Dekker, New York, 1989.

Webster A G. *Partial differential equations of mathematical physics*, 2nd corr. ed., Dover, New York, 1966.

Weinberger H F. *A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods*, 1st ed., Blaisdell, New York, 1965.

Wells C P. *Separability conditions for some self-adjoint partial differential equations*, Amer.Math. Monthly **66**(1959), 684~689.

Whittaker E T. *A course of modern analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1963.

Widder D V. *Advanced calculus*,2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Widder D V. *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, 1941.

Widder D V. *An introduction to transform theory*, Academic Press, Pure and Appl.Math., vol.42, New York, 1971.

Widder D V. *The heat equation*, Academic Press, Pure and Appl.Math., vol.67, New York, 1975.

Wilf H S. *Mathematics for the physical sciences*, Wiley, New York, 1962.

Wilker J B. *The nth derivative as a limit* , Amer.Math. Monthly **94**(1987), 354~356.

Williams W E. *Partial differential equations*, Clarendon Press, New York, 1980.

Williamson R E. *Introduction to differential equations:ODE, PDE, and series*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986.

Wimp J. *Sequence transformations and their applications*, Academic Press, New York, 1981.

Witten M. *Hyperbolic partial differential equations*, Pergamon Press, New York,

1983.

Wloka J. *Partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, New York, 1987.

Y

Young E C. *Partial differential equations; an introduction*, Allyn and Bacon, Boston, 1972.

Young D M. *Iterative solution of large linear systems*, Academic Press, New York, 1971.

Z

Zachmanoglou E C, Thoe D W. *Introduction to partial differential equations with applications*, The Williams and Wilkins Co., Baltimore, 1976.

Zauderer E. *Partial differential equations of applied mathematics*, Wiley, New York, 1983.

Zienkiewicz O C. *The finite element method*, 3rd ed., McGraw-Hill(UK), London, 1977.

Zuily C. *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

Zygmund A, *Trigonometric series*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

部分答案

练习 1.1

1. (a) $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$, (c) $\arctan y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x) + C$,
   (e) $Cx - x\cos t = 1$, (g) $(t-1)e^t + e^{-x} = C$, (i) $T(t) = Ce^{-3t}$.
3. 2分钟.
4. (a) $y = \frac{1}{3}e^{-2x}(e^{3x} + 2)$, (c) $y = 2\sin x \ln|\sin x|$,
   (e) $y = (2x+1)e^{-x^2}$, (g) $x = 100e^{-\sin t}$, (i) $x = (2t+100)^{-\frac{2}{3}}$.
6. (a) $y = c_1 x + c_2$, (c) $y = c_1\cos(x\sqrt{3}) + c_2\sin(x\sqrt{3})$,
   (e) $y = c_1 e^{3x} + c_2$, (g) $y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x}$, (i) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$.
7. (a) $y = e^{2t}$, (c) $y = a\cos t + b\sin t$, (e) $y = \frac{5}{3}e^{-\frac{4}{5}t}\sin(\frac{3}{5}t)$.
13. $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
15. $x(t) = e^t\cos t,\ y(t) = -e^t\sin t$. 图像以顺时针方式螺旋式移离原点.
17. (a) $x(t) = (1-2t)e^t,\quad y(t) = (1-t)e^t$.
    (c) $x(t) = \frac{4}{\sqrt{33}}e^{\frac{5}{2}t}\sinh(\frac{\sqrt{33}}{2}t),\quad y(t) = \frac{3}{\sqrt{33}}e^{\frac{5}{2}t}\left(\sinh(\frac{\sqrt{33}}{2}t) + \frac{\sqrt{33}}{3}\cosh(\frac{\sqrt{33}}{2}t)\right)$.

练习 1.2

5. (a) 三阶, 线性, 齐次;
   (b) 一阶, 非线性;
   (c) 四阶, 线性, 非齐次;

(d) 二阶, 非线性;

(e) 二阶, 线性, 齐次.

7. (a) $u(x,y)=x^2+2xy-y^2$.

8. (b) $n-1$.

(c) n 越大, 热区域和冷区域就越靠近, 且这些区域之间的温度梯度越大.

9. (c) $(m+1)(n+1)(p+1)$ 个内室.

11. (b) $u(x,t)=\cos(\pi at)\sin(\pi x)+\frac{2}{3\pi a}\sin(3\pi at)\sin(3\pi x)$,

$v(x,t)=\cos(\pi at)\sin(\pi x)+\frac{1}{3\pi a}\sin(3\pi at)\sin(3\pi x)$.

13. (a) $u(x,y)=\frac{1}{2}Cx^2+\frac{1}{6}Ax^3+\frac{1}{6}By^3$.

(b) 令 $v(x,y)=u(x,y)+h(x,y)$, 其中 $h(x,y)$ 是 Laplace 方程无穷多个解中的任一个解.

18. $\mathbf{A}^{-1}=\frac{d}{dx}+p(x)$.

练习 1.3

1. (a) $u(x,y)=x^3+y^2x+f(y),\ f\in C^1$.

(c) $u(x,y,z)=f(x,y)+g(x,y)+h(x,z),\quad f,g$ 和 $h\in C^1$.

2. (a) $u(x,y)=f(y)e^{2x},\quad f\in C^1$.

(c) $u(x,y)=e^{-x^2}(2ye^{x^2}+f(y)),\quad f\in C^1$.

(e) $u(x,y)=f(x)e^{xy}+g(x)e^{-xy},\quad f$ 和 $g\in C^2$.

3. (a) $u(x,y)=ye^{2x}$

(c) $u(x,y)=2y(1-e^{y^2-x^2})$

(e) $u(x,y)=\cosh(xy)$.

4. 下面的解不是唯一的可能解.

(a) $u(x,y)=e^{-2\lambda^2t}(c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x))$,

(c) $u(x,y)=(c_1e^{\lambda x}+c_2e^{-\lambda x})(d_1e^{4\lambda t}+d_2e^{-4\lambda t})$,

(e) $u(x,y,z)=e^{z\sqrt{a^2+b^2}}\cos(ax)\cos(by)$.

5. 如果 $\lambda=0$, 则 $u(x,t)=(c_1x+c_2)e^{-t}$.

如果 $\lambda>0$, 则 $u(x,t)=(c_1e^{x\sqrt{\lambda}}+c_2e^{-x\sqrt{\lambda}})e^{(\lambda-1)t}$.

如果 $\lambda=\mu^2$, 则 $u(x,t)=(c_1e^{x\mu}+c_2e^{-x\mu})e^{(\mu^2-1)t}$.

6. (a) $u(x,y)=\exp(x+r(2y-3x))$.

(c) $u(x,y)=\exp\left(\frac{x}{rs}+ry+sz\right),\ rs\neq 0$.

(e) $u(x,y)=\exp\left(rx+y\sqrt{1-r^2}\right)$.

8. 只有比 $\frac{a}{b}$ 是唯一确定的. 因此, 以下的答案不是唯一的.

(a) $u(x,y)=f(2x-y)$.

(c) $u(x,y)=f(dx-cy)$.

9. (a) $u(x,y)=x-\frac{1}{2}y$.

(c) $u(x,y)=\frac{1}{49}\big((3y+4x)^2-7(3y+4x)\big)$.

练习 2.1

1. 在下面每个解中, f 是任意 C^1 函数.

(a) $u(x,y)=f(3x+2y)+\frac{1}{4}x^2$;   (c) $u(x,y)=-e^{x+y}+e^{2y}f(2x-y)$;

(e) $v(w,z)=w^2+f(3z-w)$.

2. (a) $u(x,y)=-e^{x+y}+\big(e^{x-\frac{1}{2}y}+\sin((x-\frac{1}{2}y)^2)\big)e^{2y}$.

(c) $u(x,y)=-e^{x+y}+\big(\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}y)+1\big)e^{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2}y)}e^{2y}$.

4. 函数 $g(x)$ 必具有形式 $-1+ke^x$, k 为某个常数. 如果 $g(x)$ 具有该形式, 原问题有无穷多个解. 只要 $C(0)=k$ 且 C 是 C^1 的, 形如 $u(x,y)=-1+C(y-3x)e^x$ 的任一函数都是解.

5. 有无穷多个解. 这些解中的两个解是

$$u(x,y)=-1+2\cos(y-3x)e^x \quad 和 \quad u(x,y)=-1+2e^{y-3x}e^x=-1+2e^{y-2x}.$$

6. $u(x,y)=(y+2x)^2$.

7. 两人的答案都对. 注意到 $e^{-cy/b}=e^{-cx/a}e^{c(bx-ay)/ab}$.

12. (a) 由 (26), 得 $P_\infty(y)=C\exp(-\int_0^y 0.1dy)=Ce^{-y/10}$.

(b) 最终仍在货架上鳄梨的数目是 $\int_0^\infty P_\infty(y)dy=10C$. 因此, $C=30$. 由于每天大约取走 30 个, 故自然每天需要获得大约 30 个.

练习 2.2

1. 在下面每个答案中, C 是任意 C^1 函数.

(a) $u(x,y)=C(\frac{x^2}{y})$.   (c) $u(x,y)=xC(ye^x)$.

2. (a) $u(x,y)=(\frac{x^2}{y})^{\frac{1}{3}},\ y>0$ (c) $u(x,y)=xye^x$.

3. (a) $X(s,t)=se^t,\quad Y(s,t)=e^{2t-s},\quad U(s,t)=\sin s$.

(c) $X(s,t)=s^2e^t,\quad Y(s,t)=s\exp(s^2(1-e^t)),\quad U(s,t)=s^3e^t$.

7. 对 $x\leqslant 0$ 令 $u(x,y)=0$, 对 $x\geqslant 0$ 令 $u(x,y)=yx^2$. 注意到 $u(x,y)\neq C(yx^2)$, 因对 x 和 $y\neq 0$, $u(-x,y)\neq u(x,y)$.

8. (d) $u(x,y)=f_n((-1)^n y\sin x),\ n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

练习 2.3

1. $u(x,y,z)=(x^2+y^2+2z^2-2yz-2xz)e^x$.
2. (a) $u(x,y,z)=z+\big((x+y)^2e^z-z\big)e^{-x}$.
   (c) 通解是 $u(x,y,z)=z+C(x+y,z)e^{-x}$. 因此,

$$\begin{aligned}u(x,y,x+y)&=(x+y)+e^y\Rightarrow x+y+C(x+y,x+y)e^{-x}\\&=(x+y)+e^y\Rightarrow C(x+y,x+y)=e^{x+y}.\end{aligned}$$

因此, 只需选择 C, 使得 $C(r,r)=e^r$. 考虑 $C(r,s)=e^rf(s-r)$, 其中 f 是任意满足 $f(0)=1$ 的 C^1 函数.

3. (a) $u(x,y,z,t)=f(x+t,y+2t,z-t)$.
   (b) $u(x,y,z,t)=(x+t)^2+(y+2t)^2+(z-t)^2$.
   (c) $(-t,-2t,t)$.
4. (a) $u(x,y,z)=C(x\cos z+y\sin z,y\cos z-x\sin z)$, 其中 C 是任意两个变量的 C^1 函数.
6. (a) $C(x-u^2,y-u^2)=0$(可能有其他等价的答案.)
   (b) $u(x,y)=\sqrt{2x-y+1},\ 2x-y+1>0$.
7. (a) $C(xy,u^2-x^2)=0$.
   (b) $u(x,y)=x\sqrt{x^2y^4+2y^2+1}$.
12. (b) $t=\tau,\ x=\big(V(s)+sV'(s)\big)\tau+s,\ \rho=f(s)$.
15. (a) $x(t)=-c_0\frac{2(\alpha t+1)}{(\gamma-1)\alpha}+C\big(1+\frac{1}{2}(\gamma+1)\alpha t\big)^{\frac{2}{\gamma+1}}$, 其中 $C=x(0)-c_0\frac{2}{(\gamma-1)\alpha}$.

练习 3.1

3. (a) $u(x,t)=4e^{-(2\pi/3)^2 2t}\sin\frac{2\pi x}{3}-e^{-(5\pi/3)^2 2t}\sin\frac{5\pi x}{3}$.
   (c) $u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-2(\pi/3)^2t}\sin\frac{\pi x}{3}-\frac{1}{4}e^{-2\pi^2t}\sin(\pi x)$.
   (e) $u(x,t)=6e^{-128\pi^2t/9}\sin\frac{8\pi x}{3}+e^{-50\pi^2t}\sin(5\pi x)$.
6. (a) $u(x,t)=5e^{-t}\cos x+3e^{-64t}\sin(8x)$.
   (c) $u(x,t)=\frac{1}{2}(9+e^{-36t}\cos(6x))$.
   (e) $u(x,t)=\frac{1}{2}(5+3e^{-4t}\cos(2x)+4e^{-4t}\sin(2x))$.
9. (c) $u(x,t)=e^{-ht}\sum_{n=1}^{N}b_ne^{-(n\pi/L)^2kt}\sin\frac{n\pi x}{L}$.

练习 3.2

4. 令 $f(x)=5\sin(3x)-3\sin(5x)$. 则当 $x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$ 时 $f'(x)=15\cos(3x)-15\cos(5x)=30\sin(4x)\sin x=0$. 现 $f(0)=f(\pi)=0,\ f(\frac{\pi}{4})=f(\frac{3\pi}{4})=5\sqrt{2}/2+$

$3\sqrt{2}/2 = 4\sqrt{2}$, 而 $f(\frac{\pi}{2}) = -8$. 因此, 由最大值最小值原理, 得 $-8 \leqslant u(x,t) \leqslant 4\sqrt{2}$.

练习 3.3

3. (b) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \exp\left(-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 kt}{L^2}\right) \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}$.
4. $u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t) = x - 1 + e^{-9\pi^2 t/2} \sin\frac{3\pi x}{2}$.
5. $u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t) = \frac{1}{20}x^2 + 2x + \frac{1}{2}t + e^{-5\pi^2 t}\cos(\pi x)$.
7. $u(x,t) = 4 - 2\pi + 2x + 7e^{-9t/4}\cos\frac{3x}{2}$.

练习 3.4

1. (b) $u(x,t) = \frac{1}{18}(1 - e^{-18t})\sin(3x)$.
3. $u(x,t) = e^{-9t}\sin(3x) + \sin t e^{-4t}\sin(2x)$.
5. (a) $w(x,t) = \frac{(b-a)x^2}{2L} + ax + \frac{(b-a)k}{L}t + \int h(t)dt$.
7. $u(x,t) = (e^t - t^2)\frac{x}{\pi} + t^2 + e^{-4t}\sin(2x) + (t - 1 + e^{-t})\sin x$.
9. $u(x,t) = t(x - x^2 + e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x))$.

练习 4.1

2. (a) FS $f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4\pi x)$.
   (b) FS $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\cos(3x)$.
4. (a) FS $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin\frac{n\pi x}{L}$.
7. (a) FS $f(x) = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos(nx) - n\sin(nx))\right)$.
8. FS $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2x) + \frac{1}{3\cdot 5}\cos(4x) + \cdots\right)$.
9. (a) FS $f(x) = \frac{8}{15} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(n\pi x)$.
   (b) $N = 3243$.
   (c) $N = 6$.

练习 4.2

2. $f(x) = a(x^3 - L^2 x) + d$, 对任意常数 $a \neq 0$ 和 d.

练习 4.3

4. (a) FCS $f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{L}$.
   (b) FSS $f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n=1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$.
5. (a) FCS $f(x) = 1$ 和 FSS $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}$.
   (b) FSS $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}\sin(2kx)$ 和 FCS $f(x) = \cos x$.

8. (a) $u(x,t)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-n^2kt}\cos(nx)$.
9. (a) $u(x,t)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}e^{-(2m+1)^2\pi^2 t}\sin((2m+1)\pi x)$.
10. (a) 形式解是 $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+\frac{1}{2})^2kt}\sin((n+\frac{1}{2})x)$.
11. $u(x,t)=x-1+4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}-\frac{2(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}\right)e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2kt}\sin((n+\frac{1}{2})\pi x)$.
12. $u(x,t)=\frac{kt}{10}+\frac{x^2}{20}+2x-\frac{35}{3}+20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3(-1)^n)}{\pi^2n^2}e^{-(n\pi/10)^2kt}\cos\frac{n\pi x}{10}$.

练习 4.4

1. (a) $\lambda_n=\frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}$, $y_n(x)=A_n\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}$, $n=1,2,3,\cdots$

   (c) $\lambda_n=\frac{(n-1)^2\pi^2}{L^2}$, $y_n(x)=B_n\cos\frac{(n-1)\pi x}{L}$, $n=1,2,3,\cdots$.

2. (a) $\lambda_1=-1$, $y_1(x)=A_1e^x$,

   $\lambda_n=(n-1)^2$, $y_n(x)=a_n\big(\sin((n-1)x)+(n-1)\cos((n-1)x)\big)$, $n=2,3,4,\cdots$

   (c) $\lambda_n=(2n-1)^2\pi^2$, $y_n(x)=A_n\sin((2n-1)\pi x)+B_n\cos((2n-1)\pi x)$, $n=1,2,3,\cdots$.

5. (b) $L\neq n\pi$, $n=1,2,3,\cdots$.
7. (a) $(xy')'+(\frac{x^2-m^2}{x})y=0$, $x>0$.

   (c) $(\sqrt{1-x^2}y')'+\frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0$, $-1<x<1$.

14. (b) $y_n(x)=B_n\cos\frac{n\pi x}{L}$, $z_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi x}{L}$, $A_n,B_n\neq 0, n\geqslant 1$.

练习 5.1

1. (a) $u(x,t)=3\cos\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{L}{4\pi a}\sin\frac{2\pi at}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}-\cos\frac{4\pi at}{L}\sin\frac{4\pi x}{L}$

   (c) $u(x,t)=\frac{L}{4\pi a}\sin\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{L}{12\pi a}\sin\frac{3\pi at}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}$.

3. (b) $u(x,t)=U(x)=-\frac{g}{2a^2}x(L-x)$, 此描绘一根悬弦.
6. (a) $u(x,t)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos((2k+1)t)\sin((2k+1)x)$, 其中 $N\geqslant 13$.

练习 5.2

1. (a) $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2a})(x+at)^2+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2a})(x-at)^2$.

   (c) t.

   (e) $\sin(x+at)$.

4. $u(x,t)=\frac{1}{2}|x-at|^3+\frac{1}{2}|x+at|^3$.

练习 5.3

2. (a) $u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(\cos(2at)-\frac{1}{2a}\sin(2at))\cos(2x)$.

(b) $u(x,t)=\frac{1}{2}(\cos^2(x+at)+\cos^2(x-at))+\frac{1}{2a}\big(at-\frac{1}{4}\sin(2(x+at))+\frac{1}{4}\sin(2(x-at))\big)$.

4. (a) $u(x,1)=0,\quad u(x,2)=-f(x),\quad u(x,3)=0,\quad u(x,4)=f(x)$.

5. (b) $\frac{a}{4L}$, 此为两个端点都是固定情形的最低频率 $\frac{a}{2L}$ 的一半.

6. $u(x,t)=\frac{4t^2}{\pi}+\frac{x^2}{\pi}-x+2\cos(6t)\cos(3x)+\frac{1}{2}\sin(2t)\cos x$.

7.
$$u(x,t)=\frac{1}{1+a^2}\Big(e^{-t}\cos x+\frac{1}{2a}\big(\sin(x+at)-\sin(x-at)\big)-\frac{1}{2}\big(\cos(x+at)+\cos(x-at)\big)\Big).$$

9.
$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{9a^2-\omega^2}\big(\cos(\omega t)-\cos(3at)\big)\sin(3x), & \omega\neq 3a,\\ \frac{t}{6a}\sin(3at)\sin(3x), & \omega=3a\ (\text{共振}).\end{cases}$$

练习 6.1

2. (c) 在许多可能性之中, 考虑 x 和 $2x$. 更一般地, 考虑 x 和不具形式 $ay+b$ 的任意调和函数 $u(x,y)$ (参看 (b) 部分).

3. 对任意常数 a,b,c,A 和 B, 我们有乘积解 $(ax+b)(Ay+B),(ae^{cx}+be^{-cx})(A\sin(cy)+B\cos(cy))$ 和 $(ae^{cy}+be^{-cy})(A\sin(cx)+B\cos(cx))$. 因子 $(ae^{cx}+be^{-cx})$ 可用 $(\alpha\cosh(cx)+\beta\sinh(cx))$ 替换, 此通常是更有用的, 对 $(ae^{cy}+be^{-cy})$ 类似.

6. 在 Dirichlet 问题中, 稳态温度在金属板边界上每点的值是指定的, 而在 Neumann 问题中通过金属板边界的热能流量在沿着边界所有点是指定的.

7. (a) $q(x,y)$ 与在点 (x,y) 的单位面积热能生产率成比例.

(b) 要使存在稳态温度分布 $u(x,y)$, 在金属板内的热能生产率必须等于通过边界的热损失率.

练习 6.2

2. (a) $u(x,y)=\frac{9}{\sinh(8\pi M/L)}\sin\frac{8\pi x}{L}\sinh\frac{8\pi(M-y)}{L}$.

(b) $u(x,t)=\frac{1}{\sinh(\pi M/L)}\sin\frac{\pi x}{L}\sinh\frac{\pi y}{L}$.

3. $u(x,y)=\frac{1}{\sinh\pi}\big(\sinh(\pi-y)\sin x+\sinh y\sin x+\sinh(\pi-x)\sin y+\sinh x\sin y\big)$.

4. (a) $U(x,y)=x-y+2xy$.

(b) $u(x,y)=\frac{3}{\sinh\pi}\sin(\pi x)\sinh(\pi-\pi y)+\frac{1}{\sinh(2\pi)}\sin(2\pi y)\sinh(2\pi-2\pi x)+U(x,y)$.

5. (b) 四项 (参看例 5)

(c) 是, 对差应用最大值最小值原理.

7. (b) $u(x,y)=\frac{-\cos x\cosh(\pi-y)}{\sinh\pi}+\frac{\cos(2x)\cosh(2(\pi-y))}{2\sinh(2\pi)}+\coth\pi-\frac{1}{2}\coth(2\pi)$.

练习 6.3

1. (a) $U(r,\theta)=\frac{\ln r}{\ln 2}+\left(\frac{2}{2-\frac{1}{2}}r+\frac{-2}{2-\frac{1}{2}}r^{-1}\right)\cos\theta+\left(\frac{1}{4-\frac{1}{4}}r^2+\frac{-1}{4-\frac{1}{4}}r^{-2}\right)\cos(2\theta)$
$+\left(\frac{-\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{4}}r^2+\frac{4}{4-\frac{1}{4}}r^{-2}\right)\sin(2\theta)$
$=\frac{\ln r}{\ln 2}+\frac{4}{3}(r-r^{-1})\cos\theta+\frac{4}{15}(r^2-r^{-2})\cos(2\theta)$
$+\frac{1}{15}(-r^2-16r^{-2})\sin(2\theta).$

(c) $U(r,\theta)=b+(a-b)\frac{\ln r}{\ln 2}$.

(d) $U(r,\theta)=(\frac{a-\frac{1}{8}b}{8-\frac{1}{8}})r^3+(\frac{8b-a}{8-\frac{1}{8}})r^{-3}\sin(3\theta)=\left(\frac{8a-b}{63}r^3+\frac{64b-8a}{63}r^{-3}\right)\sin(3\theta)$.

3. (a) $U(r,\theta)=1+r\cos\theta+\frac{1}{4}r^2\cos(2\theta)$. (c) $U(r,\theta)=a$. (d) $U(r,\theta)=\frac{1}{8}ar^3\sin(3\theta)$. 不能用问题 1 中的解, 因为它们在原点都有奇异性.

4. (a) 由定理 1, $U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(4-r^2)t^2}{4-4r\cos(\theta-t)+r^2}dt$.

(b) FS $f(\theta)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\theta)$.

因此, $U(r,\theta)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\frac{r}{2})^n\cos(n\theta)$, 根据定理 4 和事实 FS $f(\theta)=f(\theta)$, 它是精确解, 因 $f(\theta)$ 的周期延拓是连续和分段 C^1 的 (即, 当 $r=2$ 时级数收敛到 $f(\theta)$).

(c) 由最大值原理 (第 6.4 节的定理 1), 无穷项级数解的截取 $U_N(r,\theta)$ 与精确解 $U(r,\theta)$ 之间差的最大值在边界上取到. 因此, 我们只需估计 FS $f(\theta)$ 在 0.01 之内逼近 $f(\theta)$ 所需的项数. 利用积分比较:

$$|f(\theta)-S_Nf(\theta)|\leqslant 4\int_N^{\infty}x^{-2}dx=\frac{4}{N}.\ \text{因此,}\quad N=401\ \text{将足够了}.$$

5. (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ (b) (*i*) $\frac{2\pi r^n}{\sqrt{1-a^2}}$, 其中 $r=\frac{1}{a}(1-\sqrt{1-a^2})$, $n=0,1,2,\cdots$.

9. 由平均值定理, 稳态温度 (即, 具有给定边值的调和函数) 是平均

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}10\theta^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\frac{20}{3}\pi^3=\frac{10}{3}\pi^2.$$

练习 6.4

3. 注意到对任意常数 c, $u(x,y)=c\sinh y\sin x$ 满足问题. 这不与定理 2 矛盾, 因为区域 $0<x<\pi$, $0<y<\infty$ 不是有界的.

4. 函数 u_1 和 u_2 在原点有奇异性, 因此在圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内不是处处调和的.

7. (a) 如果 $u(x,y)$ 是解, 则 $u(x,y)+y$ 也是.

练习 6.5

2. 函数 $\ln r$ 在原点没定义, 因此不是调和的.

10. (d) 由 v–轴上从 -1 到 1 的割缝的流体流产生的流线. 静电学上该双曲线表示当一块带大正电荷的板与带大负电荷的板边缘对边缘地置放所产生的等势曲线, 两板之间有一条割缝. 如果这两块板保持不同的常值温度, 则双曲线将是稳态温度分布所产生的等温线.
11. (a) 稍微在 u–轴之上的 $(-\infty,-1]+i\epsilon$ 在 $g(w)=\sqrt{1-w^2}$ 下的图像是正 y–轴稍微往右. 稍微在 u–轴之上的 $[-1,1]+i\epsilon$ 的图像落在 x–轴上线段 $[0,1]$ 稍上一些, 然后把该线段稍下面的拉回原点. $[1,+\infty)+i\epsilon$ 的图像是稍微在负 y–轴右边. 因此, 流线围绕 x–轴的线段 $[-1,1]$ 流动.
(b) 流线是带有垂直条的大平板上的稳态热分布的 (截面) 等温线, 或由具有相同形状带电导体产生的位势的等势曲线.

练习 7.1

1. 下面 (a), (b) 和 (c) 中的求和是对所有非零整数.
(a) $\mathrm{FS_c}\, f(x)=\frac{L}{i\pi}\sum\frac{(-1)^{m+1}}{m}e^{im\pi x/L}$.
(b) $\frac{L^2}{3}+\frac{2L^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^m}{m^2}e^{im\pi x/L}$.
(c) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi^2}\sum\frac{1-(-1)^m}{m^2}e^{im\pi x/L}$.
3. (a) $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\xi^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big(1-\cos(\xi L)\big)$
(c) $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2i\sqrt{a}}\big(e^{-\frac{1}{2}(\xi-b)^2/a}-e^{-\frac{1}{2}(\xi+b)^2/a}\big)$.

练习 7.2

2. (a) $\hat{f}(\xi)=(1-\xi^2)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$
7. $\hat{f}(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+i\xi)^{-3}$.
19. (a) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(am)}{m}=\frac{1}{2}(\pi-a)$, $0<a\leqslant\pi$. 该和是奇的且关于 a 是 2π 为周期的.
(c) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{a^2+m^2}=\frac{1}{2}\big(\frac{\pi}{a}\coth(\pi a)+\frac{1}{a^2}\big)\quad(a\neq 0)$.

练习 7.3

1. (a) $\check{g}(x)=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$. (c) $\check{g}(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ \frac{1}{2}, & |x|=1,\\ 1, & |x|<1.\end{cases}$
3. $\hat{h}(\xi)=\sqrt{2\pi}i^{n+1}\xi\hat{f}(\xi)\hat{f}^{(n)}(\xi)$.
5. (a) $\hat{f}_n(\xi)=\frac{n!}{\sqrt{2\pi}}\big(\frac{1-i\xi}{1+\xi^2}\big)^{n+1}$.
6. (a) $g(x)=\frac{b}{\sqrt{2\pi(b-a)}}\exp(-\frac{ab}{2(b-a)}x^2)$.

7. (a) $\frac{1}{2}\pi a^{-3}$.

(c) $\frac{\pi}{a^2}(1-e^{-ab})$.

10. $f(x)=1-|x|$ 如果 $|x|<1$, $f(x)=0$ 如果 $|x|\geqslant 1$.

练习 7.4

2. $u(x,t)=\sqrt{\frac{t}{2k}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$.

11. $u(x,t)=\frac{\sin(x+at)}{1+(x+at)^2}+\frac{\sin(x-at)}{1+(x-at)^2}$.

14. $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(s)}{y^2+(x-s)^2}ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{-y}{y^2+(x-s)^2}ds+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-s)^2}ds$

$$=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-s}{y}\right)\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-s}{y}\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y}.$$

练习 7.5

2. $u(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}h(s)ds$.

3. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^{\infty}(e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}+e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}})f(y)dy-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{t}{\sqrt{t-s}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}h(s)ds$.

5. $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}y\left(\frac{1}{y^2+(x-s)^2}-\frac{1}{y^2+(x+s)^2}\right)f(s)ds$.

8. (a) $u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(y\left(\frac{1}{y^2+(x-s)^2}-\frac{1}{y^2+(x+s)^2}\right)f(s)+x\left(\frac{1}{x^2+(y-s)^2}-\frac{1}{x^2+(y+s)^2}\right)g(s)\Big)ds$. 注意到通过简单地加上因子 xy 或 $\mathrm{Im}[(x+iy)^{2n}]$, $n=1,2,3,\cdots$ 可得到其他的解.

练习 8.1

1. $u(x,y,t)=4\exp\big(-\pi^2((\frac{3}{2})^2+1^2)6t\big)\sin\frac{3\pi x}{2}\sin(\pi y)$

$$-2\exp\big(-\pi^2(1^2+(\tfrac{2}{3})^2)6t\big)\sin(\pi x)\sin\frac{2\pi y}{3}.$$

3. $u(x,y,t)=\exp\big(-\pi^2((\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2)t\big)\cos\frac{3\pi x}{2}\sin\frac{\pi y}{2}$.

7. 以下近似的有效性见例 3.

(a) $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{6400}{\pi^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-9\pi^2kt/4}$. 注意到 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $1^2+1^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$.

(b) $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{400}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi^2kt/4}$.

(c) 对相对的绝热面, $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{1600}{\pi^2}e^{-2\pi^2kt/2}$.

对相邻的绝热面, $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},t)\approx\frac{6400}{\pi^2}\frac{1}{2}e^{-3\pi^2kt/2}$. 因此, 相邻的绝热面当 t 大时在中心温度下降得最小, 因 $\frac{3}{2}<2$.

8. $u(x,y,z)=\frac{1}{\sinh\sqrt{2}}\sin x\sin y\sinh(\sqrt{2}(1-z))$.

13. $u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{c_nc_m}{\pi a\sqrt{n^2+m^2}}\sin(\pi a\sqrt{n^2+m^2}t)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)$,

其中

$$\begin{aligned}
c_k &= 2\int_0^1 z(z-1)\sin(k\pi z)dz = 2\langle s_k, z(z-1)\rangle = -\frac{2}{(k\pi)^2}\langle s'', z(z-1)\rangle \\
&= -\frac{2}{(k\pi)^2}\left(\{s_k'(z)z(z-1) - s_k(z)(2z-1)\}\Big|_0^1 + \langle s_k, 2\rangle\right) = -\frac{2}{(k\pi)^2}\langle s_k, 2\rangle \\
&= \frac{2}{(k\pi)^3}2\cos(k\pi z)\Big|_0^1 = \frac{2}{(k\pi)^3}2(\cos(k\pi)-1) = 2(k\pi)^{-3}2((-1)^k-1) \\
&= -\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3, \quad \text{如果 } k \text{ 是奇数, 否则为 } 0.
\end{aligned}$$

因此,

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1\ (\text{奇数})}^{\infty} \left(\frac{4}{nm\pi^2}\right)^3 \frac{1}{\pi a\sqrt{n^2+m^2}} \sin(\pi a\sqrt{n^2+m^2}t)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y).$$

练习 8.2

1. (a) $f_{n,m}(x,y) = \cos\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{m\pi y}{2}, \quad m,n = 0,1,2,\cdots.$

   (b) $u_t = k\triangle u$ 相应的解具有以下形式

$$u_{n,m}(x,y,t) = \exp\left(-k\pi^2\left(\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right)t\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{m\pi y}{2}.$$

注意到 $u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{n,m}u_{n,m}(x,y,t)$ 满足问题

$$\begin{aligned}
&\text{D.E.} \quad u_t = k\triangle u, \quad \text{于 } R \text{ 上}, \ t>0; \\
&\text{B.C.} \quad \begin{cases} u_y(x,0,t) = u_y(x,2,t) = 0, & (0 \leqslant x \leqslant 3) \\ u_x(0,y,t) = u_x(3,y,t) = 0, & (0 \leqslant y \leqslant 2) \end{cases} \\
&\text{I.C.} \quad u(x,y,0) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{n,m}\cos\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{m\pi y}{2}.
\end{aligned}$$

4. 两解具形式 $u_1(x,y,t) = \exp(-\pi^2(3^2+1^2)kt)\cos(3\pi x)\cos(\pi y)$ 和 $u_2(x,y,t) = \exp(-\pi^2(2^2+2^2)kt)\cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$. 由于 $3^2+1^2 > 2^2+2^2$, 故解 u_1 衰减得更迅速. 一般而言, 特征值越大, 衰减得就越迅速.

练习 8.3

1. (a) $U(\rho,\varphi,\theta)=\frac{1}{\rho}$. (c) $U(\rho,\varphi,\theta)=\rho^2\sin^2\varphi-2\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2(1-3\cos^2\varphi)$.

3. $\triangle_s(\sin\varphi)=(\sin\varphi)^{-1}\cos^2\varphi-\sin\varphi$; $\sin\varphi$ 在单位球面上不是 C^2 的 (也不是 C^1 的).

8. (a) $U(\rho,t)=\frac{1}{\rho}\big(\frac{3}{4}e^{-\pi^2kt}\sin(\pi\rho)-\frac{1}{4}e^{-9\pi^2kt}\sin(3\pi\rho)\big)$.

11. (a) $U(\rho,t)=\frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^\infty(e^{-(\rho-\bar\rho)^2/(4kt)}-e^{-(\rho+\bar\rho)^2/(4kt)})\bar\rho f(\bar\rho)d\bar\rho$.

练习 8.4

2. 下面的答案不是唯一的.

(a) $(x,y,z)\mapsto\big(\sqrt{\frac{1}{2}}(y+x),\sqrt{\frac{1}{2}}(y-x),z\big)$; 绕 z-轴旋转 $-45°$.

(c) $(x,y,z)\mapsto(-y,x,z)$; 绕 z-轴旋转 $90°$.

4. (a) $8\rho^4P_4(\cos\varphi)=\rho^4(35\cos^4\varphi-30\cos^2\varphi+3)=35z^4-30\rho^2z^2+3\rho^4$

$$=35z^4-30(x^2+y^2+z^2)z^2+3(x^2+y^2+z^2)^2.$$

(b) 是, 因 $f(\varphi,\theta)=f(0,\theta)$, 此为 f 在北极的常数值.

6. (a) $2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta=-\frac{i}{6}S_{2,2}(\varphi,\theta)+\frac{i}{6}S_{2,-2}(\varphi,\theta)$.

$2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta=-\frac{1}{6}S_{2,1}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-1}(\varphi,\theta)$.

$2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta=\frac{1}{6}S_{2,1}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-1}(\varphi,\theta)$.

$\sin^2\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{6}S_{2,2}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-2}(\varphi,\theta)$.

$\sin^2\varphi\sin^2\theta-\cos^2\varphi=-\frac{1}{2}\big(\frac{1}{6}S_{2,2}(\varphi,\theta)+\frac{1}{6}S_{2,-2}(\varphi,\theta)\big)-S_{2,0}(\varphi,\theta)$.

11. (a) $u(x,y,z)=\frac{1}{3}+x+\frac{3}{5}z-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2-\frac{1}{3}z^2+z^3-\frac{3}{5}z(x^2+y^2+z^2)$.

(b) $u(x,y,z)=x\rho^{-3}+\frac{1}{3}\rho^{-1}-\frac{1}{2}(z^2-\frac{1}{3}\rho^2)\rho^{-5}-\frac{1}{2}(x^2-y^2)\rho^{-5}+z^3\rho^{-7}-\frac{3}{5}z\rho^{-5}+\frac{3}{5}\rho^{-3}$.

17. $U(\rho,\varphi,\theta,t)=e^{-4\pi^2kt}j_0(2\pi\rho)+e^{-(\beta_{1,3})^2kt}j_1(\beta_{1,3}\rho)\cos\varphi$

$$+e^{-(\beta_{2,1})^2kt}j_2(\beta_{2,1}\rho)\sin^2\varphi\sin(2\theta).$$

练习 8.5

7. 令 $f_{\nu,q}(r,\theta)=J_\nu(j_{\nu,q}r/r_0)\sin(n\pi\theta/\alpha)$, $\nu=n/\alpha$, $n=1,2,3,\cdots$, 其中 $J_\nu(r)$ 如 (6) 定义, 但以 ν 替换 m 和以 $\Gamma(\nu+k+1)$ 替换 $(m+k)!$, $j_{\nu,q}$ 是 $J_\nu(r)$ 的第 q 个正零点. 特征函数 $f_{\nu,q}(r,\theta)$(具特征值 $j_{\nu,q}/r_0$) 可用来求解在顶面和底面都是绝热, 在边上保持为 0 的薄楔形中的热流. 而且, 可用它们描述一楔形膜的振动.

8.

$$U(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}c_{m,q}J_m(j_{m,q}\frac{r}{r_0})\sinh(j_{m,q}\frac{z}{r_0})e^{im\theta},$$

其中

$$c_{m,q}=\left(\pi r_0^2J_m'(j_{m,q})^2\sinh(j_{m,q}\frac{z_0}{r_0})\right)^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}f(r,\theta)J_m(j_{m,q}\frac{r}{r_0})e^{-im\theta}drd\theta.$$

9. (e) 不是, 最小能量为 $\frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$, 当 $N=0$ 时得到.

练习 8.6

8. 令 $U(P,t)\equiv\int_{\partial M}\partial_\nu G(P,Q)f(Q,t)d\partial M(Q)$. 由 (47), $U(P,t)$ 满足D.E. $\triangle_M U=0$, 以及 B.C. $U(Q,t)=f(Q,t)$, $Q\in\partial M$. 令 $v(P,t)\equiv u(P,t)-U(P,t)$. 则 v 满足相应问题

D.E. $v_t(P,t)=k\triangle_M u(P,t)-U_t(P,t)$, 于$M$上, $t\geqslant 0$;
B.C. $v(Q,t)=0$, 对∂M上所有的 Q, $t>0$;
I.C. $v(P,0)=-U(P,0)$.

为了解该相应问题, 令 v_1 是定理 4 中问题 (11) 的解 (12), $f(P)=-U(P,0)$, 令 v_2 是定理 6 中问题 (15) 的解 (16), $\varphi(P,t)=-U_t(P,t)$. 则 $v=v_1+v_2$ 以及 $u=v+U$.

21.

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}-(\beta_{n,q})^{-2}\|E_{n,q,m}\|^{-2}j_n(\beta_{n,q}\rho)S_{n,m}(\varphi,\theta)j_n(\beta_{n,q}\rho')\overline{S_{n,m}(\varphi',\theta')},$$

其中 (ρ,θ,φ)[对应地 (ρ',θ',φ')] 是 $\mathbf{r}$[对应地 $\mathbf{r}'$] 的球面坐标,$\|E_{n,q,m}\|^2$ 由第 8.4 节的 (38) 中给出.

符号说明

符　号	说　明
a_n	Fourier 余弦系数
B.C.	边界条件
b_n	Fourier 正弦系数
C^k	k 次连续可导
$c_n(x)$	$\cos\frac{n\pi x}{L}$
$\overline{D}$	子集 D 的闭包
D.E.	微分方程
$\partial_\nu f$	f 的外法向导数
∂M	流形 M 的边界
δ_x	Dirac delta"函数" 或分布
$\triangle$	Laplace 算子
$\triangle_M$	流形 M 上 Laplace 算子
$\triangle_s$	单位球上 Laplace 算子
FS $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 级数
$\mathrm{FS_c}$ $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的复 Fourier 级数
FCS $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 余弦级数
FSS $f(x)$	$[-L,L]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 正弦级数
$\hat{f}(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 变换
$\check{f}(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 反变换

符　号	说　明
$\hat{f}_c(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 余弦变换
$\hat{f}_s(\xi)$	$f(x)$ 的 Fourier 正弦变换
$\bar{f}(x)$	修正函数 (在跳跃点平均化)
$f_e(x)$	$f(x)$ 的偶延拓
$f_o(x)$	$f(x)$ 的奇延拓
$f^e(x)$	延拓, 在 $x=L$ 处偶延拓, 在 $x=0$ 处奇延拓
$f^0(x)$	延拓, 在 $x=L$ 处奇延拓, 在 $x=0$ 处偶延拓
$\|f\|$	函数 f 的范数
$f*g$	$f(x)$ 和 g 的卷积
$\langle f,g\rangle$	函数 f 和 g 的内积
$\Gamma(x)$	gamma 函数
$H_m(x)$	m 次 Hermite 多项式
H_n^k	$\mathbf{R}^n$ 中标准闭 k–维半空间
$H(x,t)$	热核
I.C.	初始条件
$I_m(x)$	修正的 (第一类)Bessel 函数
$j_m(x)$	m 阶第一类球 Bessel 函数
$J_m(x)$	整数 m 阶第一类 Bessel 函数
$J_\nu(x)$	实数 ν 阶第一类 Bessel 函数
$j_{m,q}$	$J_m(x)$ 的第 q 个正零点
$k_m(x)$	m 阶 Hermite 函数
$L_q^p(x)$	q 次广义 Laguerre 多项式
LS $f(\varphi,\theta)$	单位球面上函数的 Laplace 级数
$\mathbf{L}[u]$	作用在函数 u 上的微分算子
P.C.	周期性条件
$P(r,r_0,\theta-t)$	Poisson 核
$P_n(w)$	n 次 Legendre 多项式
$P_{n,m}(w)$	伴随的 Legendre 函数
$R_n^{\pm1}(\rho)$	球坐标径向函数
$\mathbf{R}_n^k$	$\mathbf{R}^n$ 的标准 k–维子空间
$S_N(x)$	Fourier 级数的 N 项部分和
$S_{n,m}$	球面调和函数
$s_n(x)$	$\sin\frac{n\pi x}{L}$
u_x，$u_{xy},\cdots$	u 的偏导数
u_p	D.E. 和 B.C. 的特解

符　　号	说　　明
$U(r,\theta)$	$u(r\cos\theta, r\sin\theta)$
$\tilde{v}(x,t;s)$	用于有关 Duhammel 原理中
$Y_m(x)$	整数 m 阶第二类 Bessel 函数
$Y_\nu(x)$	实数 ν 阶第二类 Bessel 函数

名词索引

[1] 名词所在的小节. —— 译者注

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

N

P

Q

R

X

Y

Z